Lehrbuch des Hochbaues

Grundbau, Steinkonstruktionen, Holzkonstruktionen, Eisenkonstruktionen , Eisenbetonkonstruktionen

Esselborn, Karl

Leipzig, 1908

a) Platten

urn:nbn:de:hbz:466:1-50294

§ 12. Biegungsfestigkeit. Wie bekannt, berechnet sich die Biegungsfestigkeit homogener Körper mit konstantem Elastizitätsmodul nach der allgemeinen Gleichung

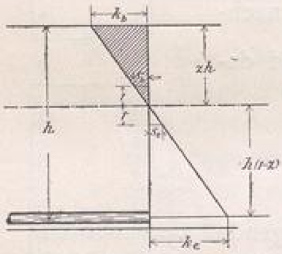
$$k = \frac{M}{W}.$$

Macht man bei Berechnung der Eisenbetonkonstruktionen dieselben Annahmen wie für die obige Gleichung, nämlich, daß die einzelnen Querschnitte auch nach der Durchbiegung noch eben sind, so wird die Rechnungsweise dadurch wesentlich vereinfacht. Diese Annahme erscheint um so mehr zulässig, als die nach dieser Richtung hin gemachten Versuche keine großen Abweichungen von den so gewonnenen Rechnungsergebnissen zeigen.

Wird ein gerader Balken auf Biegung beansprucht, so entsteht bekanntlich in einem Teile Druckspannung (D), im andern Teile Zugspannung (Z). Die Druckspannung kann nun durch den Beton aufgenommen werden, während zur Aufnahme der Zugspannungen eine Eiseneinlage erforderlich ist. Denn obgleich auch der Beton eine gewisse Zugspannung aushalten kann, empfiehlt es sich doch, diese zu vernachlässigen, da hierdurch die Rechnungen wesentlich einfacher und die Konstruktionen sicherer werden.

a) **Platten.** Zur Entfernung des inneren Momentes, das dem äußeren gleich zu setzen ist, muß zunächst der Abstand χh, der neutralen Achse von Plattenoberkante bestimmt werden (Abb. 15). Bezeichnet S_b die Spannung des Betons im Abstand 1 von der neutralen Achse, so wird die größte Beanspruchung

Abb. 15. Abstand der neutralen Achse von Plattenoberkante.



$$k_b = S_b \cdot \chi h.$$

Ist ferner S_e die Spannung des Eisens im Abstand 1, so wird die maximale Spannung desselben

$$k_e = S_e (h - \chi h) = S_e \cdot h (1 - \chi).$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

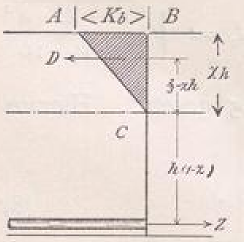
$$\frac{k_e}{k_b} = \frac{S_e \cdot h (1 - \chi)}{S_b \cdot h \cdot \chi}.$$

Da nun $\frac{S_e}{S_b}$ den Elastizitätsgrößen beider Stoffe entspricht, kann wieder wie früher gesetzt werden:

$$\frac{S_e}{S_b} = \frac{E_e}{E_b} = n. \text{ Damit wird}$$

$$\frac{k_e}{k_b} = n \cdot \frac{(1 - \chi)}{\chi}. \tag{9}$$

Abb. 16. Spannungsdreieck.



Wählt man nun k_e, k_b und n, so läßt sich aus dieser Gleichung χ leicht bestimmen. Z. B. für $k_e = 1000$ kg/qcm, $k_b = 40$ kg/qcm und n wie oben $= 15$, wird $\frac{1000}{40} = 15 \frac{(1 - \chi)}{\chi}$, woraus sich $\chi = \frac{3}{8}$ ergibt; d. h. die neutrale Achse liegt um $\frac{3}{8}$ der Höhe von der Plattenoberkante entfernt und nur dieser Teil wird auf Druck beansprucht.

