Lehrbuch des Hochbaues

Grundbau, Steinkonstruktionen, Holzkonstruktionen, Eisenkonstruktionen , Eisenbetonkonstruktionen

Esselborn, Karl

Leipzig, 1908

§ 12. Biegungsfestigkeit

urn:nbn:de:hbz:466:1-50294

§ 12. Biegungsfestigkeit. Wie bekannt, berechnet sich die Biegungsfestigkeit homogener Körper mit konstantem Elastizitätsmodul nach der allgemeinen Gleichung

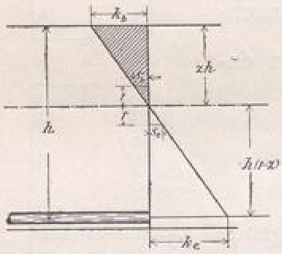
$$k = \frac{M}{W}.$$

Macht man bei Berechnung der Eisenbetonkonstruktionen dieselben Annahmen wie für die obige Gleichung, nämlich, daß die einzelnen Querschnitte auch nach der Durchbiegung noch eben sind, so wird die Rechnungsweise dadurch wesentlich vereinfacht. Diese Annahme erscheint um so mehr zulässig, als die nach dieser Richtung hin gemachten Versuche keine großen Abweichungen von den so gewonnenen Rechnungsergebnissen zeigen.

Wird ein gerader Balken auf Biegung beansprucht, so entsteht bekanntlich in einem Teile Druckspannung (D), im andern Teile Zugspannung (Z). Die Druckspannung kann nun durch den Beton aufgenommen werden, während zur Aufnahme der Zugspannungen eine Eiseneinlage erforderlich ist. Denn obgleich auch der Beton eine gewisse Zugspannung aushalten kann, empfiehlt es sich doch, diese zu vernachlässigen, da hierdurch die Rechnungen wesentlich einfacher und die Konstruktionen sicherer werden.

a) **Platten.** Zur Entfernung des inneren Momentes, das dem äußeren gleich zu setzen ist, muß zunächst der Abstand χh, der neutralen Achse von Plattenoberkante bestimmt werden (Abb. 15). Bezeichnet S_b die Spannung des Betons im Abstand 1 von der neutralen Achse, so wird die größte Beanspruchung

Abb. 15. Abstand der neutralen Achse von Plattenoberkante.



$$k_b = S_b \cdot \chi h.$$

Ist ferner S_e die Spannung des Eisens im Abstand 1, so wird die maximale Spannung desselben

$$k_e = S_e (h - \chi h) = S_e \cdot h (1 - \chi).$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

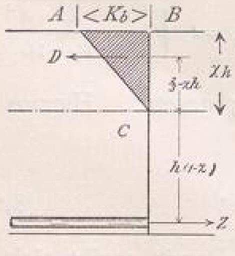
$$\frac{k_e}{k_b} = \frac{S_e \cdot h (1 - \chi)}{S_b \cdot h \cdot \chi}.$$

Da nun $\frac{S_e}{S_b}$ den Elastizitätsgrößen beider Stoffe entspricht, kann wieder wie früher gesetzt werden:

$$\frac{S_e}{S_b} = \frac{E_e}{E_b} = n. \text{ Damit wird}$$

$$\frac{k_e}{k_b} = n \cdot \frac{(1 - \chi)}{\chi}. \qquad (9)$$

Abb. 16. Spannungsdreieck.



Wählt man nun k_e, k_b und n, so läßt sich aus dieser Gleichung χ leicht bestimmen. Z. B. für $k_e = 1000$ kg/qcm, $k_b = 40$ kg/qcm und n wie oben $= 15$, wird $\frac{1000}{40} = 15 \frac{(1 - \chi)}{\chi}$, woraus sich $\chi = \frac{3}{8}$ ergibt; d. h. die neutrale Achse liegt um $\frac{3}{8}$ der Höhe von der Plattenoberkante entfernt und nur dieser Teil wird auf Druck beansprucht.

Die Größe des Druckes in einer Ebene wird durch das Dreieck ABC (Abb. 16) dargestellt. Ein Prisma, welches dieses sog. Spannungsdreieck zur Grundfläche und die Querschnittsbreite b zur Höhe hat, stellt demnach den gesamten Druck D des Betons dar, es wird also

$$D = k_b \cdot \frac{\chi h}{2} \cdot b.$$

Da nun Druck und Zug gleich groß sind und der Eisenquerschnitt f_e den entstehenden Zug allein aufnehmen soll, muß $f_e \cdot k_e = k_b \cdot \frac{\chi \cdot h}{2} \cdot b$ sein und folglich

$$f_e = \frac{k_b}{k_e} \cdot \frac{\chi}{2} \cdot b \cdot h. \qquad (10)$$

Hieraus ist der Querschnitt des erforderlichen Eisens zu berechnen, wenn der Betonquerschnitt bekannt ist.

Das innere Biegungsmoment M und damit die Plattenhöhe h ergeben sich aus dem Moment des Kräftepaares D und Z in Abb. 16. Der Abstand dieser Kräfte ist $\frac{2}{3}\chi h + h(1 - \chi)$. Da nun $D = Z$ ist, ergibt sich:

$$M = D \tfrac{2}{3}\chi \cdot h + D \cdot h(1 - \chi) = D[\tfrac{2}{3}\chi \cdot h + h(1 - \chi)].$$

Setzt man darin für D den gefundenen Wert ein, so wird

$$M = k_b \cdot \frac{\chi}{2} \cdot h \cdot b[\tfrac{2}{3}\chi \cdot h + h(1 - \chi)] = k_b \cdot \frac{\chi}{2} \cdot b \cdot h^2 \cdot \frac{3 - \chi}{3},$$

und daraus die Plattenhöhe

$$h = \sqrt{\frac{M \cdot 6}{k_b \cdot \chi(3 - \chi) \cdot b}}. \qquad (11)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich demnach die Plattenhöhe h direkt bestimmen. Zu dieser Höhe h ist noch ein gewisses Maß für Umhüllung der Eiseneinlagen zuzugeben und zwar wählt man dasselbe mindestens gleich der Eisenstärke (vgl. auch den Abschnitt D).

