Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

Dritter Abschnitt. Von den Verhältnissen und Proportionen.

Des

Ersten Theils

Dritter Abschnitt.

Von

den Verhältnissen und Proportionen.

Des

Ersten Theils

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

I. Capitel.

Von den arithmetischen Verhältnissen, oder von dem Unterschiede zwischen zwey Zahlen.

§. 378.

Zwey Größen sind entweder einander gleich, oder ungleich. Im letztern Fall ist eine größer als die andere, und wenn man nach ihrer Ungleichheit fragt, so kann dies auf zweyerley Weise geschehen; man fragt entweder, um wie viel die eine größer sey, als die andere? oder man fragt, wie vielmal die eine größer sey als die andere? Beyde Bestimmungen werden ein Verhältniß genannt, und zwar die erstere ein arithmetisches, die letztere aber ein geometrisches Verhältniß. Diese Benennungen stehen aber mit der Sache selbst in gar keiner Verbindung, sondern sind willkührlich eingeführt worden.

§. 379.

Es versteht sich hier von selbst, daß die Größen von einerley Art seyn müssen, weil sonst nichts über ihre Gleichheit oder Ungleichheit bestimmt werden kann. Denn es würde ungereimt seyn, wenn einer z. B. fragen wollte, ob 2 ℔ und 3 Ellen einander gleich oder ungleich wären? Daher ist hier jedesmal von Größen einerley Art die Rede, und da sich dieselben immer durch Zahlen anzeigen lassen, so wird, wie schon anfänglich gesagt worden, hier nur von bloßen Zahlen gehandelt.

§. 380.

Wenn also von zwey Zahlen gefragt wird, um wie viel die eine größer sey als die andere, so wird durch die Antwort ihr arithmetisches Verhältniß bestimmt. Da nun dies geschiehet, wenn man den Unterschied zwischen den beyden Zahlen anzeigt, so ist ein arithmetisches Verhältniß nichts anders, als der Unterschied zwischen zwey Zahlen. Dieses letztere Wort (Unterschied) wird aber hier häufiger gebraucht, so daß das Wort Verhältniß nur bey den sogenannten geometrischen Verhältnissen beybehalten wird.

§. 381.

Der Unterschied zwischen zweyen Zahlen wird aber gefunden, wenn man die kleinere von der größern subtrahirt und dadurch erhält man die Antwort auf die Frage, um wie viel die eine größer sey als die andere. Wenn also die beyden Zahlen einander gleich sind, so ist der Unterschied nichts oder Null, und wenn man fragt, um wie viel die eine größer sey als die andere? so muß man antworten, um nichts. Da z. B. $6 = 2 \cdot 3$, so ist der Unterschied zwischen 6 und $2 \cdot 3$ nichts.

§. 382.

Sind aber die beyden Zahlen ungleich, als 5 und 3 und man fragt, um wie viel 5 größer sey als 3, so ist

ist die Antwort um 2; welches man findet, wenn man 3 von 5 subtrahiret. Eben so ist 15 um 5 größer als 10, und 20 ist um 8 größer als 12.

§. 383.

Hier ist also dreyerley zu betrachten: erstlich die größere Zahl, zweytens die kleinere, und drittens der Unterschied, welche drey Dinge unter sich eine solche Verbindung haben, daß man immer aus zwey derselben das dritte finden kann. Es sey die größere Zahl = a, die kleinere = b, und der Unterschied, welcher auch die Differenz genannt wird, = d; so wird der Unterschied d gefunden, wenn man b von a subtrahirt, so daß d = a — b; woraus erhellet, wie man d finden soll, wenn a und b gegeben sind.

§. 384.

Wenn aber die kleinere Zahl b, nebst dem Unterschied d gegeben ist, so wird die größere daraus gefunden, wenn man den Unterschied zu der kleinern Zahl addirt; daher bekommt man die größere a = b + d. Denn wenn man von b + d die kleinere b abzieht, so bleibt d übrig, welches der gegebene Unterschied ist. Gesetzt die kleinere Zahl sey 12 und der Unterschied 8, so wird die größere = 20 seyn.

§. 385.

Wenn aber die größere Zahl a nebst dem Unterschied d gegeben ist, so wird die kleinere b gefunden, wenn man den Unterschied von der größern Zahl subtrahirt. Daher bekommt man b = a — d. Denn wenn man diese Zahl a — d von der größern a subtrahirt, so bleibt d übrig, welches der gegebene Unterschied ist.

§. 386.

Diese drey Zahlen a, b, d sind also dergestalt mit einander verbunden, daß man daraus die drey folgenden Bestimmungen erhält. Erstens hat man $d = a - b$, 2tens $a = b + d$, und 3tens $b = a - d$, und wenn von diesen drey Vergleichungen eine richtig ist, so sind auch die beyden andern nothwendig richtig. Wenn daher überhaupt $z = x + y$, so ist auch nothwendig $y = z - x$ und $x = z - y$.

§. 387.

Bey einem solchen arithmetischen Verhältniß ist zu merken, daß, wenn zu den beyden Zahlen a und b eine beliebige Zahl c entweder addirt, oder davon subtrahirt wird, der Unterschied eben derselbe bleibet. Also wenn d der Unterschied zwischen a und b ist, so ist auch d der Unterschied zwischen den beyden Zahlen $a + c$ und $b + c$, und auch zwischen $a - c$ und $b - c$. Da z. B. zwischen diesen Zahlen 20 und 12 der Unterschied 8 ist, so bleibt auch dieser Unterschied, wenn man zu denselben Zahlen 20 und 12 eine Zahl nach Belieben entweder addirt oder davon subtrahirt.

§. 388.

Der Beweis hievon ist offenbar. Denn wenn $a - b = d$, so ist auch $(a + c) - (b + c) = d$. Eben so wird auch $(a - c) - (b - c) = d$ seyn.

§. 389.

Wenn die beyden Zahlen a und b verdoppelt werden, so wird auch der Unterschied zweymal so groß. Wenn also $a - b = d$, so wird $2a - 2b = 2d$ seyn; und allgemein wird man $na - nb = nd$ haben, was man auch immer für eine Zahl für n annimmt.

II. Ca-

II. Capitel.

Von den arithmetischen Proportionen.

§. 390.

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine arithmetische Proportion genannt.

Also wenn $a - b = d$ und auch $p - q = d$, so daß der Unterschied zwischen den Zahlen p und q eben so groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so machen diese vier Zahlen eine arithmetische Proportion aus, welche also geschrieben wird $a - b = p - q$, wodurch angezeigt wird, daß der Unterschied zwischen a und b eben so groß sey, als zwischen p und q.

§. 391.

Eine arithmetische Proportion besteht daher aus vier Gliedern, welche so beschaffen seyn müssen, daß, wenn man das zweyte von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als wenn man das vierte von dem dritten abzieht. Also machen diese Zahlen 12, 7, 9, 4, eine arithmetische Proportion aus, weil $12 - 7 = 9 - 4$.

§. 392.

Wenn man eine arithmetische Proportion hat, als $a - b = p - q$, so lassen sich darin das zweyte und dritte Glied verwechseln und es wird auch $a - p = b - q$ seyn. Denn da $a - b = p - q$, so addire man erstlich beyderseits b, und so hat man $a = b + p - q$. Hernach subtrahire man beyderseits p, so bekommt man $a - p = b - q$.

Da also $12 - 7 = 9 - 4$, so ist auch $12 - 9 = 7 - 4$.

§. 393.

In einer jeden arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweyten und zugleich das dritte mit dem vierten verwechseln. Denn wenn $a - b = p - q$, so ist auch $b - a = q - p$. Denn $b - a$ ist das Negative von $a - b$ und eben so ist auch $q - p$ das Negative von $p - q$. Da nun $12 - 7 = 9 - 4$, so ist auch $7 - 12 = 4 - 9$.

§. 394.

Besonders aber ist bey einer jeden arithmetischen Proportion diese Haupteigenschaft wohl zu bemerken, daß die Summe des zweyten und dritten Gliedes immer eben so groß sey, als die Summe des ersten und vierten Gliedes, welchen Satz einige auch so ausdrücken: die Summe der mittlern Glieder ist allezeit so groß, als die Summe der äußern. Also da $12 - 7 = 9 - 4$, so ist $7 + 9 = 12 + 4$, denn jedes macht 16.

§. 395.

Um diese Haupteigenschaft zu beweisen, so sey $a - b = p - q$: man addire beyderseits $b + q$, so bekommt man $a + q = b + p$, das ist, die Summe des ersten und vierten Gliedes ist gleich der Summe des zweyten und dritten. Hieraus erhellt auch umgekehrt folgender Satz: wenn vier Zahlen, als a, b, p, q, so beschaffen sind, daß die Summe der zweyten und dritten so groß ist, als die Summe der ersten und vierten, nemlich daß $b + p = a + q$, so sind diese Zahlen gewiß in einer arithmetischen Proportion, und es wird $a - b = p - q$ seyn. Denn da $a + q = b + p$, so subtrahire man beyderseits $b + q$, und so bekommt man $a - b = p - q$.

Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summe der mittlern 13 + 15 = 28 = der Summe der äußern 18 + 10 ist, so sind dieselben auch gewiß in einer arithmetischen Proportion und folglich 18 — 13 = 15 — 10.

§. 396.

Aus dieser Eigenschaft kann man leicht folgende Frage auflösen: **wenn von einer arithmetischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben sind, wie soll man daraus das vierte finden?** Es seyen die drey ersten Glieder a, b, p und für das vierte, welches gefunden werden soll, schreibe man q, so hat man a + q = b + p. Nun subtrahire man beyderseits a, so bekommt man q = b + p — a. Also wird das vierte Glied gefunden, **wenn man das zweyte und dritte zusammen addirt und von der Summe das erste subtrahirt.** Es seyen z. B. 19, 28, 13 die drey ersten Glieder, so ist die Summe des zweyten und dritten = 41, davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die arithmetische Proportion wird 19 — 28 = 13 — 22, oder 28 — 19 = 22 — 13, oder 28 — 22 = 19 — 13 seyn.

§. 397.

Wenn in einer arithmetischen Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drey Zahlen, welche also beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist, als die andere weniger der dritten, oder daß der Unterschied zwischen der ersten und andern so groß ist, als der Unterschied zwischen der andern und dritten. Solche 3 Zahlen sind 19, 15, 11, weil 19 — 15 = 15 — 11. Dergleichen Proportionen werden **stetige** genannt, da man hingegen diejenigen, wo die mittlern Glieder ungleich sind, wie bey den vorigen Beyspielen, unstetige Proportionen zu nennen pflegt.

§. 398.

Drey solche Zahlen schreiten in einer arithmetischen Progression fort, welche entweder steigt, wenn die zweyte um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Exempel 4, 7, 10, oder fällt, wenn die Zahlen um gleich viel kleiner werden als 9, 5, 1.

§. 399.

Es seyn die Zahlen a, b, c in einer arithmetischen Progression, so muß $a - b = b - c$ seyn; hieraus folget, bey der Gleichheit der mittlern und äußern Summe, $2b = a + c$. Nimmt man auf beyden Seiten a weg, so bekommt man $c = 2b - a$.

§. 400.

Wenn also von einer stetigen arithmetischen Proportion die zwey ersten Glieder gegeben sind, als a und b, so wird daraus das dritte gefunden, wenn man das zweyte verdoppelt und davon das erste subtrahirt. Es seyn 1 und drey die zwey ersten Glieder einer stetigen arithmetischen Proportion, so wird das dritte $= 2 . 3 - 1 = 5$ seyn, und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion $1 - 3 = 3 - 5$.

Zusatz. Da nach §. 399. in einer stetigen arithmetischen Proportion $2b = a + c$ ist, so findet man $b = \frac{a+c}{2}$, das heißt, die mittlere arithmetische Proportionalzahl, wird gefunden, wenn man die Summe aus dem ersten und letzten Gliede halbirt. Z. B. es sey 8 das erste und 14 das letzte Glied, so ist das mittlere $= \frac{8+14}{2} = 4 + 7 = 11$, und wirklich ist $8 - 11 = 11 - 14$.

§. 401.

§. 401.

Man kann nach der Regel des vorhergehenden §. weiter fortschreiten, und wie man aus dem ersten und zweyten Gliede das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solchergestalt die arithmetische Progression fortsetzen so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweyte, so wird das dritte $= 2b - a$; das vierte $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$; das fünfte $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$; das sechste $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$; das siebente $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ u. s. f. das nte $= (n-1)b - (n-2)a$.

III. Capitel.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine **arithmetische Progression** genannt.

Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u. s. f. eine arithmetische Progression, weil dieselben immer um eins steigen und diese Reihe, als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 u. s. f. ist auch eine arithmetische Progression, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

§. 403.

Die Zahl, um welche die Glieder einer arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, wird die Differenz oder der Unterschied genannt. Wenn also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, so kann man die arithmetische Progreßion so weit man will fortsetzen. Es sey z. B. das erste Glied = 2 und die Differenz = 3, so wird die steigende Progreßion seyn:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 u. s. f.

wo ein jedes Glied gefunden wird, wenn man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

§. 404.

Man pflegt über die Glieder einer solchen arithmetischen Progreßion die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. zu schreiben, damit man sogleich sehen könne, das wie vielste Glied ein jegliches sey, und die so darüber geschriebene Zahlen werden Zeiger oder Indices genannt. Das obige Exempel kommt daher also zu stehen:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
arith. Prog.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29 u. s. f.

woraus man sieht, daß 29 das zehnte Glied ist.

§. 405.

Es sey a das erste Glied und d die Differenz, so wird die arithmetische Progreßion folgende seyn:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$,	$a+7d$ u. s. f.

Hieraus kann man sogleich ein jedes Glied finden, ohne daß man erst alle vorhergehende zu wissen braucht, und dieses allein aus dem ersten Gliede a und der Differenz d. Also wird z. B. das 10te Glied seyn $= a + 9d$, das 100te $= a + 99d$, und auf eine allgemeine Art wird das nte Glied seyn: $a + (n - 1)d$.

§. 406.

Wenn die arithmetische Progreßion irgendwo abgebrochen wird, so muß man vorzüglich das erste und das letzte Glied merken, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied = a, die Differenz = d und die Anzahl der Glieder = n, so ist das letzte Glied = a + (n — 1) d. Dies wird also gefunden, wenn man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt. Man habe z. B. eine arithmetische Progression von 100 Gliedern, wovon das erste = 4 und die Differenz = 3, so wird das letzte Glied 99 . 3 + 4 = 301 seyn.

§. 407.

Hat man das erste Glied = a und das letzte = z, nebst der Anzahl der Glieder = n, so kann man daraus die Differenz = d finden. Denn da das letzte Glied z = a + (n — 1) d ist, so hat man, wenn man auf beiden Seiten subtrahirt, z — a = (n — 1) d. Wenn man also von dem letzten Gliede das erste subtrahirt, so hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder z — a ist das Product von (n — 1) in d. Man darf also nur z — a durch n — 1 dividiren, so bekommt man die Differenz $d = \frac{z-a}{n-1}$, woraus sich diese Regel ergiebt: man subtrahirt vom letzten Gliede das erste, den Rest theilt man durch die Anzahl der Glieder weniger eins, so bekommt man die Differenz; woraus man hernach die ganze Progression bestimmen kann.

§. 408.

Es hat z. B. einer eine arithmetische Progression von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26 ist, und von welcher die Differenz ge-

sucht

sucht werden soll. Man muß also das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren und den Rest 24 durch 9 — 1, das ist durch 8 dividiren, so bekommt man die Differenz = 3, und die Progression selbst wird seyn:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26.

Um ein anderes Beispiel zu geben, so sey das erste Glied 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, wovon die arithmetische Progression verlangt wird. Hier bekommt man zur Differenz $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$, und die verlangte Progression wird seyn:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
$1, 1\frac{1}{9}, 1\frac{2}{9}, 1\frac{3}{9}, 1\frac{4}{9}, 1\frac{5}{9}, 1\frac{6}{9}, 1\frac{7}{9}, 1\frac{8}{9}, 2.$

Noch ein Beispiel. Es sey das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz $\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1} = \frac{10\frac{1}{6}}{6} = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$, folglich wird die Progression seyn:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
$2\frac{1}{3}, 4\frac{1}{36}, 5\frac{13}{18}, 7\frac{5}{12}, 9\frac{1}{9}, 10\frac{29}{36}, 12\frac{1}{2}.$

§. 409.

Wenn ferner das erste Glied a und das letzte z, mit der Differenz d gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder n finden. Denn da $z - a = (n-1)d$, so dividire man beyderseits mit d und da bekommt man $\frac{z-a}{d} = n - 1$. Da nun n um eins größer ist als $n - 1$, so wird $n = \frac{z-a}{d} + 1$, folglich findet man die Anzahl der Glieder, wenn man den Unterschied zwischen dem ersten und letzten Gliede $z - a$ durch die Differenz dividirt und zum Quotienten $\frac{z-a}{d}$ noch eins addirt.

Es

Es sey z. B. das erste Glied = 4, das letzte = 100, und die Differenz = 12, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{100-4}{12} + 1 = 9$, und diese neun Glieder sind folgende:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Es sey das erste Glied = 2, das letzte = 6, und die Differenz = $1\frac{1}{3}$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{4}{1\frac{1}{3}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind:

1,	2,	3,	4.
2,	$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{2}{3}$,	6.