Die Größe des Druckes in einer Ebene wird durch das Dreieck ABC (Abb. 16) dargestellt. Ein Prisma, welches dieses sog. Spannungsdreieck zur Grundfläche und die Querschnittsbreite b zur Höhe hat, stellt demnach den gesamten Druck D des Betons dar, es wird also

$$D = k_b \cdot \frac{\chi h}{2} \cdot b.$$

Da nun Druck und Zug gleich groß sind und der Eisenquerschnitt f_e den entstehenden Zug allein aufnehmen soll, muß $f_e \cdot k_e = k_b \cdot \frac{\chi \cdot h}{2} \cdot b$ sein und folglich

$$f_e = \frac{k_b}{k_e} \cdot \frac{\chi}{2} \cdot b \cdot h. \tag{10}$$

Hieraus ist der Querschnitt des erforderlichen Eisens zu berechnen, wenn der Betonquerschnitt bekannt ist.

Das innere Biegungsmoment M und damit die Plattenhöhe h ergeben sich aus dem Moment des Kräftepaares D und Z in Abb. 16. Der Abstand dieser Kräfte ist $\frac{2}{3}\chi h + h(1 - \chi)$. Da nun $D = Z$ ist, ergibt sich:

$$M = D \tfrac{2}{3}\chi \cdot h + D \cdot h(1 - \chi) = D[\tfrac{2}{3}\chi \cdot h + h(1 - \chi)].$$

Setzt man darin für D den gefundenen Wert ein, so wird

$$M = k_b \cdot \frac{\chi}{2} \cdot h \cdot b[\tfrac{2}{3}\chi \cdot h + h(1 - \chi)] = k_b \cdot \frac{\chi}{2} \cdot b \cdot h^2 \cdot \frac{3 - \chi}{3},$$

und daraus die Plattenhöhe

$$h = \sqrt{\frac{M \cdot 6}{k_b \cdot \chi\,(3 - \chi) \cdot b}}. \tag{11}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich demnach die Plattenhöhe h direkt bestimmen. Zu dieser Höhe h ist noch ein gewisses Maß für Umhüllung der Eiseneinlagen zuzugeben und zwar wählt man dasselbe mindestens gleich der Eisenstärke (vgl. auch den Abschnitt D).

Beispiel: Eine 3,85 m weit gespannte, freiaufliegende Deckenplatte wird mit 500 kg/qm (Nutzlast und Eigengewicht) belastet. Welche Stärke und Eiseneinlage muß diese Platte erhalten, wenn die Bruchfestigkeit des Betons = 240 kg/qcm ist und die zulässige Spannung im Eisen 1000 kg/qcm betragen darf.

k_b kann nach den Leitsätzen gleich $\frac{1}{6}$ der Bruchfestigkeit gesetzt werden, folglich $k_b = \frac{240}{6} = 40$ kg/qcm; n sei wie früher $= 15$. Das äußere Moment ergibt sich für Balken auf 2 Stützen mit gleichmäßig verteilter Belastung zu $M = \frac{Q \cdot l}{8}$.

Für $b = 1{,}0$ m Plattentiefe wird die Belastung $Q = 1{,}0 \cdot 3{,}85 \cdot 500 = 1925$ kg. Die Stützweite l ist gleich der Lichtweite + Deckenstärke zu setzen; nimmt man die letztere zu 0,15 m an, so wird $l = 3{,}85 + 0{,}15 = 4{,}00$ m und somit $M = \frac{1925 \cdot 400}{8} = 96\,250$ kgcm.

Nach Gleichung 9 ist $\frac{1000}{40} = 15\,\frac{(1 - \chi)}{\chi}$ und daraus $\chi = \frac{3}{8}$.