Beispiel: Eine 3,85 m weit gespannte, freiaufliegende Deckenplatte wird mit 500 kg/qm (Nutzlast und Eigengewicht) belastet. Welche Stärke und Eiseneinlage muß diese Platte erhalten, wenn die Bruchfestigkeit des Betons = 240 kg/qcm ist und die zulässige Spannung im Eisen 1000 kg/qcm betragen darf.

k_b kann nach den Leitsätzen gleich $\frac{1}{6}$ der Bruchfestigkeit gesetzt werden, folglich $k_b = \frac{240}{6} = 40$ kg/qcm; n sei wie früher $= 15$. Das äußere Moment ergibt sich für Balken auf 2 Stützen mit gleichmäßig verteilter Belastung zu $M = \frac{Q \cdot l}{8}$.

Für $b = 1{,}0$ m Plattentiefe wird die Belastung $Q = 1{,}0 \cdot 3{,}85 \cdot 500 = 1925$ kg. Die Stützweite l ist gleich der Lichtweite + Deckenstärke zu setzen; nimmt man die letztere zu 0,15 m an, so wird $l = 3{,}85 + 0{,}15 = 4{,}00$ m und somit $M = \frac{1925 \cdot 400}{8} = 96\,250$ kgcm.

Nach Gleichung 9 ist $\frac{1000}{40} = 15\frac{(1 - \chi)}{\chi}$ und daraus $\chi = \frac{3}{8}$.

Damit wird nach Gleichung 11 $h = \sqrt{\frac{M \cdot 6}{k_b \cdot \chi(3 - \chi) \cdot b}}$, folglich

$$h = \sqrt{\frac{96\,250 \cdot 6}{40 \cdot \frac{3}{8}(3 - \frac{3}{8}) \cdot 100}} \cong 12{,}1 \text{ cm};$$

hierzu als Umhüllung der Eiseneinlagen 1,9 cm, gibt die gesamte Plattenhöhe zu 14 cm.

Die erforderliche Eiseneinlage bestimmt sich nach Gleichung 10 zu:

$$f_e = \frac{40}{1000} \cdot \frac{3}{8 \cdot 2} \cdot 100 \cdot 12{,}1 \cong 9{,}10 \text{ qcm}.$$

Wählt man Rundeisen mit 1,1 cm Durchmesser, so sind deren 10 Stück erforderlich, d. h. auf 1,00 m Plattentiefe sind 10 Stück anzuordnen, deren Abstände sich dann zu $\frac{100}{10} = 10$ cm ergeben.

Eine wesentliche Vereinfachung dieser Rechnungsweise ist durch nachstehende Tabelle II geschaffen, die mit Benutzung der oben entwickelten Formeln für $n = 15$ und $k_e = 1000$ kg/qcm berechnet ist.

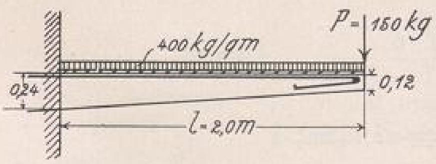
k_b kg/qcm	k_e kg/qcm	Plattenstärke h in cm bis Mitte Eiseneinlage	Eisenquerschnitt für 1,0 m Plattenbreite: f_e in qcm	Abstand der neutralen Faser von Plattenoberkante	Bemerkungen
20	1000	$0{,}0685\sqrt{M}$	$0{,}231 \cdot h$	$0{,}231 \cdot h$	M ist in kgcm einzusetzen.
22	1000	$0{,}0632\sqrt{M}$	$0{,}273 \cdot h$	$0{,}247 \cdot h$	Die gesamte Plattenhöhe ist $h +$ Umhüllung und zwar beträgt diese je nach der Stärke der Einlagen 1 bis 2 cm.
25	1000	$0{,}0568\sqrt{M}$	$0{,}341 \cdot h$	$0{,}273 \cdot h$	
28	1000	$0{,}0518\sqrt{M}$	$0{,}414 \cdot h$	$0{,}295 \cdot h$	
30	1000	$0{,}0490\sqrt{M}$	$0{,}466 \cdot h$	$0{,}310 \cdot h$	
32	1000	$0{,}0465\sqrt{M}$	$0{,}519 \cdot h$	$0{,}324 \cdot h$	
35	1000	$0{,}0433\sqrt{M}$	$0{,}603 \cdot h$	$0{,}344 \cdot h$	
38	1000	$0{,}0410\sqrt{M}$	$0{,}690 \cdot h$	$0{,}363 \cdot h$	
40	1000	$0{,}0390\sqrt{M}$	$0{,}750 \cdot h$	$0{,}375 \cdot h$	
42	1000	$0{,}0376\sqrt{M}$	$0{,}811 \cdot h$	$0{,}386 \cdot h$	
45	1000	$0{,}0357\sqrt{M}$	$0{,}907 \cdot h$	$0{,}403 \cdot h$	
48	1000	$0{,}0340\sqrt{M}$	$1{,}000 \cdot h$	$0{,}419 \cdot h$	
50	1000	$0{,}0330\sqrt{M}$	$1{,}071 \cdot h$	$0{,}429 \cdot h$	

Diese Tabelle läßt sich auch für andere Beanspruchungen im Beton und Eisen leicht erweitern; ebenso kann für n ein anderer Wert, z. B. 10, eingesetzt werden. Für die meisten Fälle der Praxis genügen die hier bestimmten Werte indessen vollkommen, so daß weitere Rechnungen und auch besondere Tabellenwerke, die zum Teil recht umständlich sind, nicht erforderlich werden. Die praktische Verwendung der Tabelle zeigt sich in folgenden Beispielen:

1. Für das Beispiel auf S. 433 wurde das Moment zu $M = 96\,250$ kgcm ermittelt. Dafür ergibt sich nach Tabelle II, wenn $k_b = 40$ und $k_e = 1000$ kg/qcm betragen darf. $h = 0{,}039\sqrt{96\,250} = 12{,}1 + 1{,}9$ cm Umhüllung $= 14$ cm Plattenhöhe; die Einlage $f_e = 0{,}75 \cdot 12{,}1 = 9{,}08$ qcm, wofür 10 Stück 11 mm starke Rundeisen f. d. lfd. m genügen. Ein Vergleich der Resultate ergibt, daß beide Werte mit den früher ermittelten genau übereinstimmen.