Es sey ferner das erste Glied = $3\frac{1}{3}$, das letzte $7\frac{2}{3}$, und die Differenz = $1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder = $\frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind:

1,	2,	3,	4.
$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{7}{9}$,	$6\frac{2}{9}$,	$7\frac{2}{3}$.

§. 410.

Es ist aber hier wohl zu merken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine ganze Zahl seyn muß. Wenn man also in obigem Beispiele für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Frage ungereimt gewesen.

Wenn folglich für $\frac{z-a}{d}$ keine ganze Zahl gefunden würde, so ließe sich diese Frage nicht auflösen, und man müßte antworten, daß die Frage unmöglich wäre. Daher muß sich bey dergleichen Fragen die Zahl $z - a$ durch d theilen lassen.

1. Zusatz. Soll endlich, wenn von einer arithmetischen Progression das letzte Glied z, die Differenz d, und die Anzahl der Glieder n gegeben wird, das erste Glied a gefunden werden, so ist da $a + (n-1)d = z$, auch $a = z - (n-1)d$, d. h. man findet das erste Glied *a*, wenn man das Product aus der Differenz *d* in die Zahl der Glieder

Glieder n weniger 1 von dem letzten Gliede abzieht. Es sey z. B. das letzte Glied $z = 100$, die Anzahl der Glieder $n = 9$, und die Differenz $d = 12$, so wird das erste Glied $a = 100 - (9 - 1)\,12 = 100 - 8 \cdot 12 = 4$ seyn, und dieses war auch in der ersten Progression §. 409 wirklich das erste Glied.

2. Zusatz. Was bisher von den steigenden arithmetischen Progressionen gesagt worden ist, läßt sich auch auf die fallenden anwenden, wenn man bey diesen das letzte Glied, wie das erste, und das erste, wie das letzte Glied einer steigenden Progression behandelt.

§. 411.

Bey einer jeden arithmetischen Progression sind also folgende vier Stücke zu betrachten:

I. das erste Glied a, II. das letzte Glied z,
III. die Differenz d, IV. die Anzahl der Glieder n,

welche so beschaffen sind, daß, wenn drey derselben bekannt sind, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:

I. Wenn a, d und n bekannt sind, so hat man $z = a + (n - 1)\,d$.

II. Wenn z, d und n bekannt sind, so hat man $a = z - (n - 1)\,d$.

III. Wenn a, z und n bekannt sind, so hat man $d = \frac{z - a}{n - 1}$.

IV. Wenn a, z und d bekannt sind, so hat man $n = \frac{z - a}{d} + 1$.

Zusatz. Für fallende Reihen ist a das letzte und z das erste Glied und die Differenz $= -d$, daher für solche Reihen $z = a - (n - 1)\,d$ und $a = z + (n - 1)\,d$, und $d = \frac{a - z}{n - 1}$ und $n = \frac{a - z}{d} + 1$. Daß bey fallenden Reihen die Differenz d negativ ist, entsteht bloß aus der Art, wie ein Glied aus dem vorhergehenden gemacht wird, in Vergleichung der Entstehung des eben so vielten Gliedes in einer steigenden Reihe von eben der Differenz. Bey dieser wird nemlich die Differenz zu dem vorhergehenden Glieder addirt, da hingegen bey jener Reihe solche abgezogen werden muß. Will man nun das Wort addiren beybehalten, so muß man die Differenz bey fallenden Reihen negativ setzen, denn eine negative Größe addiren, oder eine positive subtrahiren, giebt einerley Resultate. Daß d negativ wird, liegt also gar nicht in dem Begriff von Differenz, sondern in der Art, wie die Glieder der Progression gebildet werden sollen.

IV. Capitel.

Von der Summirung der arithmetischen Progressionen.

§. 412.

Wenn eine arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summe derselben zu suchen. Diese findet man, wenn man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig seyn würde, wenn die Progression aus sehr viel Gliedern besteht, so kann eine Regel gegeben werden, mit deren Hülfe diese Summe ganz leicht gefunden wird.

§. 413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied = 2, die Differenz = 3, das letzte Glied = 29, und die Anzahl der Glieder = 10 ist.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Hier ist nun die Summe des ersten und letzten Gliedes = 31, die Summe des zweyten und vorletzten Gliedes = 31, die Summe des dritten und dritten vom Ende = 31, die Summe des vierten und vierten vom Ende = 31 u. s. f., woraus man ersieht, daß immer zwey Glieder, die von dem ersten und letzten gleich weit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

§. 414.

§. 414.

Der Grund davon fällt auch so gleich in die Augen. Denn wenn das erste Glied = a gesetzt, das letzte = z, die Differenz aber = d wird, so ist die Summe des ersten und letzten = $a + z$. Hernach ist das zweyte Glied $a + d$ und das vorletzte = $z - d$, welche zusammen genommen $a + z$ ausmachen. Ferner ist das dritte Glied $a + 2d$ und das dritte vom Ende = $z - 2d$, welche zusammen auch $a + z$ betragen. Woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellet.

§. 415.

Um nun die Summe der obigen Progression zu finden, nemlich von $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$, so schreibe man eben diese Progression rückwärts darunter und addire Glied für Glied, wie folget:

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ \underline{29+26+23+20+17+14+11+8+5+2} \\ 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

Diese gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe ist offenbar zweymal so groß als die Summe der gegebenen Progression. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Progression, und also ist derselben Summe = $10 . 31 = 310$. Da nun diese Summe zweymal so groß ist, als die Summe der arithmetischen Progression, so wird die wahre Summe = 155 seyn.

§. 416.

Wenn man auf diese Art mit einer jeden arithmetischen Progression verfährt, wovon das erste Glied = a, das letzte = z, und die Anzahl der Glieder = n ist, indem man eben dieselbe Progression rückwärts

wärts darunter schreibt und Glied vor Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied $a + z$, deren Anzahl $= n$, folglich ist die Summe derselben $= n(a + z)$, welche zweymal so groß ist, als die Summe der Progression, daher ist die Summe der arithmetischen Progression selbst $= \frac{n(a+z)}{2}$.

§. 417.

Hieraus ergiebt sich nun folgende einfache Regel, um die Summe einer jeden arithmetischen Progression zu finden:

Man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summe der ganzen Progression anzeigen.

Oder welches dasselbe ist: man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch: man multiplicire die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder, so bekommt man die Summe der ganzen Progression.

§. 418.

Es ist nöthig, diese Regel mit einigen Beispielen zu erläutern. Es sey daher die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, bis 100 gegeben, von welchen die Summe gesucht werden soll. Diese wird nach der ersten Regel seyn $\frac{100 . 101}{2} = 50 . 101 = 5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlag-Uhr in 12 Stunden thue? Zu diesem Ende müssen die Zahlen 1, 2, 3 bis 12, zusammen addirt werden, die Summe wird also seyn $\frac{12 . 13}{2} = 6 . 13 = 78$.

Wollte man die Summe von eben dieser Reihe bis 1000 fortgesetzt wissen, so würde dieselbe seyn 500500; bis 10000 fortgesetzt, wird dieselbe = 50005000 seyn.

§. 419.

Frage. Einer kauft ein Pferd mit dieser Bedingung: für den ersten Husnagel zahlt er 5 Groschen, für den zweyten 8, für den dritten 11, und immer 3 Groschen mehr für einen jeden folgenden. Es sind aber in allem 32 Nägel, wie viel kostet ihm das Pferd?

Hier wird also die Summe von einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 5, die Differenz = 3, und die Anzahl der Glieder = 32 ist, gesucht.

Hier muß nun zuerst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regel (§. 406) gefunden wird $= 5 + 31 \cdot 3 = 98$, und hieraus ergiebt sich die gesuchte Summe $\frac{103 \cdot 32}{2} = 103 \cdot 16 = 1648$; also kostet das Pferd 1648 Groschen, oder 68 Rthl. 16 Gr.

§. 420.

Es sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summe der ganzen Progression gefunden werden soll; da nun das letzte Glied $z = a + (n-1)d$ seyn muß, so ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 2a + (n-1)d$, welche mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt, $2na + n(n-1)d$ giebt, daher die gesuchte Summe seyn wird $= na + \frac{n(n-1)}{2} d$.

Nach dieser Formel, weil in dem obigen Beispiel $a = 5$, $d = 3$, und $n = 32$ war, erhält man die Summe $5 \cdot 32 + \frac{31 \cdot 32 \cdot 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$ wie vorher.

§. 421.

Wenn die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. bis n zusammen addirt werden soll, so hat man, um diese Summe zu finden, das erste Glied = 1, das letzte = n und die Anzahl der Glieder, woraus die Summe gefunden wird $\frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Setzt man n = 1766, so wird die Summe aller Zahlen von 1 bis 1766 seyn = 883 . 1767 = 1560261.

§. 422.

Es sey die Progression der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. f. gegeben, welche bis auf n Glieder fortgesetzt ist, wovon die Summe verlangt wird.

Hier ist nun das erste Glied = 1, die Differenz = 2, die Anzahl der Glieder = n; daraus wird das letzte Glied $1 + (n - 1)2 = 2n - 1$ seyn; woraus man die gesuchte Summe = n^2 erhält.

Folglich darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multipliciren. Man mag also von dieser Progression so viel Glieder zusammen addiren als man will, so ist die Summe immer ein Quadrat, nemlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie es auch folgende Beispiele bestätigen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 u. s. f.
Prog.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19 u. s. f.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 u. s. f.

§. 423.

Es sey ferner das erste Glied = 1, die Differenz = 3 und die Anzahl der Glieder = n, so hat man diese Progression 1, 4, 7, 10 u. s. f., wovon das letzte Glied $1 + (n - 1)3 = 3n - 2$ seyn wird; daher die Summe des ersten und letzten Gliedes = $3n - 1$;

folglich die Summe der Progression $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$. Nimmt man $n = 20$, so ist die Summe $= 10 . 59 = 590$.

§. 424.

Es sey das erste Glied $= 1$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, so wird das letzte Glied $1 + (n-1)d$ seyn. Hierzu das erste addirt, giebt $2 + (n-1)d$, dies mit der Anzahl der Glieder multiplicirt, $2n + n(n-1)d$, daher die Summe der Progression $n + \frac{n(n-1)d}{2}$ seyn wird.

Wir wollen hier folgendes Täfelchen anhängen, worin der Buchstabe S die Summe der Progression anzeigt, und das erste Glied immer 1 ist,

wenn $d = 1$, so ist $S = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{nn+n}{2}$

$d = 2$ — $S = n + \frac{2n(n-1)}{2} = nn$

$d = 3$ — $S = n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$

$d = 4$ — $S = n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2nn-n$

$d = 5$ — $S = n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5nn-3n}{2}$

$d = 6$ — $S = n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3nn-2n$

$d = 7$ — $S = n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7nn-5n}{2}$

$d = 8$ — $S = n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4nn-3n$

$d = 9$ — $S = n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9nn-7n}{2}$

$d = 10$ — $S = n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn-4n$

u. s. f.

so daß, wenn $d = n$, $S = n + \frac{n^2(n-1)}{2}$ ist.

V. Ca-

V. Capitel.

Von den polygonal oder vieleckigen Zahlen.

§. 425.

Die Summation der arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen und deren Differenz entweder 1, 2, 3, oder eine andere beliebige ganze Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den polygonal oder vieleckigen Zahlen, welche entstehen, wenn man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

§. 426.

Setzt man die Differenz = 1, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht diese arithmetische Progression = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 u. s. f. Nimmt man nun außer dem ersten Gliede die Summe von zwey, drey, vier Gliedern u. s. f., so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen:
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 u. s. f. so daß 1 = 1, 3 = 1 + 2, 6 = 1 + 2 + 3, 10 = 1 + 2 + 3 + 4 u. s. f. Diese Zahlen werden triangular (triagonal) oder dreyeckige Zahlen genannt, weil sich so viel Punkte, als eine solche Zahl anzeigt, durch ein Dreyeck vorstellen lassen, wie aus folgendem zu ersehen:

1.	3.	6.	10.	15.
•	• •	• • •	• • • •	• • • • •
	•	• •	• • •	• • • •
		•	• •	• • •
			•	• •
				•

21. 28.

§. 427.

Bey einem jeden dieser Dreyecke sieht man vorzüglich darauf, wie viel Punkte in einer jeden Seite sind; bey dem ersten ist nur eins, bey dem zweyten 2, bey dem dritten 3, bey dem vierten 4, u. s. f. Also nach der Anzahl der Punkte in einer Seite, welche schlechthin die Seite genannt wird, verhalten sich die dreyeckigen Zahlen, oder die Anzahl aller Punkte, welche schlechthin ein Dreyeck genannt wird, folgendergestalt:

Seite
Dreyeck

Seite
Dreyeck

§. 428.

Hier kommt also die Frage vor, wie aus der gegebenen Seite das Dreyeck gefunden werden soll? Diese Frage läßt sich leicht beantworten, weil man hier nur nöthig hat, die oben (§. 421) gegebene

Regel

Regel von der Summirung der natürlichen Zahlen anzuwenden.

Denn es sey die Seite $= n$, so wird das Dreyeck $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . n$, deren Summe $= \frac{nn+n}{2}$, folglich wird das Dreyeck $\frac{nn+n}{2}$. Ist also $n = 1$, so wird das Dreyeck $= 1$.

Ist $n = 2$, so ist das Dreyeck $\frac{4+2}{2} = 3$.

$n = 3$ — — $\frac{9+3}{2} = 6$.

$n = 4$ — — $\frac{16+4}{2} = 10$ u. s. f.

Nimmt man $n = 100$, so wird das Dreyeck $= 5050$ u. s. f.

Anmerk. Herr v. Jaucourt hat 1762 zu Haag eine Tafel der Triagonalzahlen herausgegeben, welche für $n = 1, 2, 3$ - - - bis incl. 20000 berechnet ist. Diese Tafeln können sehr nützlich seyn, eine große Menge arithmetischer Operationen zu erleichtern, wie es der Herausgeber in einer sehr weitläuftigen Einleitung zeigt.

§. 429.

Diese Formel $\frac{n^2+n}{2}$ wird nun die Generalformel für alle dreyeckige Zahlen genannt: weil sich aus derselben für eine jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreyeckige Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also vorgestellet werden $\frac{n(n+1)}{2}$, welches zur Erleichterung der Rechnung dienet, weil allezeit entweder n oder $n + 1$ eine gerade Zahl ist und sich durch 2 theilen läßt.

Also wenn $n = 12$, so ist das Dreyeck $= \frac{12.13}{2} = 6.13 = 78$. Ist $n = 15$, so ist das Dreyeck $= \frac{15.16.}{2} = 15.8 = 120$ u. s. f.

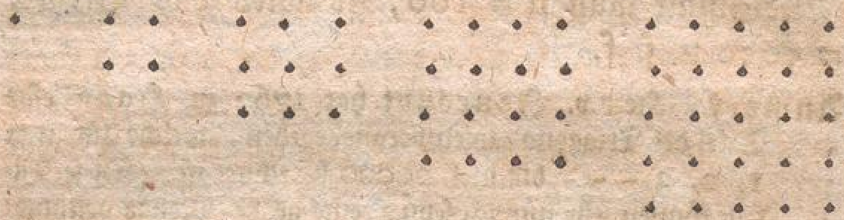
§. 430.

Setzt man die Differenz = 2, so hat man diese arithmetische Progression:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 u. s. f. wovon die Summen folgende Reihe ausmachen:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 u. s. f. Diese Zahlen werden quadrangular (tetragonal) oder viereckige Zahlen genannt, und sind eben diejenigen, welche oben (§. 115) Quadrate genannt worden. Es lassen sich nemlich so viel Punkte, als eine solche Zahl anzeigt, in ein Viereck bringen:

1, 4, 9, 16, 25,



36, 49,

§. 431.

Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks eben so viel Punkte enthält, als die Quadratwurzel davon anzeigt. Also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber, wenn die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Progression 1, 3, 5, 7 u. s. f. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben (§. 422) = n^2

$= n^2$ gefunden worden. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben (§. 115 u. f.) ausführlich gehandelt worden.

§. 432.

Setzt man in einer mit 1 anfangenden arithmetischen Progression die Differenz = 3 und nimmt gleicher Gestalt die Summen, so werden dieselben pentagonal oder fünfeckige Zahlen genannt, ob sich dieselben gleich nicht mehr so gut durch Punkte vorstellen lassen. Dieselben schreiten demnach folgendermaßen fort.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
arith. Prog.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176

u. s. f. und der Zeiger weiset die Seite eines jeden Fünfecks an.

Zusatz. Folgende Regel wird die wirkliche Construction der Polygonalzahlen sehr erleichtern: man zeichne anfangs ein kleines reguläres Polygon von so viel Seiten, als verlangt werden. Die Zahl der Seiten bleibt für eine und eben dieselbe Reihe von Polygonalzahlen, und ist gleich der um 2 vermehrten Differenz derjenigen arithmetischen Reihe, woraus jene Reihe entstanden ist. Nun wählt man einen Winkel dieses Polygons, um von ihm aus durch alle Winkelpunkte unbestimmte Linien zu ziehen, wovon aus geometrischen Gründen immer 3 weniger als das Polygon Seiten hat, Diagonalen sind. Auf eine der verlängerten Seiten des kleinen Polygons trage man alsdann die Seite dieses Polygons so oft, als man will. Durch diese solchergestalt erhaltenen Punkte ziehe man mit den Seiten des kleinen Polygons Parallelen; diese Parallelen theile man endlich in eben so viele gleiche Theile, als die zu ihnen gehörigen Diagonalen haben, so hat man die verlangte Construction.

Diese Regel ist ganz allgemein und gilt vom Triangel an bis zum Polygon von unendlich vielen Seiten. Folgende zwey Figuren werden diese Regel hinlänglich erläutern:

Di Theilung dieser Figuren in Dreyecke bietet noch viele merkwürdige Betrachtungen und artige Verwandlungen der allgemeinen Formel dar, durch welche man, wie in diesem Capitel gelehrt worden, die Polygonalzahlen ausdrückt; allein hier dürfen wir uns nicht dabey aufhalten.

§. 433.

Wenn also die Seite n gesetzt wird, so läßt sich jede fünfeckige Zahl durch die oben (§. 423) erklärte Formel $\frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$ ausdrücken. Wenn z. B. $n=7$, so ist das Fünfeck $\left(\frac{3.7-1}{2}\right) 7 = 70$. Will man die fünfeckige Zahl von der Seite 100 wissen, so setzt man $n = 100$ und bekommt 14950.

§. 434.

Setzt man die Differenz $=4$, so erhält man auf diese Art die hexagonal oder sechseckigen Zahlen, welche in folgender Ordnung fortschreiten:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
arith. Prog.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37.
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190.

Hier giebt der Zeiger wieder die Seite eines jeden Sechsecks an.

§. 435.

Wenn also die Seite n ist, so wird die sechseckige Zahl nach der (in §. 424) gegebenen Formel $= 2nn - n = n(2n-1)$, wobey zu merken ist, daß alle diese sechseckigen Zahlen zugleich dreyeckige Zahlen sind. Denn wenn man in diesen immer eine überspringt, so erhält man die sechseckige.

§. 436.

Auf gleiche Weise findet man die siebeneckigen, achteckigen, neuneckigen Zahlen u. s. f., von welchen wir die Generalformeln hier insgesammt hersetzen wollen. Wenn also die Seite n ist, so wird seyn

$$\text{das Dreyeck} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Viereck} = \frac{2n^2+0n}{2} = n^2$$

$$\text{V eck} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\text{VI eck} = \frac{4n^2-2n}{2} = 2n^2-n = n\,(2n-1)$$

$$\text{VII eck} = \frac{5n^2-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$$

$$\text{VIII eck} = \frac{6n^2-4n}{2} = 3n^2-2n = n(3n-2)$$

$$\text{IX. eck} = \frac{7n^2-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$$

$$\text{X eck} = \frac{8n^2-6n}{2} = 4n^2-3n = n(4n-3)$$

$$\text{XI eck} = \frac{9n^2-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$$

$$\text{XII eck} = \frac{10n^2-8n}{2} = 5n^2-4n = n(5n-4)$$

$$\text{XX eck} = \frac{18n^2-16n}{2} = 9n^2-8n = n(9n-8)$$

$$\text{XXV eck} = \frac{23n^2-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$$

$$m\,\text{eck} = \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$$

Man wird leicht einsehen, daß diese Tafel nur eine erweiterte von §. 424. ist.

§. 437.

Wenn also die Seite n ist, so hat man auf eine allgemeine Art die m eckige Zahl $= \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$ woraus man alle nur mögliche vieleckige Zahlen finden kann, deren Seite = n. Wollte man daraus

die

die zweyeckigen Zahlen finden, so würde $m = 2$ und dieselbe $= n$ seyn.

Setzt man $m = 3$, so wird die III eckige Zahl $= \frac{nn+n}{2}$

Setzt man $m = 4$, so wird die IV eckige Zahl $= nn$ u. s. f.

Zusatz. Die allgemeine Formel $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$ ist hier nach einem bey den besondern Formeln bemerkten Gesetz gefunden worden. Man findet solche aber unmittelbar durch folgende Schlüsse:

Der Buchstabe m sey die Zahl der Winkel, wovon das Vieleck benannt wird, so ist die Differenz der arithmetischen Reihe, aus welcher die gesuchte Polygonalzahl entsteht, $= m-2$, und n sey die Anzahl der Glieder dieser Reihe.

Da nun in jeder arithmetischen Reihe das letzte Glied $z = a+(n-1)d$ und $S = (a+z)\frac{n}{2}$, so ist in unserer obigen Reihe $a = 1$; $d = m-2$; $z = 1+(n-1)(m-2)$, also die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 2+(n-1)(m-2)$, und diese Summe mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt, giebt $\frac{(2+(n-1)m-2))n}{2} = \frac{(m-2)(n-1)n+2n}{2} = \frac{(m-2)(n^2-n)+2n}{2} = \frac{(m-2)n^2-(m-2)n+2n}{2} = \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$

Die zweyeckigen Zahlen zu finden, muß man $m = 2$ setzen, dieses giebt also $\frac{(2-2)n^2-(2-4)n}{2} = n$. Die arithmetische Progression, woraus diese zweyeckige Zahlen entstehen, wäre, da die Differenz $m-2 = 0$, und das erste Glied 1 ist, lauter Einzen. Diese zweyeckige Zahlen können nicht anders durch Punkte vorgestellt werden, als in einer geraden Linie, denn diese ihre zwey Endpuncte stellen die zwey Winkelpuncte vor, aber genau genommen, giebt es so wenig 2eckige Zahlen, als es eine 2seitige geradlinigte Figur giebt. Die kleinste Figur ist die, worin $m = 3$ ist.

§. 438.

Um diese Regel mit einigen Beispielen zu erläutern, so suche man die XXV eckige Zahl, deren Seite 36 ist. Man suche erstlich für die Seite n die XXV eckige Zahl; dieses geschiehet, indem man in der allgemeinen Formel $m = 25$ setzt, so wird dieselbe $= \frac{23n^2 - 21n}{2}$. Nun setze man $n = 36$, so bekommt man die gesuchte Zahl $= \frac{23.36^2 - 21.36}{2} = 14526$.

§. 439.

Frage. Einer hat ein Haus gekauft und wird gefragt, wie theuer? darauf antwortet er, die Zahl der Thaler, die er dafür bezahlet, sey die 365 eckige Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden, so wird $m = 365$, und also das 365eck von $n = \frac{363n^2 - 361n}{2}$. Nun ist $n = 12$, folglich das 365eck von $12 = \frac{363.12^2 - 361.12}{2}$ $= 23970$. Das Haus ist also mit 23970 Thaler bezahlt worden.

Zusatz. Euler hatte dieses Capitel überschrieben: Von den figurirten oder vieleckigen Zahlen. Warum wir das Wort figurirten weggelassen haben, wird aus folgendem erhellen.

Einige Algebraisten unterscheiden nicht ohne Grund figurirte und Polygonal-Zahlen. In der That entstehen auch die Zahlen, welche man gewöhnlich figurirte nennt, alle aus einer einzigen arithmetischen Progression, und jede Reihe dieser Zahlen wird gebildet, indem man die Glieder der vorhergehenden Reihe zusammen addirt.

Hingegen wird jede Reihe der Polygonalzahlen aus einer andern arithmetischen Progression gemacht; daher auch aufs strengste genommen nur eine einzige Reihe der figurirten Zahlen, zu gleicher Zeit eine Reihe von Polygonalzahlen ist. Eine aufmerksame Betrachtung der folgenden Tabelle wird einen jeden leicht davon überzeugen.

Figurirte Zahlen:

Beständige	Zahlen	—	1, 1, 1, 1, 1, 1 u. s. f.
Natürliche	—	—	1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. f.
Triagonal	—	—	1, 3, 6, 10, 15, 21 u. s. f.
Pyramidal	—	—	1, 4, 10, 20, 35, 56 u. s. f.
Trigonal-pyramidal.		—	1, 5, 15, 35, 70, 126 u. s. f.

u. s. f.

Poly-

Polygonalzahlen:

Differ. d. Reihe	Zahlen		
1	Trigonal	—	1, 3, 6, 10, 15 u. s. f.
2	Quadrat	—	1, 4, 9, 16, 25 u. s. f.
3	Pentagonal	—	1, 5, 12, 22, 35 u. s. f.
4	Hexagonal	—	1, 6, 15, 28, 45 u. s. f.

u. s. f.

Die Potenzen machen auch besondere Reihen von Zahlen aus. Die zwey ersten finden sich wieder in den figurirten Zahlen, und die 3te in den Polygonalzahlen; dieses wird man einsehen, indem man für a in der hier unten stehenden Tafel nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. setzt.

Potenzenzahlen.

a^0	—	—	—	1, 1, 1, 1, 1, u. s. f.
a^1	—	—	—	1, 2, 3, 4, 5, u. s. f.
a^2	—	—	—	1, 4, 9, 16, 25 u. s. f.
a^3	—	—	—	1, 8, 27, 64, 125, u. s. f.
a^4	—	—	—	1, 16, 81, 256, 625, u. s. f.

u. s. f.

Die Algebraisten des 16ten und 17ten Jahrhunderts haben sich sehr viel mit diesen verschiedenen Arten von Zahlen und ihren Beziehungen unter einander beschäftiget; sie haben hierbey sonderbare Veränderungen und Eigenschaften entdeckt; aber da ihr Nutzen nicht sehr groß ist, so übergeht man mit Recht diese Art von Untersuchungen in den heutigen Lehrbüchern der Mathematik.

VI. Capitel.

Von den geometrischen Verhältnissen.

§. 440.

Das geometrische Verhältniß zwischen zwey Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie vielmal die eine Zahl größer sey als die andere? und es wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt, daher denn der Quotient die Benennung des Verhältnisses anzeigt.

§. 441.

§. 441.

Es ist daher bey einem geometrischen Verhältnisse dreyerley zu betrachten. Erstlich, die erste der beyden gegebenen Zahlen, welche der Vorsatz oder das Vorderglied genannt wird. Zweytens, die andere derselben, welche der Nachsatz oder das Hinterglied heißt. Drittens, die Benennung oder Exponent des Verhältnisses, welche gefunden wird, wenn man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt, z. B. wenn zwischen den Zahlen 18 und 12 das Verhältniß angezeigt werden soll, so ist 18 der Vorsatz, 12 der Nachsatz, und der Exponent des Verhältnisses wird $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$ seyn, woraus man erkennt, daß der Vorsatz 18 den Nachsatz 12, einmal und noch $\frac{1}{2}$ mal in sich begreift.

§. 442.

Um das geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einander stehender Puncte, die zwischen dem Vorsatz und Nachsatz gesetzt werden.

Also a : b zeigt das Verhältniß zwischen a und b an, welches Zeichen, wie schon oben bemerkt worden, auch die Division anzuzeigen pflegt, und eben deswegen hier gebraucht wird, weil, um dieses Verhältniß zu erkennen, die Zahl a durch b getheilt werden muß. Dieses Zeichen wird mit Worten so ausgesprochen: a verhält sich zu b, oder schlechtweg a zu b.

§. 443.

Der Exponent oder Name eines solchen Verhältnisses wird daher durch einen Bruch vorgestellt, dessen Zähler der Vorsatz, der Nenner aber der Nachsatz ist. Um der Deutlichkeit willen aber muß man diesen Bruch immer auf seine kleinste Form brin-

gen,

gen, welches geschieht, wenn man den Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler theilet, wie oben geschehen, da der Bruch $\frac{18}{12}$ auf $\frac{3}{2}$ gebracht ist, indem man den Zähler und Nenner durch 6 getheilt hat.

§. 444.

Die Verhältnisse sind also nur in so fern unterschieden, als ihr Exponent verschieden ist, und es giebt daher so viel verschiedene Arten von Verhältnissen, als verschiedene Exponenten gefunden werden können.

Die erste Art ist nun unstreitig, wenn der Exponent 1 wird; und dieses geschieht, wenn die beyden Zahlen gleich sind, als $3:3$, $4:4$, $a:a$, wovon der Exponent 1 wird, und deswegen heißt diese Art das Verhältniß der Gleichheit.

Hierauf folgen diejenigen, deren Exponent eine ganze Zahl wird, als $4:2$, wo der Exponent 2 ist. Ferner $12:4$, wo der Exponent 3 ist, und $24:6$, wo der Exponent 4 ist u. s. f.

Hernach kommen solche vor, deren Exponent durch Brüche ausgedrückt wird. Als $12:9$, dessen Exponent $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist, $18:27$, dessen Exponent $\frac{2}{3}$ ist u. s. f.

§. 445.

Es sey nun a der Vorsatz, b der Nachsatz und der Exponent d, so haben wir schon gesehen, daß, wenn a und b gegeben ist, daraus $d = \frac{a}{b}$ gefunden werde.

Ist aber der Nachsatz b nebst den Exponenten d gegeben, so findet man daraus den Vorsatz $a = bd$, weil bd durch b dividirt, d giebt; endlich wenn der Vorsatz a nebst den Exponenten d gegeben ist, so

findet

findet man daraus den Nachsatz $b = \frac{a}{d}$. Denn wenn man den Vorsatz a durch diesen Nachsatz $\frac{a}{d}$ dividirt, so ist der Quotient d, das ist der Exponent.

§. 446.

Ein jedes Verhältniß $a : b$ bleibt unverändert, wenn man den Vorsatz und Nachsatz mit einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, weil der Exponent einerley bleibt. Denn wenn d der Exponent von $a : b$ ist, also daß $d = \frac{a}{b}$, so ist auch von diesem Verhältniß $na : nb$ der Exponent $\frac{a}{b} = d$; und von diesem Verhältniß $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ ist der Exponent gleichfalls $\frac{a}{b} = d$.

§. 447.

Wenn der Exponent in die kleinste Form gebracht worden, so läßt sich daraus das Verhältniß deutlich erkennen und mit Worten ausdrücken. Nemlich wenn der Exponent auf diesen Bruch $\frac{p}{q}$ gebracht worden, so sagt man $a : b = p : q$, das ist mit Worten: a zu b wie p zu q. Also da von diesem Verhältniß $6 : 3$ der Exponent $\frac{2}{1}$ oder 2 ist, so hat man $6 : 3 = 2 : 1$. Eben so sagt man $18 : 12 = 3 : 2$ und $24 : 18 = 4 : 3$ und ferner $30 : 45 = 2 : 3$. Läßt sich aber der Exponent nicht abkürzen, so wird auch das Verhältniß nicht deutlicher; denn wenn man $9 : 7 = 9 : 7$ sagt, so wird es nicht begreiflicher.

§. 448.

Wenn sich aber der Exponent auf sehr kleine Zahlen bringen läßt, so erhält man eine deutliche Erkenntniß von einem Verhältniß zwischen zwey sehr großen Zahlen. Also wenn man 288 : 144 = 2 : 1 sagt, so ist die Sache ganz deutlich, und wenn man fragt, wie sich 105 : 70 verhalte, so antwortet man, wie 3 : 2. Fragt man weiter, wie sich 576 : 252 verhalte, so antwortet man, wie 16 : 7.

§. 449.

Um also ein jedes Verhältniß auf das deutlichste darzustellen, so muß man den Exponenten desselben auf die kleinsten Zahlen zu bringen suchen, welches auf einmal geschehen kann, wenn die beyden Glieder des Verhältnisses durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt werden. Also wird das Verhältniß 576 : 252 auf einmal zu diesem 16 : 7 gebracht, wenn man die beyden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeinschaftlicher Theiler ist, dividirt.

§. 450.

Weil es nun hauptsächlich darauf ankommt, daß man von zwey gegebenen Zahlen ihren größten gemeinschaftlichen Theiler zu finden wisse, so soll dazu in dem folgenden Capitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

VII. Capitel.

Von dem größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer gegebenen Zahlen.

§. 451.

Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wenn Zähler und Nenner eines Bruchs so beschaffen sind, so läßt sich derselbe auch in keine kleinere Form bringen.

Also

Also sieht man, daß diese beyden Zahlen 48 und 35 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ungeachtet eine jede für sich ihre besondern Theiler hat. Deswegen kann auch das Verhältniß 48 : 35 nicht in kleinern Zahlen ausgedrückt werden, denn ob gleich sich beyde durch 1 theilen lassen, so werden doch dadurch die Zahlen nicht kleiner.

§. 452.

Wenn aber die Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so wird derselbe, und so gar der größte gemeinschaftliche Theiler durch folgende Regel gefunden:

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, durch den übrig bleibenden Rest dividire man ferner den vorhergehenden Divisor, durch den hier übrig bleibenden Rest dividire man wieder den letzt vorhergehenden Divisor, und auf solche Art verfahre man so lange, bis die Division aufgeht; da denn der letzte Divisor der größte gemeinschaftliche Theiler der beyden gegebenen Zahlen seyn wird.

Diese Untersuchung wird für die gegebenen Zahlen 576 und 252 also zu stehen kommen.

252 | 576 | 2
| 504 |

72 | 252 | 3
| 216 |

36 | 72 | 2
| 72 |

0

Hier ist also der größte gemeinschaftliche Theiler 36.

§. 453.

Es wird dienlich seyn, diese Regel durch einige

Beyspiele zu erläutern. Man suche daher den größten gemeinschaftlichen Theiler zwischen den Zahlen 504 und 312.