2. Die 2,0 m weit auskragende Galerie eines Saales (Abb. 17) soll durch eine Eisenbetonplatte gebildet werden, deren Beanspruchungen $k_b = 30$ und $k_e = 1000$ kg/qcm betragen dürfen. Als Nutzlast sind 400 kg/qm anzunehmen; außerdem ist das lfd. m Geländer mit 150 kg und das Eigengewicht der Platte mit 3 cm starker Asphaltabdeckung in der üblichen Weise einzuführen. Die Belastungen sind demnach: Nutzlast $2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 400 = 800$ kg, Eigengewicht (mittlere Plattenstärke $0{,}18 + 0{,}03$ Überd.) $0{,}21 \cdot 2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 2400 = 1008 = Q \cong 1800$ kg; Geländergewicht $P = 150$ kg. Damit wird $M = 1800 \cdot 100 + 150 \cdot 200 = 210\,000$ kgcm, und die Plattenstärke an der Einspannungsstelle nach Tabelle II $h = 0{,}049\sqrt{210\,000} = 22{,}4 + 1{,}6$ cm Umhüllung $= 24$ cm.

Abb. 17. Berechnung der Galerie eines Saales.



Ferner ist die Einlage $f_e = 0{,}466 \cdot 22{,}4 = 10{,}45$ qcm, wofür 10 Stück 1,2 cm starke Rundeisen genügen. Nach dem freien Ende hin wird das Moment naturgemäß kleiner, weshalb die Plattenstärke allmählich bis auf 12 cm vermindert ist.

Plattenberechnung nach der durch die Leitsätze empfohlenen Methode. Wird in einzelnen Fällen die Berechnung der Spannungen nach den ministeriellen Bestimmungen verlangt, so ist in folgender Weise zu verfahren: Nach Abb. 18 ergibt sich, wenn f_e die Eiseneinlage auf die Plattenbreite b, χ den Abstand der neutralen Achse von Plattenoberkante, h die gesamte Plattenhöhe und a die Stärke der Umhüllung darstellt.

$$\frac{b \cdot \chi^2}{2} = n \cdot f_e (h - a - \chi) \text{ und daraus}$$

$$\chi = \frac{n \cdot f_e}{b}\left[\sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot (h - a)}{n \cdot f_e}} - 1\right]. \qquad \text{(a)}$$

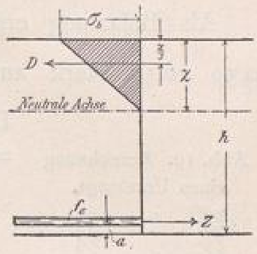


Abb. 18. Plattenberechnung nach den ministeriellen Bestimmungen.

Weiter folgt aus der Gleichung der äußeren und inneren Kräfte, wenn σ_b die Beton- und σ_e die Eisenspannung bezeichnet.

$$M = \sigma_b \cdot \frac{\chi}{2} \cdot b\left(h - a - \frac{\chi}{3}\right) = \sigma_e \cdot f_e\left(h - a - \frac{\chi}{3}\right);$$

damit wird aber $$\sigma_b = \frac{2 \cdot M}{b \cdot \chi \cdot \left(h - a - \frac{\chi}{3}\right)} \qquad \text{(b)}$$

und $$\sigma_e = \frac{M}{f_e\left(h - a - \frac{\chi}{3}\right)}. \qquad \text{(c)}$$

Die Anwendung dieser Gleichungen erfolgt dann zweckmäßig so, daß man zunächst die erforderliche Plattenstärke und Einlage nach der Tabelle II bestimmt und die so gefundenen Werte in die Gleichungen a, b und c einsetzt.

Beispiel: Die 1,8 m weit gespannte durchgehende Platte einer Plattenbalkendecke erhält eine 1,1 m hohe Erdüberschüttung. Welche Stärke und Einlage ist erforderlich, wenn die Betonspannung $k_b = 20$ kg/qcm und die Eisenspannung $k_e = 1000$ kg/qcm betragen darf. Wird die Stärke zunächst zu 0,25 m angenommen, so ergibt sich als Belastung

$$Q = 1{,}8 \cdot 1{,}0(1{,}1 \cdot 1600 + 0{,}25 \cdot 2400) = 4248 \text{ kg für das m Plattentiefe.}$$

Damit wird, da die Platten als durchgehend zu betrachten sind,

$$M = \frac{Q \cdot l}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{Q \cdot l}{10} = \frac{4248 \cdot 180}{10} = 76\,464 \text{ kgcm.}$$

Nach Tabelle II wird somit $h = 0{,}0685 \sqrt{76\,464} = 18{,}94 + 2{,}1$ cm Umhüllung $= 21$ cm und $f_e = 0{,}231 \cdot 18{,}9 = 4{,}37$ qcm; dafür genügen 9 Stück 0,8 m starke Rundeisen.

Nach den ministeriellen Bestimmungen ergeben sich mit diesen Werten folgende Spannungen:

$$\chi = \frac{15 \cdot 4{,}52}{100}\left[\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100(21 \cdot 2{,}1)}{15 \cdot 4{,}52}} - 1\right] = 4{,}43 \text{ cm,}$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 76\,464}{100 \cdot 4{,}43\left(21 - 2{,}1 - \frac{4{,}43}{3}\right)} = 19{,}8 \text{ kg/qcm,}$$

$$\sigma_e = \frac{76\,464}{4{,}52\left(21 - 2{,}1 - \frac{4{,}43}{3}\right)} = 970 \text{ kg/qcm.}$$

Diese Ergebnisse zeigen also, daß die Tabellenwerte auch den Vorschriften nach jeder Richtung hin genügen.

Die Gleichungen 9, 10 und 11, ebenso wie diejenigen a, b und c, lassen sich naturgemäß auch zur Berechnung von Balken und Unterzügen aus Eisenbeton anwenden, vorausgesetzt, daß diese nicht als Plattenbalken konstruiert werden. Die Tabelle II dagegen kann hier nicht direkt Anwendung finden, da die Breite b verschiedene Werte erhält.

Beispiel: Eine Speisesaaldecke soll zur Unterstützung der Mittelwand einen Unterzug aus Eisenbeton erhalten, dessen Breite b nicht über 30 cm beträgt. Welche Höhe und Einlage ist erforderlich, wenn die Belastung f. d. lfd. m 900 kg und die Lichtweite 5,6 m beträgt? Die Betonspannung k_b soll 40 und die Eisenspannung 1000 kg/qcm nicht überschreiten.

Als Belastung ergibt sich: Nutzlast $900 \cdot 5{,}6 = 5040$ kg, Eigengewicht für den $0{,}30 \cdot 0{,}50$ stark angenommenen Balken: $0{,}30 \cdot 0{,}50 \cdot 5{,}6 \cdot 2400 = \frac{2016 \text{ kg}}{Q = 7056 \text{ kg}}$.

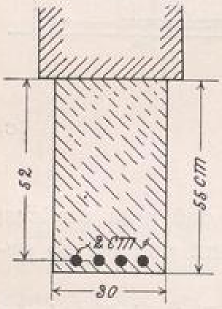


Abb. 19. Berechnung eines Unterzugs.

Die Spannweite für 0,50 m Balkenhöhe wird nun $l = 5{,}6 + 0{,}5 = 6{,}10$ m und

$$M = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{7056 \cdot 610}{8} = 538000 \text{ kgcm}.$$

Da für $k_b = 40$ und $k_e = 1000$ nach Tabelle II $\chi = 0{,}375$ ist, wird nach Gleichung 11

$$h = \sqrt{\frac{538000 \cdot 6}{40 \cdot 0{,}375\,(3 - 0{,}375) \cdot 30}} \cong 52 \text{ cm};$$

+ 3 cm Umhüllung gibt als Gesamthöhe 55 cm (Abb. 19).

Die erforderliche Einlage wird nach Gleichung 10

$$f_e = \frac{40}{1000} \cdot \frac{0{,}375}{2} \cdot 30 \cdot 52 = 11{,}67 \text{ qcm},$$

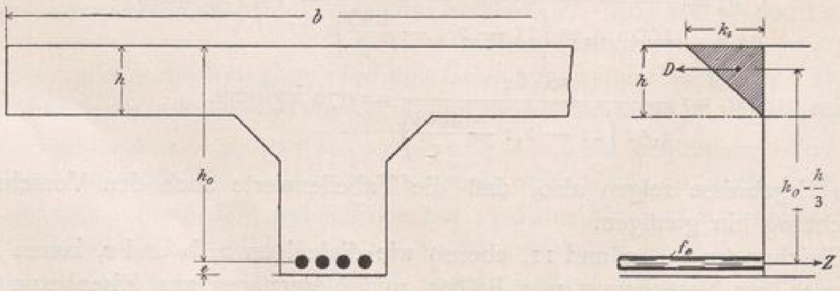
wofür 4 Stück 2 cm starke Rundeisen genügen.

Besonders beachtenswert erscheint noch, daß die Querschnittshöhe durch Verminderung der Spannung im Eisen geringer wird, während die Menge der Einlagen wächst. Es liegt demnach bis zu einem gewissen Grade in der Hand des Konstrukteurs, die Platten- und Balkenhöhen den gegebenen Verhältnissen möglichst anzupassen.

b) Plattenbalken. Die Plattenbalken haben den besonderen Vorteil, daß dort, wo die Druckspannungen im oberen Teile entstehen, auch die Deckenplatte auf eine gewisse Breite zu statischer Mitwirkung kommt. Die neutrale Achse fällt hierbei meist in die Nähe der Plattenunterkante.

Liegt sie innerhalb der Platte, ist also der Abstand χ kleiner als die Deckenstärke h, so gelten für die Berechnung dieselben Gleichungen, die für einfache Platten angegeben

Abb. 20 u. 21. Berechnung der Plattenbalken.



wurden, nur mit dem Unterschiede, daß die wirksame Breite b (Abb. 20), die nach den Leitsätzen bis $\frac{1}{3}$ der Spannweite betragen darf, einzuführen ist.