312 | 504 | 1
| 312 |
192 | 312 | 1
| 192 |
120 | 192 | 1
| 120 |
72 | 120 | 1
| 72 |
48 | 72 | 1
| 48 |
24 | 48 | 2
| 48 |
0

Also ist 24 der größte gemeinschaftliche Theiler, und deswegen läßt sich das Verhältniß 504 : 312 auf die bequemere Form 21 : 13 bringen.

§. 454.

Es seyen ferner diese zwey Zahlen 625 und 529 gegeben, für welche der größte gemeinschaftliche Theiler gesucht werden soll:

529 | 625 | 1
| 529 |
96 | 529 | 5
| 480 |
49 | 96 | 1
| 49 |
47 | 49 | 1
| 47 |
2 | 47 | 23
| 46 |
1 | 2 | 2
| 2 |
0

Hier ist also der größte gemeinschaftliche Theiler 1, und deswegen läßt sich das Verhältniß 625 : 529 auf keine leichtere Form bringen; oder dasselbe läßt sich durch keine kleinere Zahlen ausdrücken.

§. 455.

Es ist nun noch nöthig, den Beweis von dieser Regel zu geben. Es sey a die größere und b die kleinere der gegebenen Zahlen, d aber ein gemeinschaftlicher Theiler derselben. Da sich nun so wohl a als b durch d theilen lassen, so wird sich auch a — b dadurch theilen, auch a — 2b und a — 3b, und überhaupt a — nb.

Wenn a und b das gemeinschaftliche Maaß d haben, so ist $\frac{a\pm b}{d} = \frac{a}{d} \pm \frac{b}{d}$ auch eine ganze Zahl, weil die Summe oder Differenz zweyer ganzen Zahlen offenbar eine ganze Zahl seyn muß, daher ist $a\pm b$ auch durch d theilbar. Eben so schließt man, daß, da $a\pm b$ und b durch d theilbar ist, so muß es auch $a\pm b\pm b = a\pm 2b$ seyn u. s. f.

§. 456.

Dieses ist auch rückwärts wahr, und wenn die Zahlen b und a — nb sich durch d theilen lassen, so muß sich auch die Zahl a dadurch theilen lassen. Denn da sich nb theilen läßt, so würde sich a — nb nicht theilen lassen, wenn sich nicht auch a theilen ließe.

Es sey $\frac{nb}{d}$ = der ganzen Zahl q, so ist $\frac{a\pm nb}{d} = \frac{a}{d}\pm\frac{nb}{d} = \frac{a}{d}\pm q = p$, wo p ebenfalls eine ganze Zahl bedeutet, also muß $\frac{a}{d} = p \mp q$ seyn. Da nun p und q ganze Zahlen sind, so ist auch ihre Summe und ihre Differenz eine ganze Zahl, daher auch $\frac{a}{d}$ eine ganze Zahl seyn muß.

§. 457.

Ferner ist zu merken, daß, wenn d der größte gemeinschaftliche Theiler der beyden Zahlen b und a — nb ist, derselbe auch der größte gemeinschaftliche Theiler der Zahlen a und b seyn werde. Denn wenn für diese Zahlen a und b noch ein größerer gemeinschaftlicher Theiler als d statt fände, so würde derselbe auch ein gemeinschaftlicher Theiler von b und a — nb, folglich d nicht der größte seyn. Nun aber ist d der größte gemeinschaftliche Theiler von b und a — nb, also muß auch d der größte gemeinschaftliche Theiler von a und b seyn.

§. 458.

Diese drey Sätze vorausgesetzt, wollen wir nun die größere Zahl a durch die kleinere b, wie die Regel befiehlt, theilen, und für den Quotienten n annehmen, so erhält man den Rest a — nb, welcher immer kleiner ist als b. Da nun dieser Rest a — nb mit dem Divisor b eben denselben größten gemeinschaftlichen Theiler hat, als die gegebenen Zahlen a und b, so theile man den vorigen Divisor b durch diesen Rest a — nb, und da wird ebenfalls der herauskommende Rest mit dem nächst vorhergehenden Divisor eben denselben größten gemeinschaftlichen Theiler haben, und so immer weiter.

§. 459.

Man fährt aber auf diese Art fort, bis man auf eine solche Division kommt, welche aufgeht oder wo kein Rest übrig bleibt. Es sey daher p der letzte Divisor, welcher gerade etliche mal in seinem Dividendus

dendus enthalten ist, daher der Dividendus durch p theilbar seyn, folglich diese Form mp haben wird. Diese Zahlen nun p und mp lassen sich beyde durch p theilen, und haben ganz gewiß keinen größern gemeinschaftlichen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine größere, als sie selbst ist, theilen läßt. Daher ist auch der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorgeschriebenen Regel ist.

§. 460.

Wir wollen noch ein Exempel hersetzen und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinschaftlichen Theiler suchen, da dann die Rechnung folgende seyn wird:

```
1728|2304|1
    |1728|
    -------
      576|1728|3
         |1728|
         ------
            0
```

Also ist 576 der größte gemeinschaftliche Theiler, und das Verhältniß 1728 : 2304 wird auf dieses gebracht 3 : 4; folglich verhält sich 1728 : 2304 eben so wie 3 : 4.

VIII. Capitel.

Von den geometrischen Proportionen.

§. 461.

Zwey geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie beyde einerley Exponenten haben, und die Gleichheit zweyer solcher Verhältnisse wird eine geometrische Proportion genannt, und auf folgende Art geschrieben: a : b = c : d, mit Worten aber wird dieselbe also ausgesprochen: a verhält sich zu b wie sich c verhält zu d, oder a zu b wie c zu d. Ein Beyspiel einer solchen Proportion ist nun 8 : 4 = 12 : 6. Denn von dem Verhältniß 8 : 4 ist der Exponent 2, und eben diesen Exponenten hat auch das Verhältniß 12 : 6.

§. 462.

Wenn also a : b = c : d eine geometrische Proportion ist, so müssen die Exponenten auf beyden Seiten gleich, und folglich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ seyn; und umgekehrt, wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist a : b = c : d.

§. 463.

Eine geometrische Proportion besteht daher aus vier Gliedern, welche also beschaffen sind, daß das erste durch das zweyte dividirt eben so viel giebt, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folgt eine sehr wichtige Haupteigenschaft aller geometrischen Proportionen, welche darin besteht: daß das Product aus dem ersten und vierten Gliede immer eben so groß ist, als das Product aus dem zweyten und dritten. Oder kürzer: das Product der äußern Glieder ist dem Product der mittlern Gliedern gleich.

§. 464.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, so sey a : b = c : d eine geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Man multiplicire einen jeden dieser Brüche mit b,

so

so bekommt man $a = \frac{bc}{d}$; man multiplicire ferner auf beyden Seiten mit d, so bekommt man $ad = bc$. Nun aber ist ad das Product der äußern Glieder und bc das Product der mittlern, welche beyde Producte, folglich einander gleich sind.

§. 465.

Wenn umgekehrt vier Zahlen a, b, c, d, so beschaffen sind, daß das Product der äußern ad dem Product der mittlern bc gleich ist, so stehen dieselben in einer geometrischen Proportion. Denn da $ad = bc$, so dividire man beyderseits durch bd, und man bekommt $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; daher wird $a : b = c : d$.

§. 466.

Die vier Glieder einer geometrischen Proportion als $a : b = c : d$ können auf verschiedene Arten versetzt werden, so daß die Proportion bleibt. Es kommt nemlich nur darauf an, daß das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich bleibe, oder daß $ad = bc$. Also wird man haben, erstlich $b : a = d : c$, zweytens $a : c = b : d$, drittens $d : b = c : a$, viertens $d : c = b : a$.

§. 467.

Außer diesen lassen sich auch noch viele andere Proportionen aus einer gegebenen Proportion herleiten. Denn wenn $a : b = c : d$, so ist erstlich $a + b : a$ oder das erste + dem andern zum ersten, wie $c + d : c$, oder das dritte + dem vierten zum dritten, nemlich $a + b : a = c + d : c$, oder auch $a + b : b = c + d : d$. Denn in der ersten Proportion ist das Product aus den äußern Gliedern $ac + bc$, und das Product aus den mittlern $ac + ad$. Da nun aus der angenommenen Grundproportion $a : b$

$= c : d$ die Gleichheit der Producte bc und ad fließt, so erhellet auch hieraus die Gleichheit der Producte $ac + bc$ und $ac + ad$; folglich die Richtigkeit der Proportion $a + b : a = c + d : c$ (§. 465). Auf eine ähnliche Art kann man sich auch von der Richtigkeit der letztern Proportion $a + b : b = c + d : d$ überzeugen, weil die äußern Glieder in einander multiplicirt eben so viel geben, als das Product aus den mittlern Gliedern.

Hernach ist auch das erste — dem andern zum ersten, wie das dritte — dem vierten zum dritten; oder $a - b : a = c - d : c$.

Denn nimmt man die Producte der äußern und mittlern Glieder, so ist offenbar $ac - bc = ac - ad$, weil $ad = bc$. Ferner wird auch $a - b : b = c - d : d$, weil $ad - bd = bc - bd$ und $ad = bc$ ist

§. 468.

Alle Proportionen, die sich aus der Proportion $a : b = c : d$ herleiten lassen, können folgendergestalt auf eine allgemeine Art vorgestellt werden:

$$ma + nb : pa + qb = mc + nd : pc + qd.$$

Denn das Product der äußern Glieder ist

$$mpac + npbc + mqad + nqbd,$$

und weil $ad = bc$, so wird dasselbe

$$mpac + npbc + mqbc + nqbd.$$

Das Product der mittlern Glieder aber ist

$$mpac + mqbc + npad + nqbd,$$

und weil $ad = bc$, so wird dasselbe

$$mpac + mqbc + npbc + nqbd,$$

welches mit jenem einerley ist.

Zusatz. Wenn $m = q = 1$ und $n = p = 0$, so wird aus obiger Proportion folgende:

$$a : b = c : d.$$

Wenn $m = n = q = 1$ und $p = 0$, so entstehet folgende Proportion:

$$a + b : b = c + d : d.$$

So

So würde man alle besondere Proportionen aus jener allgemeinen ableiten können, wobey man merken muß, daß hier das Zeichen + weiter nichts als Hinzufügung der Größen bedeuten soll, übrigens können allerdings diese hinzugefügten Größen negativ seyn, so daß in diesem letzten Fall die Proportion $a + b : b = c + d : d$ in folgende verwandelt: $a - b : b = c - d : d$ werden kann.

§. 469.

Also kann man aus einer gegebenen Proportion, als z. B. $6 : 3 = 10 : 5$, unendlich viel andere herleiten, wovon wir nur einige hersetzen wollen:

1) $3 : 6 = 5 : 10$.

2) $6 : 10 = 3 : 5$.

3) $(3 + 6) : 6 = (5 + 10) : 10$ oder $9 : 6 = 15 : 10$, folgt aus No. 1.

4) $(6 - 3) : 3 = (10 - 5) : 5$ oder $3 : 3 = 5 : 5$, folgt aus $6 : 3 = 10 : 5$.

5) $(3 + 6) : 3 = (5 + 10) : 5$ oder $9 : 3 = 15 : 5$, folgt aus $6 : 3 = 10 : 5$.

6) $9 : 15 = 3 : 5$, folgt aus No. 5.

§. 470.

Da in einer geometrischen Proportion das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich ist, so kann man, wenn die drey ersten Glieder bekannt sind, aus denselben das vierte finden. Es seyen die drey ersten Glieder $24 : 15 = 40$ zu . . . Denn da hier das Product der mittlern 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten, das ist mit 24 multiplicirt, auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und da wird der Quotient das gesuchte vierte Glied 25 geben. Daher ist die Proportion $24 : 15 = 40 : 25$. Und wenn allgemein die drey ersten Glieder $a : b = c : \ldots$ sind, so setze man für das unbekannte vierte Glied den Buchstaben d, und da $ad = bc$ seyn muß, so dividire man

beyder-

beyderseits durch a und man wird $d = \frac{bc}{a}$ bekommen; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$; woraus sich die allgemeine Regel herleiten läßt, daß man die vierte geometrische Proportionalzahl findet, wenn man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt und das Product durch das erste Glied dividirt.

§. 471.

Hierauf beruhet nun der Grund der in allen Rechenbüchern so berühmten Regeldetri, weil darin aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer geometrischen Proportion stehet, also daß sich die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten.

§. 472.

Hierbey sind noch einige besondere Umstände zu bemerken, als: wenn zwey Proportionen einerley erstes und drittes Glied haben, wie in diesen $a : b = c : d$ und $a : f = c : g$, so werden auch die zweyten den vierten proportional seyn, es wird sich nemlich verhalten $b : d = f : g$; denn da aus der ersten $a : c = b : d$, und aus der andern $a : c = f : g$ folgt, so sind die Verhältnisse $b : d$ und $f : g$ einander gleich, weil ein jedes dem Verhältnisse $a : c$ gleich ist. Also da $5 : 100 = 2 : 40$ und $5 : 15 = 2 : 6$, so folgt daraus, daß $100 : 40 = 15 : 6$.

§. 473.

Wenn aber zwey Proportionen so beschaffen sind, daß sich einerley mittlere Glieder darin befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten, wie die vierten. Wenn nemlich $a : b = c : d$ und

$f : b =$

$f : b = c : g$, so wird daraus $a : f = g : d$ folgen. Es sey z. B. diese Proportion gegeben: $24 : 8 = 9 : 3$ und $6 : 8 = 9 : 12$, so wird daraus folgen $24 : 6 = 12 : 3$. Der Grund davon ist offenbar; denn die erste giebt $ad = bc$ und die zweyte $fg = bc$, folglich wird $ad = fg$, und $a : f = g : d$, oder $a : g = f : d$.

§. 474.

Aus zwey gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wenn man die ersten und die zweyten, die dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen $a : b = c : d$ und $e : f = g : h$ entstehet durch die Zusammensetzung diese: $ae : bf = cg : dh$. Denn nach der ersten Proportion ist $ad = bc$ und aus der zweyten folgt $eh = fg$, also wird auch $adeh = bcfg$ seyn. Nun aber ist $adeh$ das Product der äußern, und $bcfg$ das Product der mittlern Glieder in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

§. 475.

Es seyen z. B. diese zwey Proportionen gegeben: $6 : 4 = 15 : 10$ und $9 : 12 = 15 : 20$, so giebt die Zusammensetzung derselben folgende Proportion:

$6.9 : 4.12 = 15.15 : 10.20$,

das ist $54 : 48 = 225 : 200$,

oder $9 : 8 = 9 : 8$.

§. 476.

Zuletzt ist hier noch zu merken, daß, wenn zwey Producte einander gleich sind, als $ad = bc$, daraus wieder eine geometrische Proportion gebildet werden kann. Es verhält sich nemlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweyten, wie der andere Factor des zweyten zum andern des ersten.

Es

Es wird daher $a : c = b : d$ seyn. Da z. B. $3 . 8 = 4 . 6$, so folgt daraus diese Proportion: $8 : 4 = 6 : 3$ oder $3 : 4 = 6 : 8$, und da $3 . 5 = 1 . 15$, so bekommt man $3 : 15 = 1 : 5$ oder $5 : 1 = 15 : 3$ oder $3 : 1 = 15 : 5$.

IX. Capitel.

Anmerkungen über den Nutzen der Proportionen.

§. 477.

Diese Lehre ist in dem gemeinen Leben und im Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann. Die Preise und Waaren sind einander immer proportional und bey den verschiedenen Geldsorten kommt alles darauf an, ihre Verhältnisse zu einander zu bestimmen. Dieses wird dazu dienen, daß die vorgetragene Lehre besser erläutert und zum Nutzen angewendet werden kann.

§. 478.

Will man das Verhältniß zwischen zwey Münzsorten, z. B. zwischen einem Louisd'or und einem Ducaten erforschen, so muß man sehen, wie viel diese Stücke nach einerley Münzsorte gelten. Ein Louisd'or gilt in Conventionsgelde 5 Thaler, und ein Ducaten 2 Thaler 20 Groschen, d. i. $2\frac{5}{6}$ Thaler. Hieraus erhellt folgende Proportion:

1 Louisd'or : 1 Ducaten = 5 Thl. : $2\frac{5}{6}$ Thl.

Wenn man nun, um den Bruch wegzuschaffen, die letzten beyden Glieder dieser Proportion mit 6 multiplicirt, so erhält man:

1 Louis-

1 Louisd'or : 1 Ducaten = 30 : 17.

Eben dieses Verhältniß würde man auch bekommen haben, wenn man die beyden Münzsorten durch Groschen ausgedrückt hätte. Denn da 5 Thl. = 120 Groschen und 2 Thl. 20 Groschen = 68 Groschen, so hat auch folgende Proportion ihre Richtigkeit:

1 L. : 1 D. = 120 : 68,

d. i. wenn man mit 4 dividirt = 30 : 17.