Für χ gleich h, d. h. die neutrale Achse in Plattenunterkante angenommen, wird, da $Z = D$ und der Abstand dieses Kräftepaares (vgl. Abb. 21) $h_0 - \frac{1}{3}h$ ist, $M = Z \cdot (h_0 - \frac{1}{3}h)$ und daraus

$$Z = \frac{M}{h_0 - \frac{h}{3}}. \tag{12}$$

Weiter folgt aus $Z = f_e \cdot k_e$,

$$k_e = \frac{Z}{f_e} \quad \text{oder} \quad f_e = \frac{Z}{k_e}. \tag{13}$$

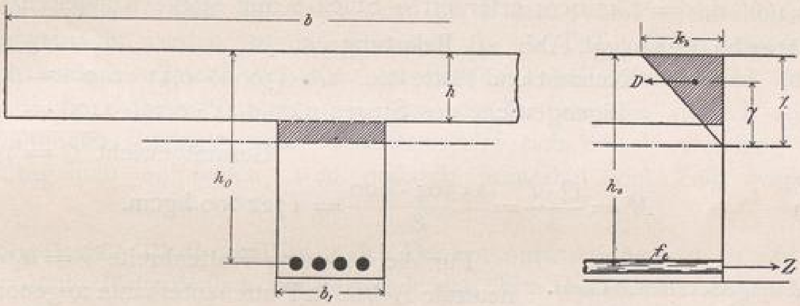
Endlich wird, da $D = Z = k_b \cdot \frac{h}{2} \cdot b$ ist,

$$k_b = \frac{2Z}{b \cdot h}. \tag{14}$$

Die Gleichungen 12 bis 14 sind besonders für Proberechnungen zu empfehlen, da man mit ihrer Hilfe die annähernd richtigen Abmessungen des erforderlichen Beton- und Eisenquerschnittes leicht bestimmen kann.

Liegt die neutrale Achse innerhalb des Steges (Abb. 22 u. 23), so wähle man für genauere Berechnungen das nachstehende Verfahren. Auch hierbei sind die geringen

Abb. 22 u. 23. Berechnung der Plattenbalken wenn χ größer als h.



im Steg entstehenden Druckspannungen und die Zugspannungen des Betons vernachlässigt. Alle Bezeichnungen behalten ihre bisherige Bedeutung, und f_e stellt auch hier den gesamten Eisenquerschnitt dar.

Setzt man wie bei den Platten: $\frac{k_e}{k_b} = \frac{E_e \cdot (h_0 - \chi)}{E_b \cdot \chi}$, so wird mit

$$\frac{E_e}{E_b} = n \qquad k_e = n \cdot k_b \frac{(h_0 - \chi)}{\chi}.$$

Ferner ist, da $Z = D$ sein muß,

$$k_e \cdot f_e = k_b \frac{b \cdot \chi}{2} - \frac{k_b(\chi - h)}{\chi} b \frac{(\chi - h)}{2} \text{ (Abb. 22 u. 23).}$$

Für k_e den gefundenen Wert gesetzt, gibt:

$$n \cdot k_b \frac{(h_0 - \chi)}{\chi} \cdot f_e = k_b \frac{b \cdot \chi}{2} - k_b \frac{(\chi - h)^2 \cdot b}{\chi \cdot 2} \text{ und daraus}$$

$$\chi = \frac{2 \cdot n \cdot h_0 \cdot f_e + h^2 b}{2(n \cdot f_e + h \cdot b)}. \tag{15}$$

Die Entfernung des Druckmittelpunktes von der neutralen Achse wird nun:

$$y = \chi - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6(2\chi - h)}. \tag{16}$$

Damit lassen sich die Druckkräfte $D = Z$ und die Spannungen k_e und k_b bestimmen; denn es ist $M = D(h_0 - \chi + y)$, woraus sich ergibt

$$D = Z = \frac{M}{h_0 - \chi + y}, \tag{17}$$

$$k_e = \frac{Z}{f_e}, \tag{18}$$

$$k_b = \frac{k_e \cdot \chi}{n(h_0 - \chi)}. \tag{19}$$

Beispiel: Die 9,0 m weit gespannte Decke eines Geschäftshauses soll durch Plattenbalken gebildet werden, deren Abstand von Mitte zu Mitte 2,6 m beträgt. Welche Abmessungen und Einlagen sind erforderlich, wenn als Nutzlast, einschließlich Fußbodenbelag, 300 kg/qm einzuführen sind und $k_b = 30$, $k_e = 1000$ kg/qcm betragen darf.

1. Platte: Belastung: Nutzlast $= 2{,}6 \cdot 1{,}0 \cdot 300 = 720$ kg,
Eigengewicht $0{,}12 \cdot 2{,}6 \cdot 1{,}0 \cdot 2400 \; . = 749$ kg,
mithin $Q \cong 1470$ kg.

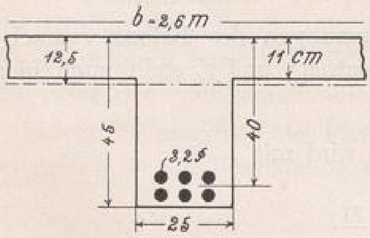
Für die Feldmitten wird $M = \dfrac{Q \cdot l}{8} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{Q \cdot l}{10} = \dfrac{1470 \cdot 260}{10} = 38\,220$ kgcm.

Mithin nach Tabelle II $h = 0{,}049 \sqrt{38\,220} = 9{,}6$ cm $+ 1{,}4$ cm Umhüllung $= 11$ cm und $f_e = 0{,}466 \cdot 9{,}6 = 4{,}47$ qcm erfordert 9 Stück 8 mm starke Rundeisen.

2. Plattenbalken: (vgl. Abb. 24) Belastung:
Nutzlast und Platte $9{,}0 \cdot 2{,}6 \cdot (300 + 0{,}11 \cdot 2400) = 13\,198$ kg,
Eigengewicht des Steges $9{,}0 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}39 \cdot 2400 = \;\; 2\,106$ kg,
Gesamtgewicht $Q = 15\,304$ kg.

Folglich $$M = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{15\,304 \cdot 900}{8} = 1\,722\,000 \text{ kgcm.}$$

Abb. 24. Berechnung eines Plattenbalkens.