Durch Hülfe dieses Verhältnisses, nach welchem 17 Louisd'or gerade 30 Ducaten gleich gelten, (weil das Product der äußern Glieder dem Producte der mittlern gleich seyn muß) läßt sich also ohne Schwierigkeit eine gegebene Summe Ducaten in Louisd'or und umgekehrt eine Menge Louisd'or in Ducaten verwandeln. Denn fragt man z. B. wie viel 1000 Louisd'or in Ducaten betragen, so darf man nur folgendergestalt schließen:

17 L. : 1000 L. = 30 D. : x D.

Das vierte Glied aber, nemlich x Ducaten ist:

$\frac{30 . 1000}{17} = 1764\frac{12}{17}$ Ducaten (§. 470).

Fragt man aber, wie viel 1000 Ducaten in Louisd'or betragen, so setzt man diese Regeldetri:

30 D. : 1000 D. = 17 L. : x L.

also x Louisd'or = $\frac{17 . 1000}{30}$ = $566\frac{2}{3}$ Louisd'or.

§. 479.

In Petersburg ist der Werth eines Ducaten sehr veränderlich und beruhet auf dem Wechselcours, wodurch der Werth eines Rubels in holländischen Stübern bestimmt wird, deren 105 einen Ducaten ausmachen.

Wenn also der Cours 45 Stüber ist, so hat man diese Proportion: 1 Rbl. : 1 D. = 45 : 105 = 3 : 7, und daher diese Vergleichung: 7 Rbl. =

3 Duc.

3 Duc. Hieraus kann man finden, wie viel ein Ducaten in Rubel betrage: denn 3 D. : 7 Rbl. = 1 D. : . . . Antwort $2\frac{1}{3}$ Rubel. Ist aber der Cours 50 Stüber, so hat man diese Proportion 1 Rbl. : 1 D. = 50 : 105 = 10 : 21, und daher diese Vergleichung: 21 Rbl. = 10 Duc. Hieraus wird 1 Duc. = $2\frac{1}{10}$ Rubel. Ist aber der Cours nur 44 Stüber, so hat man 1 Rubel : 1 Duc. = 44 = 105, und also 1 Duc. = $2\frac{17}{44}$ Rbl. = 2 Rbl. $38\frac{7}{11}$ Cop.

§. 480.

Auf eben diese Art kann man auch mehr als zwey verschiedene Münzsorten unter sich vergleichen, welches bey Wechseln häufig geschieht. Um davon ein Beyspiel zu geben, so soll jemand von Petersburg 1000 Rubel nach Berlin übermachen, und verlangt daher zu wissen, wie viel diese Summe zu Berlin in Ducaten betragen werde. Angenommen, daß der Cours in Petersburg $47\frac{1}{2}$ Stüber (nemlich ein Rbl. macht $47\frac{1}{2}$ Stüber holländisch). Hernach in Holland machen 20 Stüber einen Fl. holl. Ferner $2\frac{1}{2}$ Fl. holl. machen einen Species-Thl. holl. Ferner ist der Cours von Holland nach Berlin 142, das ist für 100 Spec. Thl. zahlt man in Berlin 142 Thl. Endlich gilt 1 Duc. in Berlin 3 Thl.

§. 481.

Um diese Frage aufzulösen, so wollen wir erstlich Schritt vor Schritt gehen. Wir fangen also bey den Stübern an, und da 1 Rbl. = $47\frac{1}{2}$ Stüber, oder 2 Rbl. = 95 Stb., so setzt man: 2 Rbl. : 95 Stb. = 1000 . . . Antwort: 47500 Stüber. Ferner gehen wir weiter und setzen 20 Stb. : 1 Fl. = 47500 Stb. . . . Antwort: 2375 Fl.

Ferner

Ferner da $2\frac{1}{2}$ Fl. = 1 Spec. Thl., das ist, da 5 Fl. = 2 Sp. Thaler, so setzt man 5 Fl. : 2 Sp. Thl. = 2375 Fl. zu . . . Antwort: 950 Sp. Thl.

Hierauf kommen wir auf berliner Thl. nach dem Cours zu 142. Also 100 Sp. Thl. : 142 Thl. = 950 . . . Antwort: 1349 Thl.

Nun gehen wir endlich zu den Ducaten und setzen also: 3 Thl. : 1 Ducaten = 1349 Thl. zu . . . Antwort: $449\frac{2}{3}$ Ducaten.

§. 482.

Um diese Rechnungsart noch mehr zu erläutern, so wollen wir annehmen, der Banquier zu Berlin mache Schwierigkeit diese Summe zu bezahlen, unter einem oder dem andern Vorwand, was es auch für einer seyn mag, und lasse sich hiezu nur durch die Bewilligung eines Abzugs von 5 Procent bewegen. Dieses ist aber so zu verstehen, daß er anstatt 105 nur 100 bezahlt, daher muß noch diese Proportion hinzugefügt werden: 105 : 100 = $449\frac{2}{3}$ zu . . . . Giebt also $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

§. 483.

Zur Auflösung dieser Frage wurden nun sechs Rechnungen nach der Regeldetri erfordert; man hat aber Mittel gefunden, diese Rechnungen durch Hülfe der sogenannten Kettenregel sehr abzukürzen. Um diese zu erklären, so wollen wir von den sechs obigen Rechnungen die zwey Vordersätze betrachten und hier vor Augen legen:

I.) 2 Rbl. : 95 Stüb.	II. 20 Stüb. : 1 Fl. holl.
III.) 5. Fl. holl. : 2 Sp. Thl.	IV. 100 Sp. Thl. : 142 Thl.
V.) 3. Thl. : 1 Sp. Ducaten	VI.) 105 Duc. : 100 Duc.

Wenn wir nun diese Rechnungen betrachten, so finden wir, daß wir die gegebene Summe immer durch die zweyten Sätze multiplicirt und durch die ersten dividirt haben; daraus zeigt sich, daß man eben dieses finden werde, wenn man die gegebene Summe auf einmal mit dem Product aller zweyten multiplicirt und durch das Product aller ersten Sätze dividirt; oder wenn man diese einzige Regeldetri macht: wie sich das Product aller ersten Sätze verhält zu dem Producte aller zweyten Sätze, also verhält sich die gegebene Anzahl Rubel zu der Anzahl Ducaten, die in Berlin bezahlt wird.

§. 484.

Diese Rechnung wird noch mehr abgekürzt, wenn sich irgend ein erster Satz gegen irgend einen zweyten Satz aufheben läßt, da man denn dieselben Sätze ausstreicht und an ihrer Stelle die Quotienten setzt, welche man durch die Aufhebung erhält. Auf diese Art wird obiges Exempel also zu stehen kommen:

Thl.	$\cancel{2}$.	19 $\cancel{95}$ St. holl. Cur.	1000 Thl.
	$\cancel{20}$.	1 holl. Fl.	
	$\cancel{5}$.	$\cancel{2}$ Sp. Thl.	
	100.	142 Thl.	
	3.	1 Duc.	
	$\cancel{105}$. 21	$\cancel{5}$, $\cancel{100}$ Duc.	

$63\cancel{00} : 2698 = 10\cancel{00}$ zu . . .

7) 26980

9) 3854 (2

428 (2 Antwort: $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

§. 485.

Wenn man die Kettenregel gebrauchen will, so muß man folgende Ordnung beobachten: man fängt mit eben der Münzsorte an, von welcher die Frage ist, und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit welcher das folgende Verhältniß wieder anfängt, um diese Münzsorte mit einer dritten zu vergleichen, so daß ein jedes Verhältniß mit eben der Münzsorte anfängt, mit welcher das vorige aufgehört, und so fährt man fort, bis man auf diejenige Sorte kömmt, in welcher die Antwort stehen soll; zuletzt werden noch die Spesen oder Unkosten berechnet.

§. 486.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Beyspiele hersetzen.

Wenn die Ducaten in Hamburg 1 p. C. besser sind als 2 Thl. B° (das ist, wenn 50 Duc. nicht 100, sondern 101 Thl. B° machen) und der Cours zwischen Hamburg und Königsberg 119 Gr. poln. (das ist, 1 Thl. B° macht 119 Gr. poln.) wie viel betragen 1000 Ducaten in Fl. pol. (30 Gr. pol. machen 1 Fl. pol.)

Duc. 1 : 7 Thl. B° 1000 Duc.
$\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}$,50 : 101 Thl. B°
1 : 119 Gr. pol.
30 : 1 Fl. pol.

15$\cancel{0}\cancel{0}$ 12019 = 10$\cancel{0}\cancel{0}$ Duc. zu . . .
3) 120190
5) 40063 (1
8012 (3 Antwort: 8012 $\frac{2}{3}$ Fl. pol.

§. 487.

Noch zu mehrerer Abkürzung kann die Fragezahl über die zweyte Reihe gesetzt werden, da denn das Product der zweyten Reihe, durch das Product der ersten dividirt, die verlangte Antwort giebt.

Beyspiel: Leipzig läßt aus Amsterdam Ducaten kommen, welche daselbst 5 Fl. 4 St. Courant gelten (das ist, ein Duc. gilt 104 St. oder 5 Duc.

machen 26 Fl. holl.) Wenn nun Agio di B° in Amsterdam 5 p. C. (das ist 105 Cour. macht 100 B°) und der Wechselcours von Leipzig nach Amsterdam in B° $133\frac{1}{4}$ p. C. (das ist für 100 Thl. zahlt man in Leipzig $133\frac{1}{4}$ Thl.). Endlich 2 Thl. holl. 5 Fl. holl. thun, wie viel sind nach diesen Coursen für solche 1000 Ducaten in Leipzig an sächsischen Gelde zu bezahlen.

		~~5~~, ~~1000~~ Duc.
Duc. ~~5~~	:	26 Fl. holl. Cour.
~~105~~, 21	:	4, ~~20~~, ~~100~~ Fl. holl. B°
~~5~~	:	~~2~~ Thl. holl. B°
~~400~~, ~~2~~	:	533 Thl. in Leipzig
21	:	3)55432 (1
		7)18477 (4
		2639

Antwort: $2639\frac{13}{21}$ Thl.
oder 2639 Thl. 15 gute Grsch.

X. Capitel.

Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

§. 488.

Zwey oder mehr Verhältnisse werden zusammengesetzt, wenn man sowohl die Vordersätze als die Hintersätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdann sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beyden Producten aus den zwey oder mehr gegebenen Verhältnissen zusammengesetzt sey.

Z. B. aus den Verhältnissen a : b, c : d, e : f entsteht durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß: ace : bdf.

§. 489.

Da ein Verhältniß einerley bleibt, wenn man seine beyden Glieder durch einerley Zahl dividirt oder abkürzt, so kann man die obige Zusammensetzung sehr erleichtern, wenn man die Vordersätze gegen die Hintersätze aufhebt oder abkürzt, wie schon im vorigen Capitel geschehen ist.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnissen wird das daraus zusammengesetzte solcher Gestalt gefunden.

Die gegebenen Verhältnisse sind:

12 : 25, 28 : 33 und 55 : 56

$$\begin{array}{lcl} \cancel{12},\ \cancel{4},\ 2 & : & 5\ \ \cancel{25} \\ \cancel{28} & : & \cancel{3},\ \cancel{33} \\ \cancel{55},\ \cancel{8} & : & \cancel{2},\ \cancel{56} \\ \hline 2 & : & 5 \end{array}$$

Also erhält man durch die Zusammensetzung das Verhältniß 2 : 5.

§. 490.

Eben dieses findet auch auf eine allgemeine Art bey den Buchstaben statt; und es ist besonders der Fall merkwürdig, wo immer ein Vordersatz dem vorigen Hintersatz gleich ist. Also wenn die gegebenen Verhältnisse sind:

$$\begin{array}{ccc} a & : & b \\ b & : & c \\ c & : & d \\ d & : & e \\ e & : & a \\ \hline \end{array}$$

so ist das zusammengesetzte Verhältniß wie 1 : 1.

§. 491.

Um den Nutzen dieser Lehre zu zeigen, so bemerke man, daß zwey viereckige Felder unter sich ein Verhältniß haben, welches aus den Verhältnissen ihrer Längen und ihrer Breiten zusammengesetzt ist.

Es heißen z. B. zwey solche Felder A und B. Von jenem sey die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Von diesem sey die Länge 360 Fuß und die Breite 100 Fuß, so ist das Verhältniß der Länge wie 500 : 360 und der Breite wie 60 : 100.

$$\begin{array}{ccc} \cancel{500}\ 5 & : & 6,\ \cancel{360} \\ \cancel{60} & : & \cancel{100} \\ \hline 5 & : & 6 \end{array}$$

Also verhält sich das Feld A zu dem Felde B wie 5 zu 6.

§. 492.

Ein anderes Beyspiel. Das Feld A sey 720 Fuß lang und 88 Fuß breit; das Feld B aber sey 660 Fuß lang und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwey Verhältnisse zusammensetzen:

$$\begin{array}{lccc} \text{Verhältniß der Längen} & \cancel{720},\ \cancel{8} & : & 15,\ \cancel{60},\ \cancel{660} \\ \text{Verhältniß der Breiten} & \cancel{88}\ \cancel{8},2 & : & \cancel{90} \\ \cline{2-4} & 16 & : & 15 \end{array}$$

Und dieses ist das Verhältniß der Felder A und B.

§. 493.

Um ferner den Raum oder Inhalt zweyer Zimmer gegen einander zu vergleichen, so ist bekannt, daß ihr Verhältniß aus dreyen zusammengesetzt ist, nemlich aus dem Verhältniß der Länge, der Breite und der Höhe. Es sey z. B. ein Zimmer A, dessen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß und die Höhe = 14 Fuß. Von einem andern Zimmer B aber sey die Länge = 42 Fuß, die Breite = 24 Fuß und die Höhe = 10 Fuß, so sind die drey Verhältnisse:

der

der Länge 36, 6, 3 : 42, 6
der Breite 16, 2, : 24, 3
der Höhe 14, 2, : 10, 5

4 : 5

Also verhält sich der Inhalt des Zimmers A zu dem Inhalt des Zimmers B wie 4 zu 5.

§. 494.

Wenn die Verhältnisse, welche man auf diese Art zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen ~~hen~~ daraus vervielfältigte Verhältnisse. Nemlich aus zwey gleichen entsteht ein doppeltes oder quadratisches Verhältniß; aus drey gleichen ein dreyfaches oder cubisches u. s. f. Also aus den Verhältnissen a : b und a : b ist das zusammengesetzte Verhältniß $a^2 : b^2$; daher sagt man, die Quadrate stehen in einem doppelten Verhältniß ihrer Seiten. Und aus dem Verhältniß a : b dreymal gesetzt, entsteht das Verhältniß $a^3 : b^3$, daher sagt man, daß die Cubi ein dreyfaches Verhältniß ihrer Seiten haben.

§. 495.

In der Geometrie wird gezeigt, daß zwey kreisrunde Plätze in dem doppelten Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen, d. h. daß sie sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten.

Es sey ein solcher Platz A, dessen Durchmesser = 45 Fuß; der Durchmesser eines andern cirkelrunden Platzes B aber sey = 30 Fuß, so wird sich jener Platz zu diesem wie 45. 45 zu 30. 30 verhalten, oder ihr Verhältniß ist aus folgenden zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt:

45, 9, 3 : 30, 6, 2
45, 9, 3 : 30, 6, 2

9 : 4

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

§. 496.

Ferner wird auch in der Geometrie bewiesen, daß sich die Inhalte zweyer Kugeln, wie die Cubiczahlen ihrer Durchmesser verhalten. Wenn also der Durchmesser einer Kugel A ein Fuß, und einer andern Kugel B zwey Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel A sich zum Inhalt der Kugel B wie $1^3 : 2^3$ oder wie $1 : 8$ verhalten.

Wenn also diese Kugeln aus einerley Materie bestehen, so wird die Kugel B achtmal mehr wiegen, als die Kugel A.

§. 497.

Hieraus kann man das Gewicht der Kanonenkugeln aus ihren Durchmessern finden, wenn man nur von einer das Gewicht hat. Es sey z. B. das Gewicht einer Kugel A, 5 Pfund und ihr Durchmesser $= 2$ Zoll; man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel B, deren Durchmesser $= 8$ Zoll ist. Hier hat man nun diese Proportion $2^3 : 8^3 = 5 : x$. Das Gewicht x, d. i. der Kugel B, beträgt also 320 ℔. Von einer andern Kugel C aber, deren Durchmesser $= 15$ Zoll, wird das Gewicht gefunden:

$2^3 : 15^3 = 5 : x$. Antwort: $2109\frac{3}{8}$ ℔ $= x$.

§. 498.

Sucht man das Verhältniß zweyer Brüche, als $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, so kann dasselbe immer durch ganze Zahlen ausgedrückt werden; denn man darf nur beyde Brüche mit bd multipliciren, so kommt dieses Verhältniß $ad : bc$ heraus, welches jenem gleich ist, daher entsteht folgende Proportion $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Läßt sich nun ad gegen bc noch abkürzen, so wird das Verhältniß noch leichter. Also $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15 . 36 : 24 . 25 = 9 : 10$.

§. 499.

Es wird ferner gefragt, wie sich diese Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gegen einander verhalten; hier ist sogleich erwiesen, daß sich $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ wie $b : a$ verhält, welches mit Worten also ausgesprochen wird: daß sich zwey Brüche, deren Zähler 1 ist, unter sich umgekehrt, wie ihre Nenner verhalten. Dieses gilt auch von zweyen Brüchen, welche gleiche Zähler haben. Denn da $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, so verhalten sie sich gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwey Brüche gleiche Nenner, als $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zähler, nemlich wie $a : b$. Also ist $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$ und $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ oder $2 : 3$.