Für die wirksame Plattenbreite $b = 2{,}6$ m und die neutrale Achse in Plattenunterkante angenommen, gibt nach Gleichung 12

$$Z = \frac{1\,722\,000}{40 - \frac{11}{3}} = 47\,400 \text{ kg.}$$

Mit $k_e = 1000$ wird demnach $f_e = \dfrac{47\,400}{1000} = 47{,}4$ qcm, und nach Gleichung 14

$$k_b = \frac{2 \cdot 47\,400}{260 \cdot 11} \cong 33 \text{ kg/qcm.}$$

Da $k_b = 30$ kg/qcm betragen darf, sind die Abmessungen nahezu richtig gewählt; im andern Falle wäre jetzt eine weitere Annahme zu machen und die einfache Rechnung zu wiederholen.

Da 47,4 qcm Eiseneinlage notwendig ist, werden 6 Stück 3,2 cm starke Rundeisen gewählt, die einen Gesamtquerschnitt von $f_e = 48{,}24$ qcm haben. Damit ergibt sich für die genauere Rechnung:

$$\chi = \frac{2 \cdot 15 \cdot 48{,}24 \cdot 40 + 260 \cdot 11^2}{2(15 \cdot 48{,}24 + 260 \cdot 11)} = 12{,}5 \text{ cm.}$$

Da die neutrale Achse außerhalb der Platte liegt, wird

$$y = 12{,}5 - \frac{11}{2} + \frac{11^2}{6(25 - 11)} = 8{,}4 \text{ cm,}$$

$$D = Z = \frac{M}{h_0 - \chi + y} = \frac{1\,722\,000}{35,9} = 47\,900 \text{ kg},$$

$$k_e = \frac{Z}{f_e} = \frac{47\,900}{48,24} = 993 \text{ kg},$$

$$k_b = \frac{k_e \cdot \chi}{n(h_0 - \chi)} = \frac{993 \cdot 12,5}{15(40 - 12,5)} = 30,05 \text{ kg}.$$

Wegen der Berechnung der Bügel siehe § 13, b, β.

Ein Vergleich der gefundenen Spannungen mit den zuerst ermittelten läßt erkennen, daß es in solchen Fällen vielfach genügt, wenn die neutrale Achse in Plattenunterkante angenommen wird. Um vollständig sicher zu gehen, empfiehlt es sich, nach der ersten Berechnung noch χ genau zu bestimmen; zeigt dieser Wert nur geringe Abweichungen von h, so kann die weitere Rechnung ohne Bedenken unterbleiben.

Auch hier könnten nun in ähnlicher Weise wie bei den Platten direkte Dimensionierungsformeln entwickelt werden, doch erhalten diese eine ziemlich umständliche Form, da die Balkenhöhe auch von der Plattenstärke und der wirksamen Plattenbreite abhängig ist. Man kommt deshalb meist schneller zum Ziel, wenn die annähernd richtigen Abmessungen zunächst nach den Gleichungen 12 bis 14 bestimmt und dann, wie in dem vorstehenden Beispiel, mit den genaueren Formeln 15 bis 19 nachgerechnet werden.

Etwas einfachere Formen entstehen, wenn die Balken- und Plattenhöhe in bestimmte Verhältnisse gebracht werden, so daß h immer als ein Teil von h_0 eingeführt werden kann. Doch auch hier lassen sich die betreffenden Tabellenwerte nicht immer direkt verwenden, da die Balkenentfernung und damit die Plattenstärke vielfach von den örtlichen Verhältnissen abhängig sind. Trotzdem wird sich ihre Verwendung in Spezialbureaus naturgemäß empfehlen, weil dadurch immerhin viel Zeit gespart werden kann.

c) Durchgehende Plattenbalken. Bei Deckenkonstruktionen ist es oft notwendig, daß weitgespannte Plattenbalken zur Verminderung ihres Querschnitts eine oder mehrere Unterstützungen erhalten. Wählt man nun hierzu einfache Säulen aus Eisenbeton oder Eisen, so ist es nicht immer möglich, daß die Balken auf diesen verhältnismäßig schmalen Stützpunkten gestoßen werden. Damit entstehen aber die sogenannten durchgehenden Balken, die besondere Untersuchungen erfordern.

Bei diesen Konstruktionen ergeben sich wohl innerhalb der Felder positive Momente, d. h. die Zugspannungen wirken im unteren Teil, über den Stützpunkten aber treten negative Momente auf, die eine Zugbeanspruchung der obersten Fasern zur Folge haben. Während also innerhalb der Felder der Plattenbalken als solcher statisch zur Wirkung kommt, ist über den Stützen nur der einfache rechteckige Balkenquerschnitt zu berücksichtigen, da die in der Zugzone gelegene Betonplatte keine Zugspannungen aufnehmen kann.

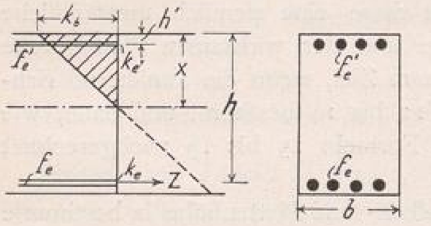
Die Rechnungen sind deshalb entweder so durchzuführen, daß der über den Stützen notwendige Balkenquerschnitt bestimmt und auf die ganze Länge durchgeführt wird, oder man ermittelt die erforderlichen Querschnitte für die Stützpunkte und Felder, letztere mit Rücksicht auf die Wirkung als Plattenbalken, und führt die eine Höhe allmählich in die andere über. Die sichtbare Trägerhöhe würde also verschieden groß. Dieser Umstand beeinträchtigt das gute Aussehen der Konstruktion indessen nicht so stark als verschiedentlich angenommen wird. Man sollte deshalb bei Decken für architektonisch nicht hervorragende Innenräume keine Bedenken gegen diese wirtschaftlich günstigste Anordnung tragen. Bei Hallen, Überdachungen und dgl. ist es außerdem möglich, die

Verstärkung über den Stützen nach oben zu verlegen, so daß die Innenansicht der Balken gleichmäßig stark bleibt.