§. 500.

Bey dem freyen Fall der Körper bemerkt man, daß in einer Secunde ein Körper 15 par. Fuß tief herab falle, in zwey Secunden aber falle er durch eine Höhe von 60 Fuß, und in drey Secunden 135 Fuß, daraus hat man nun geschlossen, daß sich die Höhen verhalten, wie die Quadrate der Zeiten; und also auch rückwärts die Zeiten, wie die Quadratwurzeln aus den Höhen.

Fragt man nun, wie viel Zeit ein Stein brauche, um aus einer Höhe von 2160 Fuß herunter zu fallen, so ist $15 : 2160 = 1$: Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst $= \sqrt{144} = 12$ Secunden.

§. 501.

Man fragt ferner, wie tief ein Stein in einer Stunde herunter fallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Man sagt also: wie die Quadrate der Zeiten, das ist wie $1^2 : 3600^2$, also verhält sich die gegebene Höhe = 15 Fuß zu der gesuchten Höhe

$$1 : 12960000 = 15 \text{ zu } \ldots$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 64800000 \\ 1296 \\ \hline 194400000 \end{array}$$

Antwort: 194400000 Fuß.

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine deutsche Meile, so wird diese Höhe 8100 Meilen seyn, welche Höhe größer ist als viermal die ganze Dicke der Erde.

§. 502.

Eine gleiche Bewandniß hat es mit dem Preis der Edelsteine, welcher sich nicht nach ihrem Gewicht selbst, sondern nach einem größern Verhältniß richtet. Bey den Diamanten gilt diese Regel: der Preis verhält sich, wie das Quadrat des Gewichts, oder das Verhältniß der Preise ist dem doppelten Verhältnisse des Gewichts gleich. Sie werden nun nach einem Gewicht, welches ein Karath genannt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wenn nun ein Diamant von einem Karath zwey Thlr. gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so vielmal mehr gelten, als das Quadrat von 100 größer ist, wie das Quadrat von 1. Also muß die Regeldetri so gesetzt werden:

$1^2 : 100^2 = 2$ Thlr. . . .

oder $1 : 10000 = 2$ Thlr. zu . . . Antwort 20000 Th.

In Portugal befindet sich ein Diamant von 1680 Karath, dessen Preiß daher also gefunden wird:

$1^2 : 1680^2 = 2$ Thlr. : — oder

$1 : 2822400 = 2 : \ldots$ Antwort 5644800 Thlr.

§. 503.

§. 503.

Von zusammengesetzten Verhältnissen geben die Posten ein merkwürdiges Beispiel, weil das Postgeld nach einem zusammengesetzten Verhältnisse der Zahl der Pferde, und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wenn also für ein Pferd auf eine Meile 8 Gr. oder $\frac{1}{3}$ Thlr. bezahlt wird, und man wissen will, wie viel für 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden soll? so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist 1 : 28, darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen 2 : 9, und setzt die zwey Verhältnisse zusammen 2 : 252, oder kürzer 1 : 126 = $\frac{1}{3}$ zu . . . Antwort 42 Thlr.

Wenn man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie viel kosten 30 Pferde auf 4 Meilen? Hier kommt die Rechnung also zu stehen:

$$\begin{array}{ccl} \cancel{8}, \cancel{2} & : & \cancel{30}, \cancel{15}, 5 \\ \cancel{3} & : & \cancel{4} \\ \hline 1 & : & 5 = \text{Ducaten} : \ldots \end{array}$$

Daher ist die Bezahlung 5 Ducaten.

§. 504.

Auch bey Arbeitern kommt diese Zusammensetzung der Verhältnisse vor, da die Bezahlung nach dem zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter, und der Zahl der Tage geschehen muß.

Wenn also z. B. einem Maurer täglich 10 Gr. gegeben wird und man will wissen, wie viel an 24 Maurer, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden soll? so steht die Rechnung also:

1 : 24
1 : 50

1 : 1200 = 10 Gr. : 500 Thlr.
10

12000 Gr.
3)
4000
8)
500 Thlr.

Weil in dergleichen Beispielen fünf Sätze gegeben sind, so wird in den Rechenbüchern die Art, dieselben zu berechnen, die Regelquinque genannt.

XI. Capitel.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine geometrische Progression genannt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben geometrischen Verhältnisse steht, und die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende, heißt der Nenner oder der Exponent; wenn also das erste Glied 1 ist und der Nenner = 2, so ist die geometrische Progression folgende:

Glieder 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Prog. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 u. s. f.

(Es sind hier die Anzeiger darüber gesetzt, um anzuzeigen, das wievielste Glied ein jedes sey.)

§. 506.

§. 506.

Wenn man überhaupt das erste Glied = a und den Nenner = b setzt, so kommt die geometrische Progression also zu stehen:

$$\begin{array}{lllllllllll} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8. & \ldots & n \\ \text{Prog.} & a, & ab, & ab^2, & ab^3, & ab^4, & ab^5, & ab^6, & ab^7, & \ldots & ab^{n-1} \end{array}$$

Wenn also diese Progression aus n Gliedern besteht, so ist das letzte = ab^{n-1}. Hier ist zu merken, wenn der Nenner b größer ist als 1, daß die Glieder immer größer werden, ist aber der Nenner b = 1, so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner b kleiner als 1, oder ein Bruch, so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wenn a = 1 und b = $\frac{1}{2}$, so bekommt man diese geometrische Progression:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128} \text{ u. s. f.}$$

§. 507.

Hierbey ist noch folgendes zu betrachten:

I.) das erste Glied, welches hier a genannt wird,

II.) der Nenner, welcher hier b genannt wird,

III.) die Anzahl der Glieder, welche = n gesetzt worden,

IV.) das letzte Glied, welches gefunden worden = ab^{n-1}.

Daher wenn die drey ersten Stücke gegeben sind, so wird das letzte Glied leicht nach folgender Regel außer der Reihe gefunden: man erhebt den Nenner zu einer Dignität, deren Exponent 1 weniger beträgt, als die Zahl der Glieder, und multiplicirt hernach diese Dignität in das erste Glied.

Wollte man nun von dieser geometrischen Progression: 1, 2, 4, 8 u. s. f. das 50ste Glied wissen, so ist hier a = 1, b = 2 und n = 50; daher das 50ste Glied = 2^{49} seyn wird. Da nun $2^9 = 512$, so ist $2^{10} = 1024$. Hiervon das Quadrat genommen, giebt

giebt $2^{20} = 1048576$. Hiervon wieder das Quadrat genommen, giebt $2^{40} = 1099511627776$. Wenn man nun 2^{40} mit $2^9 = 512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49} = 512 . 1099511627776 = 562949953421312$.

§. 508.

Hierbey pflegt nun besonders gefragt zu werden, wie man die Summe aller Glieder einer solchen Progression finden soll; dieses wollen wir hier folgendergestalt zeigen.

Es sey erstlich diese Progression von zehn Gliedern gegeben: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, wovon wir die Summe durch den Buchstaben S andeuten wollen, also daß

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$.

Hiervon nehme man nun die obige Progression weg, so bleibt übrig:

$S = 1024 - 1 = 1023$; also ist die gesuchte Summe $= 1023$.

§. 509.

Wenn wir nun bey eben dieser Progression die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen und $= n$ setzen, so wird die Summe $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots\ldots 2^{n-1}$ seyn. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots\ldots 2^n$, von diesen subtrahirt man jenes, so bekommt man $S = 2^n - 1$. Daher wird die gesuchte Summe gefunden, wenn man das letzte Glied 2^{n-1} mit dem Nenner 2 multiplicirt, um 2^n zu bekommen, und von diesem Product 1 subtrahirt.

§. 510.

Dieses wollen wir durch folgende Beispiele erläutern, indem wir für n nach und nach 1, 2, 3, 4 schrei-

schreiben werden, als: $1=1$, $1+2=3$, $1+2+4=7$, $1+2+4+8=15$, $1+2+4+8+16=31$, $1+2+4+8+16+32=63$ u. s. f.

§. 511.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen: Es verkauft jemand sein Pferd nach den Hufnägeln, deren 32 sind; für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pfennige, für den dritten 4 Pfennige, für den vierten 8 Pfennige und immer für den folgenden zweymal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also folgende geometrische Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, u. s. f. bis auf das 32ste Glied fortgesetzt und die Summe von allen gesucht werden. Da nun das letzte Gled $= 2^{31}$, so ist oben schon $2^{20} = 1048576$ gefunden worden, dieses multiplicirt man mit $2^{10} = 1024$, um $2^{30} = 1073741824$ zu haben. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt das letzte Glied $2^{31} = 2147483648$; folglich wird die Summe dieser Zahl doppelt genommen weniger 1, das ist 4294967295 Pfennige, gleich seyn.

2) 4294967295 Pf.
6) 2147483647 (1.
oder 357913941 Gr. 3 Pf.
3) 357913941
8) 119304647
oder 14913080 Thlr. 21 Gr. 3 Pf.

Also wird der Preis des Pferdes 14913080 Thlr. 21 Gr. 3 Pf. seyn.

§. 512.

§. 512.

Es sey nun der Nenner = 3 und die geometrische Progression sey 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe so lange = S, also daß:

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729.$$

Man multiplicire mit 3, um zu haben:

$$3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

Hiervon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2S = 2187 - 1 = 2186$. Daher ist die doppelte Summe = 2186 und folglich die Summe 1093.

§. 513.

In eben dieser Progression sey die Anzahl der Glieder = n und die Summe = S, also daß $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^{n-1}$, dieses mit 3 multiplicirt, giebt $3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^n$. Hiervon subtrahire man das obige, und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer dem letzten, gegen alle Glieder der obern, außer dem ersten, aufheben, so bekommt man $2S = 3^n - 1$ und also $S = \frac{3^n - 1}{2}$.

Also wird die Summe gefunden, wenn man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt und den Rest durch 2 theilt, wie aus folgenden Beispielen zu ersehen: $1 = 1$, $1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4$, $1 + 3 + 9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13$, $1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3 \cdot 27 - 1}{2} = 40$, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2} = 121$.

§. 514.

Nun sey auf eine allgemeine Art das erste Glied = a, der Nenner = b, die Anzahl der Glieder = n und die Summe derselben = S, also daß

$$S = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^{n-1}.$$

Dieses

Dieses mit b multiplicirt, so bekommt man $bS = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^n$. Hiervon subtrahire man das obige, so erhält man $(b - 1) . S = ab^n - a$, folglich bekommt man die gesuchte Summe $S = \frac{ab^n - a}{b - 1}$. **Daher wird die Summe einer jeden geometrischen Progression gefunden, wenn man das letzte Glied mit dem Nenner der Progression multiplicirt, von dem Product das erste Glied subtrahirt und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.**

§. 515.

Man habe eine geometrische Progression von 7 Gliedern; das erste = 3 und der Nenner = 2, so ist $a = 3$, $b = 2$ und $n = 7$, folglich das letzte Glied $3 . 2^6$, das ist $3 . 64 = 192$, und die Progression selbst

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.$$

also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt, giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt, bleibt 381, dieser Rest durch $b - 1$, das ist, durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summe der Progression ist.

§. 516.

Es sey ferner eine geometrische Progression von sechs Gliedern gegeben, davon das erste 4 und der Nenner $\frac{3}{2}$, so daß die Progression ist:

$$4, 6, 9, \frac{27}{2}, \frac{81}{4}, \frac{243}{8}.$$

Dieses letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multiplicirt, giebt $\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt, giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b - 1 = \frac{1}{2}$, giebt $\frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$.

§. 517.

Wenn der Nenner kleiner ist als 1 und also die Glieder der Progression immer abnehmen, so kann die Summe einer solchen Progression, die ohne Ende fortgeht, angegeben werden.

Es sey z. B. das erste Glied = 1, der Nenner $= \frac{1}{2}$, und die Summe = S, also daß

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ u. s. f. ohne Ende.

Man multiplicire mit 2, so bekommt man:

$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. s. f. ohne Ende,

hiervon ziehe man das obige ab, so bleibt $S = 2$, welches die Summe der unendlichen Progression ist.

§. 518.

Es sey ferner das erste Glied = 1, der Nenner $= \frac{1}{3}$, und die Summe = S, also daß

$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ u. s. f. ohne Ende.

Man multiplicire alles mit 3, so hat man

$3S = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ u. s. f. ohne Ende.

Hiervon nehme man die obige Reihe weg, so bleibt $2S = 3$, folglich ist die Summe $= 1\frac{1}{2}$.

§. 519.

Es sey ferner das erste Glied = 2, der Nenner $= \frac{3}{4}$, die Summe = S, also daß $S = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ u. s. f. ohne Ende. Dieses multiplicire man mit $\frac{4}{3}$, so hat man $\frac{4}{3} S = \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ u. s. f. ohne Ende. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt $\frac{1}{3} S = \frac{8}{3}$, also wird die Summe selbst gerade 8 seyn.

§. 520.

Wenn überhaupt das erste Glied = a und der Nenner der Progression $= \frac{b}{c}$, so daß dieser Bruch kleiner ist als 1 und folglich b kleiner ist als c, so kann die Summe dieser unendlichen Progression folgendergestalt gefunden werden. Man setzt

$S = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}$ u. s. f. ohne Ende.

Hier

Hier multiplicirt man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man
$\frac{b}{c}S = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}$ u. s. f. ohne Ende.

Dieses subtrahirt man von dem obigen, so bleibt
$\left(1 - \frac{b}{c}\right) S = a$, folglich ist $S = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$.

Multiplicirt man nun oben und unten mit c, so bekommt man $S = \frac{ac}{c-b}$, daher ist die Summe dieser unendlichen geometrischen Progression $= \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$ oder $\frac{ac}{c-b}$.

Diese Summe wird folglich gefunden, wenn man das erste Glied a dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder wenn man den Nenner von 1 subtrahirt, und durch den Rest das erste Glied dividirt.

§. 521.

Wenn in solchen Progressionen die Zeichen + und — mit einander abwechseln, so kann die Summe auf eben dieselbe Art gefunden werden. Denn es sey

$$S = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ u. s. f.}$$

Dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man:

$$\frac{b}{c}S = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ u. s. f.}$$

Dieses addire man zu dem obigen, so erhält man $\left(1 + \frac{b}{c}\right) S = a$. Hieraus findet man die gesuchte Summe $S = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}}$ oder $S = \frac{ac}{c+b}$.

§. 522.

Es sey z. B. das erste Glied $a = \frac{3}{5}$ und der Nenner der Progression $= \frac{2}{5}$, das ist $b = 2$ und $c = 5$, so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ u. s. f. die Summe also gefunden: der Nenner von 1 subtrahirt, bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividiren, so bekommt man die Summe = 1.

Wenn aber die Zeichen + und — abwechseln und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ u. s. f.}$$

so wird die Summe seyn:

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}$$

§. 523.

Zur Uebung soll diese unendliche Progression vorgelegt seyn:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ u. s. f.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$ und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt, bleibt $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied dividirt, giebt die Summe $= \frac{1}{3}$.

Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{30}$.

Nimmt man zwey Glieder $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$, so fehlt noch $\frac{1}{300}$ zu $\frac{1}{3}$ u. s. f.

§. 524.

Wenn diese unendliche Reihe gegeben ist:

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \text{ u. s. f.}$$

so ist das erste Glied 9, der Nenner $\frac{1}{10}$, also 1 weniger dem Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied 9 dividirt, so wird die Summe = 10. Hier ist zu merken, daß diese Reihe durch einen Decimalbruch also vorgestellt wird 9, 9999999 u. s. f.

Zusatz. Von §. 517 an sind hier Reihen summirt worden, die eine unendliche Anzahl von Glieder haben, deren jedes ein ächter Bruch ist. Ich werde am letzten Beyspiele zeigen, wie man das hier gelehrte eigentlich verstehen soll. Wenn ich das erste Glied 9 der Reihe weglasse, so muß $S = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} - - - = 0,999 - - - = 1$ seyn. Summiren wir von dieser Reihe nur n Glieder, so fehlt an der Summe 1 auch noch $\frac{1}{10^n}$; denn S ist $= \frac{9}{10} \cdot \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - 10^n}{10^n(1 - 10)} \cdot 10 = \frac{10^n - 1}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n}$, je größer also n ist, je weniger fehlt an Eins. Wenn man daher die Reihe so weit, als man will, fortsetzen darf, so läßt sich keine Größe angeben, um welche ihre Summe kleiner bliebe als 1 ist; denn 10^n kann größer als jede Zahl und daher $\frac{1}{10^n}$ kleiner als jede gegebene Zahl werden.

Der Ausdruck: die Reihe lasse sich ins Unendliche fortsetzen, ist so zu verstehen: jedes folgende Glied der Reihe ist der zehnte Theil seines nächstvorhergehenden Gliedes, jenes hat eine Größe, wenn dieses eine hatte. Man kömmt also nie auf ein Glied, wo die Reihe aufhörte, und dieses ist die Bedeutung jenes Ausdrucks.

Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen heißt daher eine Größe, der diese Reihe, ins Unendliche fortgesetzt, so nahe kommen kann, als man will, dergestalt, daß sich kein Unterschied zwischen dieser Größe und der Summe der Reihe angeben läßt.