Ist es in einzelnen Fällen nicht angängig, daß eine Verstärkung nach oben oder unten durchgeführt wird und sollen die wirtschaftlichen Vorteile trotzdem möglichst ausgenutzt werden, so kann man die Balkenstärke der Felder eventuell auch über den Stützen beibehalten. Dadurch werden naturgemäß größere Spannungen im Beton und Eisen bedingt, die durch eine besondere Einlage in der Druckzone aufzunehmen sind. Hier wird demnach eine doppelte Armierung notwendig, deren Berechnung sich aus folgendem ergibt.

d) Doppelte Armierung rechteckiger Querschnitte. Soll ein rechteckiger Platten- oder Balkenquerschnitt außer der Zugarmierung auch in der Druckzone eine Einlage erhalten, so ergibt sich mit den Bezeichnungen der Abb. 25 und 26, da Zug und Druck gleich sind,

Abb. 25 u. 26. Berechnung einer doppelten Armierung.



$$f_e \cdot k_e = k_b \cdot \frac{\chi}{2} \cdot b + f_e' \cdot k_e'. \tag{20}$$

Ferner verhält sich wie früher bei den Platten

$$\frac{k_b}{E_b} : \frac{k_e}{E_e} = \chi : h - \chi, \tag{21}$$

oder auch

$$\frac{k_b}{E_b} : \frac{k_e'}{E_e} = \chi : \chi - h'. \tag{22}$$

Das innere Moment mit Bezug auf den Angriffspunkt von Z als Drehpunkt wird nun

$$M = k_b \cdot \frac{\chi}{2} \cdot b\left(h - \frac{\chi}{3}\right) + f_e' \cdot k_e'(h - h'). \tag{23}$$

Setzt man wieder $\frac{E_e}{E_b} = n$, so ergibt sich aus Gleichung 21

$$k_e = \frac{n \cdot k_b(h - \chi)}{\chi} \tag{24}$$

und aus Gleichung 22

$$k_e' = \frac{n \cdot k_b(\chi - h')}{\chi}. \tag{25}$$

Mit Einsetzen dieser Werte in die Gleichung 20 erhält man zur Bestimmung von χ die quadratische Gleichung

$$\chi^2 + 2\chi \cdot n\frac{f_e + f_e'}{b} = \frac{2n}{b}(h \cdot f_e + h' \cdot f_e') \tag{26}$$

und damit aus Gleichung 23

$$k_b = \frac{M \cdot \chi \cdot 6}{b \cdot \chi^2 \cdot (3h - \chi) + 6 \cdot f_e' \cdot n(\chi - h') \cdot (h - h')}. \tag{27}$$

Für den Gang der Rechnung ergibt sich demnach, daß man nach Annahme der einzelnen Abmessungen zunächst den Abstand χ der neutralen Achse bestimmt, dann die Betonspannung k_b und mit dieser k_e bzw. k_e' ermittelt.

Da Versuchsrechnungen mit den Gleichungen 26 und 27 immerhin einen gewissen Zeitaufwand erfordern, hat man schon mehrfach versucht, auch für solche Fälle Dimensionierungsformeln aufzustellen. Da aber der Balkenquerschnitt gewöhnlich schon durch das Moment in Feldmitte bestimmt ist und die zulässigen Höhen und Breiten für Unterzüge usw. meist mit Rücksicht auf die architektonische Ausgestaltung zu wählen sind, kommt es in der Hauptsache nur auf die Ermittelung der notwendigen Einlagen in der Druck- und Zugzone an. Für diese ergibt sich nach SALINGER (der Eisenbeton in

Theorie und Konstruktion), wenn k die größte Biegungsspannung ohne Rücksicht auf die vorhandenen Einlagen, $\left(k = \frac{M}{W}\right)$ und μ' bzw. μ die anteilige Druck- bzw. Zugarmierung bezeichnet, folgende Tabelle III.

k_e	k_b	μ'	μ	k
1000	50	$\frac{k - 55{,}1}{2790}$	$0{,}0107 + 0{,}53\,\mu'$	$55{,}1 + 2790\,\mu'$
1000	40	$\frac{k - 39{,}4}{2100}$	$0{,}0075 + 0{,}40\,\mu'$	$39{,}4 + 2100\,\mu'$
1000	33,3	$\frac{k - 29{,}6}{1640}$	$0{,}0056 + 0{,}31\,\mu'$	$29{,}6 + 1640\,\mu'$
1000	28,6	$\frac{k - 23{,}1}{1310}$	$0{,}0043 + 0{,}25\,\mu'$	$23{,}1 + 1310\,\mu'$
1000	25	$\frac{k - 18{,}6}{1070}$	$0{,}0034 + 0{,}20\,\mu'$	$18{,}6 + 1070\,\mu'$

Mit diesen Werten läßt sich bei gegebenen Balkenquerschnitt und Biegungsmoment zunächst k und dann die erforderliche Druck- und Zugeinlage direkt bestimmen, so daß die nach den Gleichungen 24, 25 und 27 berechneten Spannungen sofort die zulässigen Größen erhalten.

Abb. 27 bis 29. Berechnung eines durchgehenden Plattenbalkens.

Abb. 27. Schnitt *ab*.

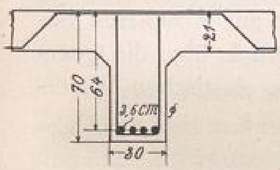


Abb. 28. Schnitt *AB*.

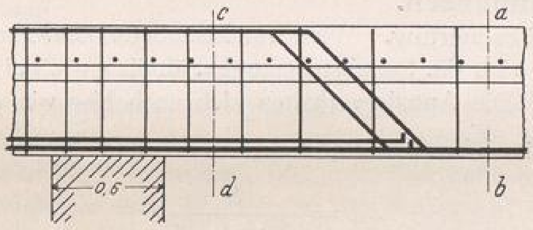
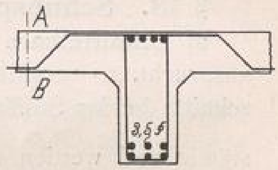


Abb. 29. Schnitt *cd*.



Beispiel: Der aus Abb. 27 bis 29 ersichtliche Plattenbalken soll als durchgehender Träger über eine 60 auf 30 cm starke Mittelstütze geführt werden. Welche Zug- und Druckeinlagen muß er über der Stütze erhalten, wenn die Spannweite der zwei Felder je 6,70 m und die gleichmäßig verteilte Belastung für jedes Feld 27454 kg beträgt. Die größten Spannungen sollen 40 kg/qcm im Beton und 1000 kg/qcm im Eisen nicht überschreiten.

Das Maximalmoment über der Mittelstütze ist negativ und wird für gleichmäßige Belastung und gleich große Feldweiten bei Balken auf 3 Stützen

$$M = -\frac{Q \cdot l}{8} = -\frac{27454 \cdot 670}{8} = 2299272 \text{ kg/cm}.$$

Da hiernach die Zugspannungen im oberen Teil entstehen, kommt nur der rechteckige 30 mal 64 cm starke Balkenquerschnitt zur Wirkung. Für diesen ergibt sich

$$k = \frac{M}{W} = \frac{2\,299\,272}{\frac{30 \cdot 64^2}{6}} = 112 \text{ kg/qcm}.$$

Damit wird nach Tabelle III mit $k_b = 40$ und $k_e = 1000$ kg/qcm.

$$\mu' = \frac{112 - 39{,}4}{2100} = 0{,}035 \text{ und die erforderliche Druckeinlage}$$

$$f_e' = \mu' \cdot f_b = 0{,}035 \cdot 30 \cdot 64 = 58{,}2 \text{ qcm}.$$

Ebenso wird $\mu = 0{,}0075 + 0{,}40 \cdot \mu' = 0{,}0075 + 0{,}40 \cdot 0{,}035 = 0{,}0217$ und die erforderliche Zugeinlage $f_e' = \mu \cdot f_b = 0{,}0217 \cdot 30 \cdot 64 = 41{,}66$ qcm. Wählt man nun entsprechend den gefundenen Werten als Druckeinlage 6 Stück Rundeisen mit 3,5 cm Durchmesser, so wird $f_e' = 57{,}73$ qcm.

Ebenso ergibt sich für die Zugarmierung mit 4 Rundeisen von je 3,6 cm Durchmesser $f_e = 40{,}4$ qcm (vgl. Abb. 27 bis 29). Damit wird nach Gleichung 26

$$\chi + 2\chi \cdot 15 \frac{40{,}4 + 57{,}73}{30} = \frac{2 \cdot 15}{30}(64 \cdot 40{,}4 + 6 \cdot 57{,}73)$$

und daraus $\chi = 24{,}01$ cm von unten gemessen.

Nach Gleichung 27 wird ferner

$$k_b = \frac{2\,299\,272 \cdot 24{,}01 \cdot 6}{30 \cdot 24{,}01^2 (3 \cdot 64 - 24{,}01) + 6 \cdot 57{,}73 \cdot 15\,(24{,}01 - 6) \cdot 64 - 6)} = 39{,}77 \text{ kg/qcm}$$

und nach Gleichung 24 bzw. 25

$$k_e = \frac{15 \cdot 39{,}77\,(64 - 24{,}01)}{24{,}01} = 993 \text{ kg/qcm},$$

$$k_e' = \frac{15 \cdot 39{,}77\,(24{,}01 - 6)}{24{,}01} = 447 \text{ kg/qcm}.$$

Die Druckarmierung kann also auch hier, wie schon bei den Stützen festgestellt wurde, nicht bis zur Grenze beansprucht werden; k_b und k_e dagegen zeigen, daß die benutzte Tabelle eine gute Unterlage für die Dimensionierung darstellt.

§ 13. Schubspannungen.

a) Unmittelbare Abscherung. Wird ein Eisenbetonquerschnitt auf Abscheren beansprucht, so verteilen sich die Schubspannungen, ähnlich wie bei Druck, über die Querschnitte beider Stoffe. Die Anteile verhalten sich auch hier wie die elastischen Widerstände und werden mit $\frac{E_e}{E_b} = n$, für Beton

$$k_{bs} = \frac{S}{f_b + f_e \cdot n} \tag{28}$$

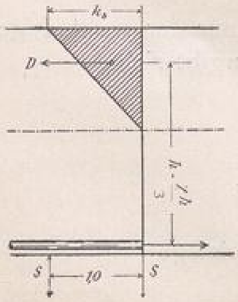
und für Eisen

$$k_{es} = \frac{S}{\frac{f_b}{n} + f_e}. \tag{29}$$

Hierbei bedeuten wie früher f_b und f_e die Querschnittsflächen und S die in diesen wirkende Schubkraft.

b) Abscherung in Platten und Plattenbalken. *α) Platten.* Die Schubkraft ist bei den auf Biegung beanspruchten Platten und Balken über den Auflagern am größten. Sie erzeugt Spannungen, die in der neutralen Achse des Betonquerschnittes und am Umfange der Eiseneinlage auf Abscheren wirken.

Abb. 30. Berechnung der Schubkraft in Platten.



Bezeichnet S die Schubkraft für einen beliebigen Querschnitt und $h - \frac{\chi \cdot h}{3}$ den Abstand von D und Z (Abb. 30), so besteht die Momentengleichung:

$$D \cdot \left(h - \frac{\chi \cdot h}{3}\right) = S \cdot 1{,}00,$$

woraus sich ergibt $$D = \frac{S \cdot 1{,}00}{h - \frac{\chi \cdot h}{3}}.$$