XII. Capitel.

Von den unendlichen Decimalbrüchen.

§. 525.

Wir haben oben gesehen, daß man sich bey den logarithmischen Rechnungen statt der gemeinen Brüche der Decimalbrüche bedient, welches auch bey andern Rechnungen mit großem Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an zu zeigen, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werde, und wie man den Werth eines Decimalbruchs umgekehrt durch einen zemeinen Bruch ausdrücken soll.

§. 526.

Es sey auf eine allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einen Decimalbruch verwandelt soll. Da nun dieser Bruch den Quotienten ausdrückt, welcher entsteht, wenn man den Zähler a durch den Nenner b dividirt, so schreibe man statt a diese Form a, 0000000, welche offenbar nichts anders anzeigt als die Zahl a, weil keine 10tel, keine 100tel u. s. f. vorhanden sind. Diese Form theile man nun durch die Zahl b nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobey man nur in Acht zu nehmen hat, daß das Comma, welches die Decimalbrüche von den ganzen Zahlen absondert, an seinen gehörigen Ort gesetzt werde. Dieses wollen wir nun durch folgende Beispiele erläutern.

Es sey erstlich der gegebene Bruch $\frac{1}{2}$, so kommt die Decimaldivision wie folget zu stehen:

$$\frac{2)\ 1,0000000}{0,5000000} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus sehen wir, daß $\frac{1}{2}$ so viel sey als 0,5000000, oder als 0,5, welches auch offenbar ist, indem dieser Decimalbruch $\frac{5}{10}$ anzeigt, welches eben so viel ist als $\frac{1}{2}$.

§. 527.

Es sey ferner der gegebene Bruch $\frac{1}{3}$, so hat man diesen Decimalbruch:

$$\frac{3)\ 1,0000000}{0,3333333}\ \text{u. s. f.} = \frac{1}{3}.$$

Hieraus sieht man, daß dieser Decimalbruch, dessen Werth $= \frac{1}{3}$ ist, nirgend abgebrochen werden kann,

kann, sondern ins Unendliche durch lauter 3 fortläuft. Also machen alle diese Brüche $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ u. s. f. ohne Ende zusammen genommen gerade so viel als $\frac{1}{3}$, wie wir schon oben gezeigt haben.

Für $\frac{2}{3}$ findet man folgenden Decimalbruch, der auch ins Unendliche fortläuft:

$$\frac{3)\ 2,\ 0000000}{0,\ 6666666} \text{ u. s. f.} = \frac{2}{3},$$

welches auch aus dem vorigen erwiesen ist, weil dieser Bruch zweymal so groß ist, als der vorige.

§. 528.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{1}{4}$, so hat man diese Decimaldivision:

$$\frac{4)\ 1,\ 0000000}{0,\ 2500000} = \frac{1}{4},$$

also ist $\frac{1}{4}$ so viel als 0, 2500000, oder als 0, 25, welches beweiset, daß $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ist.

Eben so bekommt man für $\frac{3}{4}$ diesen Decimalbruch:

$$\frac{4)\ 3,\ 0000000}{0,\ 7500000} = \frac{3}{4},$$

also ist $\frac{3}{4} = 0,\ 75$, das ist $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$, welcher Bruch, durch 25 abgekürzt, $\frac{3}{4}$ giebt.

Wollte man $\frac{5}{4}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so hätte man

$$\frac{4)\ 5,\ 0000000}{1,\ 2500000} = \frac{5}{4},$$

dieses ist aber $1 + \frac{25}{100}$, das ist $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

§. 529.

Auf solche Art wird $\frac{1}{5} = 0,\ 2$: und $\frac{2}{5} = 0,\ 4$; ferner $\frac{3}{5} = 0,\ 6$; $\frac{4}{5} = 0,\ 8$ und $\frac{5}{5} = 1$; weiter $\frac{6}{5} = 1,\ 2$ u. s. f.

Wenn der Nenner 6 ist, so finden wir $\frac{1}{6} = 0,\ 1666666$ u. s. f., welches so viel ist als 0, 666666 — 0, 5. Nun aber ist $0,\ 666666 = \frac{2}{3}$ und $0,\ 5 = \frac{1}{2}$, folglich ist $0,\ 1666666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ferner findet man $\frac{2}{6} = 0, 3333333$ u. s. f. $= \frac{1}{3}$; hingegen $\frac{3}{6}$ wird $0, 5000000 = \frac{1}{2}$. Weiter wird $\frac{5}{6} = 0, 833333 = 0, 3333333 + 0, 5$, das ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

§. 530.

Wenn der Nenner 7 ist, so werden die Decimalbrüche mehr verwirrt; also für $\frac{1}{7}$ findet man 0, 142857 u. s. f., wobey zu merken, daß immer diese sechs Zahlen 142857 wieder kommen. Um nun zu zeigen, daß dieser Decimalbruch gerade $\frac{1}{7}$ ausmache, so verwandle man denselben in eine geometrische Progression, wovon das erste Glied $= \frac{142857}{1000000}$, der Nenner aber $= \frac{1}{1000000}$, also wird die Summe $= \dfrac{\frac{142857}{1000000}}{1 - \frac{1}{1000000}}$. Man multiplicire oben und unten mit 1000000, so wird diese Summe $= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

§. 531.

Daß der gefundene Decimalbruch gerade $\frac{1}{7}$ betrage, kann noch leichter folgendergestalt gezeigt werden. Man setze für den Werth desselben den Buchstaben S, also daß

$$
\begin{array}{lrl}
 & S = & 0, 142857142857142857 \text{ u. s. f.} \\
\text{so wird} & 10\,S = & 1, 42857142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & 100\,S = & 14, 2857142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & 1000\,S = & 142, 857142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & 10000\,S = & 1428, 57142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & 100000\,S = & 14285, 7142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & 1000000\,S = & 142857, 142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & \text{Subtrahire } S = & 0, 142857142857 \text{ u. s. f.} \\
\hline
 & 999999\,S = & 142857,
\end{array}
$$

Nun theile man durch 999999, so bekommt man $S = \frac{142857}{999999}$ und dieses ist der Werth des obigen Decimalbruchs $\frac{1}{7}$.

§. 532.

§. 532.

Eben so verwandelt man $\frac{2}{7}$ in einen Decimalbruch 0,2857 1428 u. s. f. Dieses leitet uns darauf, wie man den Werth des vorigen Decimalbruchs, den wir S gesetzt haben, leichter finden kann, weil dieser Bruch gerade zweymal so groß ist als der vorige und also = 2 S. Da wir nun gehabt haben

$$100S = 14,28571428571 \text{ u. s. f.}$$
hiervon 2 S weggenommen $2S = 0,28571428571$ u. s. f.

$$\text{bleiben } 98 S = 14,$$
$$\text{daher wird } S = \tfrac{14}{98} = \tfrac{1}{7}.$$

Ferner wird $\frac{3}{7} = 0,42857142857$ u. s. f.; dieses ist also nach dem obigen Satz = 3 S. Wir haben aber gefunden

$$10 S = 1,42857142857 \text{ u. s. f.}$$
Subtrahire $3 S = 0,42857142857$ u. s. f.

so wird $7 S = 1$, folglich $S = \frac{1}{7}$.

§. 533.

Wenn also der Nenner des gegebenen Bruchs 7 ist, so läuft der Decimalbruch ins Unendliche, und werden darin 6 Zahlen immer wiederholt, wovon der Grund leicht einzusehen ist, weil bey fortgesetzter Division endlich einmal so viel übrig bleiben muß, als man anfänglich gehabt. Es können aber nicht mehr verschiedene Zahlen übrig bleiben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, also müssen von der sechsten Division an wieder eben die Zahlen herauskommen als vom Anfang. Wenn aber der Nenner so beschaffen ist, daß die Division am Ende aufgeht, so fällt dieses weg.

§. 534.

Es sey der Nenner des Bruchs 8, so werden folgende Decimalbrüche gefunden:

 $\frac{1}{8} = 0,$

$\frac{1}{8} = 0,125 : \frac{2}{8} = 0,250 : \frac{3}{8} = 0,375 : \frac{4}{8} = 0,500 : \frac{5}{8} = 0,625 : \frac{6}{8} = 0,750 : \frac{7}{8} = 0,875$ u. s. f.

§. 535.

Ist der Nenner 9, so findet man folgende Decimalbrüche: $\frac{1}{9} = 0,111$ u. s. f. $\frac{2}{9} = 0,222$ u. s. f. $\frac{3}{9} = 0,333$ u. s. f. Ist aber der Nenner 10, so bekommt man folgende Brüche: $\frac{1}{10} = 0,100$; $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{3}{10} = 0,3$, wie aus der Natur der Sache erhellet. Eben so wird $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{37}{100} = 0,37$; ferner $\frac{256}{1000} = 0,256$; weiter $\frac{24}{10000} = 0,0024$, welches für sich klar ist.

§. 536.

Es sey der Nenner des Bruchs 11, so findet man diesen Decimalbruch $\frac{1}{11} = 0,0909090$ u. s. f. Wäre nun dieser Bruch gegeben und man wollte seinen Werth finden, so setze man denselben $= S$. Es wird also $S = 0,0909090$; und $10\,S = 0,909090$; weiter $100\,S = 9,09090$. Hiervon S subtrahirt, so wird $99\,S = 9$ und daher $S = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. Ferner wird $\frac{2}{11} = 0,181818$; $\frac{3}{11} = 0,272727$; $\frac{6}{11} = 0,545454$.

§. 537.

Hier sind nun diejenigen Decimalbrüche sehr merkwürdig, wo einige Zahlen immer wiederholt werden und die solchergestalt ins Unendliche fortgehen. Wie man von solchen Brüchen den Werth leicht finden könne, soll sogleich gezeigt werden.

Es werde erstlich nur eine Zahl wiederholt, welche $= a$ sey, so haben wir $S = 0,aaaaaaa$. Daher wird

$$10\,S = a,aaaaaaa.$$

$$\text{Subtrahire } S = 0,aaaaaaa$$

$$\text{so wird } 9\,S = a, \text{ folglich } S = \frac{a}{9}.$$

Werden

Werden immer zwey Zahlen wiederholt, als ab, so hat man S = 0, ab ab ab a. Daher wird 100 S = ab, ab ab ab, hievon S subtrahirt, bleibt 99 S = ab; also $S = \frac{ab}{99}$.

Werden drey Zahlen, als abc, immer wiederholt, so hat man S = 0, abc abc abc; folglich 1000 S = abc, abc abc. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt 999 S = abc; also $S = \frac{abc}{999}$ u. s. f.

Anmerk. Diese Eigenschaft gewisser Decimalbrüche, nach welcher die Decimalzahlen wiederkehren, bieten Materie zu sehr vielen interessanten Untersuchungen dar. Man findet einen sehr lesenswerthen Aufsatz darüber von Hrn. Prof. Joh. Bernoulli in den Mémoires der Akademie zu Berlin vom Jahr 1771. Hier erlaubt der Platz nur folgendes beyzubringen.

Es sey $\frac{N}{D}$ irgend ein ächter Bruch, welcher nicht in kleinern Zahlen ausgedrückt werden kann; man fragt, bis zu wie viel Ziffern man ihn in Decimalen ausdrücken muß, ehe dieselben Ziffern wiederkommen? Ich nehme an, daß 10 N größer als D ist, wäre dieses nicht, aber daß 100 N oder 1000 N wohl größer wären als D, so muß man zuerst sehen, ob $\frac{10N}{D}$ oder $\frac{100N}{D}$ u. s. f. sich auf kleinere Zahlen reduciren läßt, oder in einem Bruche $\frac{N1}{D1}$.

Dieses vorausgesetzt, so behaupte ich, daß dieselbe Periode nur alsdann erst wiederkommt, wenn in der fortgesetzten Division, die man macht, dasselbe Resultat N wieder erscheint. Wir wollen annehmen, daß wir bis dahin s Nullen angehängt haben, und daß Q den Quotienten in ganzen Zahlen bedeutet, indem wir von dem Comma abstrahiren, so haben wir $\frac{N.10^s}{D} = Q + \frac{N}{D}$; also $Q = \frac{N}{D} \cdot (10^s - 1)$. Da aber Q eine ganze Zahl seyn muß, so wird erfordert für s die kleinste ganze Zahl zu bestimmen, so daß $\frac{N}{D} \cdot (10^s - 1)$, oder nur $\frac{10^s - 1}{D}$ eine ganze Zahl sey.

Man muß hierbey verschiedene Fälle unterscheiden: der erste ist dieser, wo D ein Maaß von 10, oder von 100,

oder

oder von 1000 u. s. f. ist; und es ist klar, daß in diesem Fall keine periodischen Decimalbrüche statt finden können. Wir nehmen für den zweyten Fall den, wo D eine ungerade Zahl ist, und welche kein Factor einer Potenz von 10 ist; in diesem Fall kann der Werth von s bis $D - 1$ seyn, aber öfters ist er weniger. Ein dritter Fall ist endlich der, wo D gerade ist, und wo also, ohne ein Factor von einer Potenz von 10 zu seyn, doch ein gemeinschaftlicher Divisor mit einer dieser Potenzen da ist. Dieser gemeinschaftliche Divisor kann nur eine Zahl von folgender Form 2^c seyn. Wenn also $\frac{D}{2^c} = d$, so behaupte ich, daß die Perioden dieselben als für den Bruch $\frac{N}{d}$ seyn werden, aber daß sie nicht eher als bey der durch c bezeichneten Ziffer anfangen. Also ist dieser Fall mit dem zweyten einerley, und es ist übrigens sichtbar, daß gerade dieses hier das Wesentliche dieser Theorie ausmacht.

§. 538.

So oft also ein solcher Decimalbruch vorkommt, so ist es leicht seinen Werth anzuzeigen. Also wenn dieser gegeben wäre 0,296296, so wird sein Werth $= \frac{296}{999}$ seyn. Dieser Bruch durch 37 abgekürzt, wird $= \frac{8}{27}$.

Hieraus muß nun wieder der obige Decimalbruch entstehen; um dieses leichter zu zeigen, weil $27 = 3 \cdot 9$, so theile man 8 erstlich durch 9, und den Quotienten ferner durch 3, wie folget:

$$\begin{array}{l} 9)\ 8,\ 0000000 \\ \hline 3)\ 0,\ 8888888 \\ \hline \quad 0,\ 2962962 \text{ u. s. f.} \end{array}$$

Welches der gegebene Decimalbruch ist.

§. 539.

Um noch ein Beispiel zu geben, so verwandle man diesen Bruch $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.}$ in einem Decimalbruch auf folgende Art:

2) 1,

2)	1, 00000000000000
3)	0, 50000000000000
4)	0, 16666666666666
5)	0, 04166666666666
6)	0, 00833333333333
7)	0, 00138888888888
8)	0, 00019841269841
9)	0, 00002480158730
10)	0, 00000275573192
	0, 00000027557319

XIII. Capitel.

Von der Inttressenrechnung *).

§. 540.

Die Intressen oder Zinsen von einem Capital pflegen durch Procente ausgedrückt zu werden, indem man sagt, wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gewöhnlich wird das Geld zu 5 p. C. ausgelegt, also daß

*) Die Theorie der Intressenrechnung dankt ihre ersten Fortschritte dem großen Leibnitz, welcher die Hauptelemente in den actis Eruditorum, Leipzig 1683, gab. Sie hat nachher Stoff zu verschiedenen einzelnen sehr interessanten Dissertationen gegeben. Diejenigen Mathematiker, welche über politische Arithmetik gearbeitet, haben solche am meisten erweitert. Wir nennen unter Deutschen mit Recht hier vorzüglich Florencourt, Michelsen und Tetens die hierüber vortreffliche jede in besonderer Rücksicht schätzbare Werke geliefert haben, und dürfen sie kühn den Ausländern entgegen stellen, die vorher, besonders die Engländer, uns beyweitem hierin übertrafen.

daß von 100 Rthlr. jährlich 5 Rthlr. Intressen gezahlt werden. Hieraus ist es nun leicht, den Zins von einem jeden Capital zu berechnen, indem man nach der Regeldetri sagt:

100 geben 5, was giebt das gegebene Capital? Es sey z. B. das Capital 860 Rthlr., so findet man den jährlichen Zins

$$100 : 5 = 860 \text{ zu} \ldots \text{ Antwort } 43 \text{ Rthlr.}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100)\ 4300 \\ \hline 43 \end{array}$$

§. 541.

Bey Berechnung dieses einfachen Intresse wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Intressen auf Intressen betrachten, da jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen und dadurch das Capital vermehret wird, wobey dann gefragt wird: wie hoch ein gegebenes Capital nach Verfließung einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich größer wird, indem zu 5 Proc. 100 Rthlr. nach einem Jahr zu 105 anwachsen, so kann man daraus finden, wie groß ein jedes Capital nach Verfließung eines Jahres werden müsse?

Es sey das Capital $= a$, so wird solches nach einem Jahre gefunden, wenn man sagt: 100 geben 105, was giebt a? Antwort $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, welches man auch also schreiben kann $\frac{21}{20} \cdot a$ oder $a + \frac{1}{20} \cdot a$.

§. 542.

Wenn also zu dem gegenwärtigen Capital sein 20ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wenn man nun zu diesem wieder seinen 20sten Theil addirt, so findet man

man das Capital für das zweyte Jahr; und zu diesem wieder sein 20ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr u. s. f. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

§. 543.

Es sey das Capital jetzt 1000 Rthlr., welches zu 5 pro Cent angelegt ist und die Zinsen davon jährlich wieder zum Capital geschlagen werden. Weil nun die besagte Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimalbrüchen ausdrücken, nicht weiter aber als bis auf 1000ste Theile eines Rthlr. gehen, weil kleinere Theilchen hier in keine Betrachtung kommen.

Gegenwärtiges Capital 1000 Rthlr. wird

nach 1 Jahr	.	.	1050 Rthlr.
			52, 5
nach 2 Jahren	.	.	1102, 5
			55, 125
nach 3 Jahren	.	.	1157, 625
			57, 881
nach 4 Jahren	.	.	1215, 506
			60, 775
nach 5 Jahren	.	.	1276, 281 u. s. f.

§. 544.

Solchergestalt kann man auf so viele Jahre fortgehen als man will; wenn aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so wird diese Rechnung sehr weitläuftig und mühsam. Es läßt sich diese aber folgendergestalt abkürzen:

Es

Es sey das gegenwärtige Capital = a, und da ein Capital von 20 Rthlr. nach einem Jahre 21 Rthlr. beträgt, so wird das Capital a nach einem Jahre auf $\frac{21}{20}$. a anwachsen. Ferner im folgenden Jahre auf $\frac{21^2}{20^2} \cdot a = (\frac{21}{20})^2 \cdot a$. Dieses ist nun das Capital nach zweyen Jahren, welches in einem Jahre wieder auf $(\frac{21}{20})^3 \cdot a$ anwächst, welches das Capital nach drey Jahren seyn wird; nach vier Jahren wird nun dasselbe $(\frac{21}{20})^4 \cdot a$; nach fünf Jahren $(\frac{21}{20})^5 \cdot a$; 100 Jahren $(\frac{21}{20})^{100} \cdot a$, und allgemein nach n Jahren wird dasselbe $(\frac{21}{20})^n \cdot a$ seyn; woraus man nach einer jeden beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

§. 545.

Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß das Intresse zu 5 pro Cent gerechnet wird, und $\frac{21}{20}$ so viel ist als $\frac{105}{100}$. Sollte nun das Intresse zu 6 pro Cent gerechnet werden, so würde das Capital a nach einem Jahre auf $\frac{106}{100} \cdot a$ anwachsen; nach zwey Jahren auf $(\frac{106}{100})^2 \cdot a$; und nach n Jahren auf $(\frac{106}{100})^n \cdot a$.

Sollte aber das Intresse nur 4 pro Cent betragen, so würde das Capital a nach n Jahren auf $(\frac{104}{100})^n \cdot a$ anwachsen.

§. 546.

Wenn nun sowohl das Capital a, als die Anzahl der Jahre gegeben ist, so kann man diese Formen leicht durch die Logarithmen auflösen, denn man darf nur den Logarithmus von dieser Formel suchen, welche zu 5 pro Cent $(\frac{21}{20})^n \cdot a$ ist. Da nun dieselbe ein Product von $(\frac{21}{20})^n$ und a ist, so ist ihr Logarithmus $= \log. (\frac{21}{20})^n + \log. a$. Da weiter $(\frac{21}{20})^n$ eine Potenz ist, so ist $\log. (\frac{21}{20})^n = n \log. \frac{21}{20}$. Daher ist der Logarithmus von dem gesuchten Capital = n.

log. $\frac{21}{20}$

log. $\frac{21}{20}$ + log. a. Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20}$ = log. 21 — log. 20.

§. 547.

Es sey nun das Capital = 1000 Rthlr., und man fragt, wie groß dasselbe nach 100 Jahren zu 5 pro Cent seyn werde?

Hier ist also n = 100. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capital wird nun = 100 log. $\frac{21}{20}$ + log. 1000 seyn, welches folgendergestalt berechnet wird:

log. 21 = 1, 3222193
subtr. log. 20 = 1, 3010300

log. $\frac{21}{20}$ = 0, 0211893
multipl. mit 100

100 log. $\frac{21}{20}$ = 2, 1189300
addirt log. 1000 = 3, 0000000

5, 1189300

Dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals und die Zahl desselben wird daher aus 6 Figuren bestehen und also 131501 Rthlr. seyn.

§. 548.

Ein Capital von 3452 Rthlr. zu 6 pro Cent, wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren?

Hier ist also a = 3452 und n = 64. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals = 64 log. $\frac{53}{50}$ + log. 3452, welches also berechnet wird:

log. 53 = 1, 7242759
subt. log. 50 = 1, 6989700

log. $\frac{53}{50}$ = 0, 0253059

mult. mit 64; 64 log. $\frac{53}{50}$ = 1, 6195776
log. 3452 = 3, 5380708

5, 1576484

Also das gesuchte Capital = 143763 Rthlr.

§. 549.

Wenn die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so könnte, weil damit der Logarithmus eines Bruchs multiplicirt werden muß, die Logarithmen in den gewöhnlichen Tabellen aber nur auf 7 Figuren berechnet worden, ein merklicher Fehler entstehen. Daher muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Figuren genommen werden, wie aus folgendem Beispiele zu ersehen: ein Capital von einem Rthlr. zu 5 p. C. bleibt 500 Jahr lang stehen, da inzwischen die jährlichen Zinsen immer dazu geschlagen worden. Nun fragt sich, wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde?

Hier ist also $a = 1$ und $n = 500$, also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 500 \log. \frac{21}{20} + \log. 1$, woraus diese Rechnung entstehet:

$$\log. 21 = 1,\ 3222192947339 19$$
subtrahirt $\log. 20 = 1,\ 3010299956639 81$
$$\log. \tfrac{21}{20} = 0,\ 0211892990699 38$$
mult. mit 500, giebt 10, 594649534969000

Dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals, welches daher selbst = 39323200000 Rthlr. seyn wird.

§. 550.

Wenn man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Intressen schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summe $= b$ dazu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr anwachsen, wie folget. Gegenwärtig hat man a;

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a + b$

nach 2 Jahr $(\frac{21}{20})^2 a + \frac{21}{20}b + b$

nach 3 Jahr $(\frac{21}{20})^3 a + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach 4 Jahr $(\frac{21}{20})^4 a + (\frac{21}{20})^3 b + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach n Jahr $(\frac{21}{20})^n a + (\frac{21}{20})^{n-1} b + (\frac{21}{20})^{n-2} b + \ldots$
$\ldots + \frac{21}{20}b + b$

Dieses

Dieses Capital besteht aus zwey Theilen, davon der erste = $(\frac{21}{20})^n a$, der andere aber aus dieser Reihe rückwärts geschrieben $b + (\frac{21}{20}) b + (\frac{21}{20})^2 b + (\frac{21}{20})^3$ $^3b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1} b$ besteht, welches eine geometrische Progression ist, deren Nenner = $\frac{21}{20}$; die Summe wird nun also gefunden:

Man multiplicirt das letzte Glied $(\frac{21}{20})^{n-1} b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$, so bekommt man $(\frac{21}{20})^n b$, davon subtrahirt man das erste Glied b, so bleibt $(\frac{21}{20})^n b - b$. Dieses muß durch 1 weniger als der Nenner ist, dividirt werden, das ist durch $\frac{1}{20}$; daher wird die Summe der obigen Progression $= 20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b$; folglich wird das gesuchte Capital seyn:

$(\frac{21}{20})^n a + 20 . (\frac{21}{20})^n b - 20b = (\frac{21}{20})^n . (a + 20b) - 20b.$

§. 551.

Um nun dieses auszurechnen, so muß man das erste Glied $(\frac{21}{20})^n (a + 20b)$ besonders betrachten und berechnen, welches geschieht, wenn man den Logarithmus desselben sucht, welcher $n \log. \frac{21}{20} + \log. (a + 20b)$ ist. Zu diesem sucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, so hat man das erste Glied, davon subtrahirt man 20b, so bekommt man das gesuchte Capital.

§. 552.

Frage. Einer hat ein Capital von 1000 Rthlr. zu 5 pr. C. ausstehen, wozu er jährlich außer den Zinsen noch 100 Rthlr. hinzulegt, wie groß wird dieses Capital nach 25 Jahren seyn?

Hier ist also a = 1000, b = 100, n = 25; daher wird die Rechnung stehen, wie folget:

$$\log. \tfrac{21}{20} = 0,\ 021189299$$

multiplic. mit 25, giebt

$$25 \log. \tfrac{21}{20} = 0,\ 5297324750$$

$$\begin{array}{r} 0,\ 5297324750 \\ \log.(a+20b) = \underline{3,\ 4771213135} \\ 4,\ 0068537885 \end{array}$$

Also ist der erste Theil 10159, 1 Rthlr, davon $20b = 2000$ subtrahirt, so ist das Capital nach 25 Jahren werth 8159, 1 Rthlr.

§. 553.

Da nun das Capital immer größer wird und nach 25 Jahren auf $8159\frac{1}{10}$ Rthlr. angewachsen, so kann man weiter fragen, nach wie viel Jahren dasselbe bis auf 1000000 Rthlr. anwachsen werde?

Es sey n diese Anzahl von Jahren, und weil $a = 1000$, $b = 100$, so wird nach n Jahren das Capital seyn: $(\frac{21}{20})^n(3000) - 2000$, dieses muß nun 1000000 Rthlr. seyn, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n - 2000 = 1000000.$$

Man addire beyderseits 2000, so bekommt man

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n = 1002000.$$

Man dividire beyderseits durch 3000, so hat man $(\frac{21}{20})^n = 334$. Hiervon nehme man die Logarithmen, so hat man $n.\log.\frac{21}{20} = \log. 334$. Hier dividirt man durch $\log.\frac{21}{20}$, so kommt $n = \frac{\log. 334}{\log. \frac{21}{20}}$. Nun aber ist $\log. 334 = 2,5237465$, $\log.\frac{21}{20} = 0,0211893$; daher wird $n = \frac{2,\,5237465}{0,\,0211893}$. Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist 119 Jahr 1 Monath 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital auf 1000000 Rthlr. anwachsen.

§. 554.

Wenn aber, statt daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt wird, etwas davon weggenommen wird, so welches man auf seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe $= b$ gesetzt wird, so wird das zu 5 p. C. angelegte Capital a folgendergestalt fortgehen:

Gegenwärtig ist es a:

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a - b$

nach 2 Jahren $(\frac{21}{20})^2 a - \frac{21}{20}b - b$

nach 3 Jahren $(\frac{21}{20})^3 a - (\frac{21}{20})^2 b - \frac{21}{20}b - b$

nach n Jahren $(\frac{21}{20})^n a - (\frac{21}{20})^{n-1} b - (\frac{21}{20})^{n-2} b \ldots$

$\ldots - (\frac{21}{20}) b - b.$

§. 555.

Es wird also dasselbe in zwey Stücken vorgelegt, das erste ist $(\frac{21}{20})^n a$; davon wird subtrahirt diese geometrische Progression rückwärts geschrieben $b + \frac{21}{20} b + (\frac{21}{20})^2 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1}$. Hiervon ist oben die Summe gefunden worden $= 20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b$, welche von dem ersten $(\frac{21}{20})^n a$ subtrahirt, das nach n Jahren gesuchte Capital giebt $(\frac{21}{20})^n (a - 20b) + 20b$.

§. 556.

Diese Formel hätte sogleich aus der vorigen geschlossen werden können. Denn da vorher jährlich b addirt wurde, so wird nun jährlich b subtrahirt. Also darf man in der vorhergehenden Formel anstatt $+ b$ nur $- b$ schreiben. Hier ist nun besonders zu merken, daß wenn $20b$ größer ist als a, so wird das erste Glied negativ und also das Capital immer kleiner; welches für sich offenbar ist, denn wenn vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahre kleiner werden und endlich gar verschwinden, welches wir mit einem Beispiele erläutern wollen.

§. 557.

Einer hat ein Capital von 100000 Rthlr. zu 5 pr. C. ausstehen, braucht alle Jahre zu seinem Unterhalt

erhalt 6000 Rthlr., welches mehr ist als die Intressen von 100000 Rthlr., welche nur 5000 Rthlr. betragen, daher das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage, nach wie viel Jahren dasselbe gänzlich verschwinden werde?

Für diese Anzahl Jahre setze man n, und da a = 100000 Rthlr. und b = 6000, so wird nach n Jahren das Capital seyn $= -20000\left(\frac{21}{20}\right)^n + 120000$ oder $120000 - 20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$. Also verschwindet das Capital, wenn $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ auf 120000 anwächst, oder wenn $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n = 120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 6$. Man nehme die Logarithmen, so kommt $n \log.\frac{21}{20} = \log. 6$. Man dividire durch $\log.\frac{21}{20}$, so findet man $n = \frac{\log. 6}{\log.\frac{21}{20}}$ $= \frac{0,7781513}{0,0211893}$, oder $n = \frac{7781513}{211893}$, folglich wird n = 36 Jahr 8 Monath 22 Tage; und nach so vieler Zeit wird das Capital verschwinden.

§. 558.

Hier ist noch nöthig zu zeigen, wie nach diesem Grunde die Intressen auch für eine kleinere Zeit als ganze Jahre berechnet werden können. Hierzu dient nun die oben gefundene Formel, daß ein Capital zu 5 pr. C. nach n Jahren auf $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ anwächst; ist nun die Zeit kleiner als ein Jahr, so wird der Exponent n ein Bruch und die Rechnung kann wie vorher durch Logarithmen gemacht werden. Sollte das Capital nach einem Tage gesucht werden, so muß man $n = \frac{1}{365}$ setzen; will man es nach zwey Tagen wissen, so wird $n = \frac{2}{365}$ u. s. f.

§. 559.

Es sey das Capital a = 100000 Rthlr. zu 5 p. C. wie groß wird solches nach 8 Tagen seyn?

Hier

Hier ist $a = 100000$ und $n = \frac{8}{365}$; folglich wird das Capital seyn $(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}}\ 100000$. Hiervon ist der Logarithmus $= \log. (\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}} + \log. 100000 = \frac{8}{365} \log. \frac{21}{20} + \log. 100000$. Nun aber ist $\log. \frac{21}{20} = 0,0211892$.

dieser mit $\frac{8}{365}$ multiplicirt, giebt 0, 0004644,
hierzu ad. log. 100000, welcher ist 5, 0000000

5, 0004644

so erhält man den Logarithmus von dem Capital = 5, 0004644. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthlr., so daß in den ersten 8 Tagen das Intresse schon 107 Rthlr. beträgt.

§. 560.

Hierher gehören noch andere Fragen, welche darauf gehen, wenn eine Summe Geldes erst nach einigen Jahren verfällt, wie viel dieselbe jetzt werth sey. Hier ist zu betrachten, daß, da 20 Rthlr. über ein Jahr 21 Rthlr. austragen, wieder 21 Rthlr., die nach einem Jahr zahlbar sind, jetzt nur 20 Rthlr. werth sind. Wenn also das nach einem Jahr verfallene Capital a gesetzt wird, so ist dessen Werth $\frac{20}{21}a$. Um also zu finden, wie viel das Capital a, das zu einer gewissen Zeit verfällt, ein Jahr früher werth ist, so muß man dasselbe multipliciren mit $\frac{20}{21}$; zwey Jahr früher wird desselben Werth seyn $(\frac{20}{21})^2 a$; drey Jahr früher ist dasselbe $(\frac{20}{21})^3 a$ und überhaupt n Jahre früher ist der Werth desselben $(\frac{20}{21})^n a$.

§. 561.

Einer genießt auf 5 Jahre lang eine jährliche Rente von 100 Rthlr., dieselbe wollte er nun jetzt für baares Geld zu 5 pr. C. verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?

für

für die 100 Rthlr., welche verfallen,

nach 1 Jahr bekommt er		95, 239
nach 2 Jahren	. .	90, 704
nach 3 Jahren	. .	86, 385
nach 4 Jahren	. .	82, 272
nach 5 Jahren	. .	78, 355
Summe aller 5 Jahre	. .	432, 955

Also kann er für diese Rente nicht mehr fordern, als 432, 955 Rthlr. oder 432 Rthlr. 22 Gr. 11 Pf.

§. 562.

Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre lang dauern, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam, sie kann aber folgendergestält sehr erleichtert werden:

Es sey die jährliche Rente = a, welche jetzt schon anfängt und n Jahre lang dauert, so wird dieselbe jetzt werth seyn:

$$a + \tfrac{20}{21}a + (\tfrac{20}{21})^2 a + (\tfrac{20}{21})^3 a + (\tfrac{20}{21})^4 a + \ldots (\tfrac{20}{21})^n a.$$

Dieses ist nun eine geometrische Progression, deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $(\frac{20}{21})^{n+1}a$; davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $(\frac{20}{21})^{n+1}a - a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist mit $-\frac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleichviel, mit -21 multiplicirt werden; daher wird die gesuchte Summe seyn $= -21\,(\frac{20}{21})^{n+1}a + 21a$, das ist $21a - 21\,(\frac{20}{21})^{n+1}a$, wovon das letzte Glied, welches subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmen berechnet werden kann.

Ende des ersten Theils

und des dritten Abschnits von den Verhältnissen und Proportionen.