Damit wird nach Gleichung 11 $h = \sqrt{\frac{M \cdot 6}{k_b \cdot \chi\,(3 - \chi) \cdot b}}$, folglich

$$h = \sqrt{\frac{96\,250 \cdot 6}{40 \cdot \frac{3}{8}(3 - \frac{3}{8}) \cdot 100}} \cong 12{,}1 \text{ cm};$$

hierzu als Umhüllung der Eiseneinlagen 1,9 cm, gibt die gesamte Plattenhöhe zu 14 cm.

Die erforderliche Eiseneinlage bestimmt sich nach Gleichung 10 zu:

$$f_e = \frac{40}{1000} \cdot \frac{3}{8 \cdot 2} \cdot 100 \cdot 12{,}1 \cong 9{,}10 \text{ qcm}.$$

Wählt man Rundeisen mit 1,1 cm Durchmesser, so sind deren 10 Stück erforderlich, d. h. auf 1,00 m Plattentiefe sind 10 Stück anzuordnen, deren Abstände sich dann zu $\frac{100}{10} = 10$ cm ergeben.

Eine wesentliche Vereinfachung dieser Rechnungsweise ist durch nachstehende Tabelle II geschaffen, die mit Benutzung der oben entwickelten Formeln für $n = 15$ und $k_e = 1000$ kg/qcm berechnet ist.

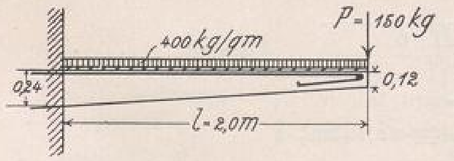
k_b kg/qcm	k_e kg/qcm	Plattenstärke h in cm bis Mitte Eiseneinlage	Eisenquerschnitt für 1,0 m Plattenbreite: f_e in qcm	Abstand der neutralen Faser von Plattenoberkante	Bemerkungen
20	1000	$0{,}0685\sqrt{M}$	$0{,}231 \cdot h$	$0{,}231 \cdot h$	M ist in kgcm einzusetzen. Die gesamte Plattenhöhe ist h + Umhüllung und zwar beträgt diese je nach der Stärke der Einlagen 1 bis 2 cm.
22	1000	$0{,}0632\sqrt{M}$	$0{,}273 \cdot h$	$0{,}247 \cdot h$	
25	1000	$0{,}0568\sqrt{M}$	$0{,}341 \cdot h$	$0{,}273 \cdot h$	
28	1000	$0{,}0518\sqrt{M}$	$0{,}414 \cdot h$	$0{,}295 \cdot h$	
30	1000	$0{,}0490\sqrt{M}$	$0{,}466 \cdot h$	$0{,}310 \cdot h$	
32	1000	$0{,}0465\sqrt{M}$	$0{,}519 \cdot h$	$0{,}324 \cdot h$	
35	1000	$0{,}0433\sqrt{M}$	$0{,}603 \cdot h$	$0{,}344 \cdot h$	
38	1000	$0{,}0410\sqrt{M}$	$0{,}690 \cdot h$	$0{,}363 \cdot h$	
40	1000	$0{,}0390\sqrt{M}$	$0{,}750 \cdot h$	$0{,}375 \cdot h$	
42	1000	$0{,}0376\sqrt{M}$	$0{,}811 \cdot h$	$0{,}386 \cdot h$	
45	1000	$0{,}0357\sqrt{M}$	$0{,}907 \cdot h$	$0{,}403 \cdot h$	
48	1000	$0{,}0340\sqrt{M}$	$1{,}000 \cdot h$	$0{,}419 \cdot h$	
50	1000	$0{,}0330\sqrt{M}$	$1{,}071 \cdot h$	$0{,}429 \cdot h$	

Diese Tabelle läßt sich auch für andere Beanspruchungen im Beton und Eisen leicht erweitern; ebenso kann für n ein anderer Wert, z. B. 10, eingesetzt werden. Für die meisten Fälle der Praxis genügen die hier bestimmten Werte indessen vollkommen, so daß weitere Rechnungen und auch besondere Tabellenwerke, die zum Teil recht umständlich sind, nicht erforderlich werden. Die praktische Verwendung der Tabelle zeigt sich in folgenden Beispielen:

1. Für das Beispiel auf S. 433 wurde das Moment zu $M = 96\,250$ kgcm ermittelt. Dafür ergibt sich nach Tabelle II, wenn $k_b = 40$ und $k_e = 1000$ kg/qcm betragen darf. $h = 0{,}039\sqrt{96\,250} = 12{,}1 + 1{,}9$ cm Umhüllung $= 14$ cm Plattenhöhe; die Einlage $f_e = 0{,}75 \cdot 12{,}1 = 9{,}08$ qcm, wofür 10 Stück 11 mm starke Rundeisen f. d. lfd. m genügen. Ein Vergleich der Resultate ergibt, daß beide Werte mit den früher ermittelten genau übereinstimmen.

2. Die 2,0 m weit auskragende Galerie eines Saales (Abb. 17) soll durch eine Eisenbetonplatte gebildet werden, deren Beanspruchungen $k_b = 30$ und $k_e = 1000$ kg/qcm betragen dürfen. Als Nutzlast sind 400 kg/qm anzunehmen; außerdem ist das lfd. m Geländer mit 150 kg und das Eigengewicht der Platte mit 3 cm starker Asphaltabdeckung in der üblichen Weise einzuführen. Die Belastungen sind demnach: Nutzlast $2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 400 = 800$ kg, Eigengewicht (mittlere Plattenstärke $0{,}18 + 0{,}03$ Überd.) $0{,}21 \cdot 2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 2400 = 1008 = Q \cong 1800$ kg; Geländergewicht $P = 150$ kg. Damit wird $M = 1800 \cdot 100 + 150 \cdot 200 = 210\,000$ kgcm, und die Plattenstärke an der Einspannungsstelle nach Tabelle II $h = 0{,}049\sqrt{210\,000} = 22{,}4 + 1{,}6$ cm Umhüllung $= 24$ cm.

Abb. 17. Berechnung der Galerie eines Saales.



Ferner ist die Einlage $f_e = 0{,}466 \cdot 22{,}4 = 10{,}45$ qcm, wofür 10 Stück 1,2 cm starke Rundeisen genügen. Nach dem freien Ende hin wird das Moment naturgemäß kleiner, weshalb die Plattenstärke allmählich bis auf 12 cm vermindert ist.

Plattenberechnung nach der durch die Leitsätze empfohlenen Methode. Wird in einzelnen Fällen die Berechnung der Spannungen nach den ministeriellen Bestimmungen verlangt, so ist in folgender Weise zu verfahren: Nach Abb. 18 ergibt sich, wenn f_e die Eiseneinlage auf die Plattenbreite b, χ den Abstand der neutralen Achse von Plattenoberkante, h die gesamte Plattenhöhe und a die Stärke der Umhüllung darstellt.

$$\frac{b \cdot \chi^2}{2} = n \cdot f_e (h - a - \chi) \quad \text{und daraus}$$

$$\chi = \frac{n \cdot f_e}{b}\left[\sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot (h - a)}{n \cdot f_e}} - 1\right]. \qquad \text{(a)}$$

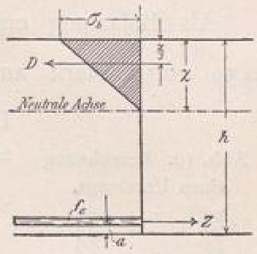


Abb. 18. Plattenberechnung nach den ministeriellen Bestimmungen.

Weiter folgt aus der Gleichung der äußeren und inneren Kräfte, wenn σ_b die Beton- und σ_e die Eisenspannung bezeichnet.

$$M = \sigma_b \cdot \frac{\chi}{2} \cdot b \left(h - a - \frac{\chi}{3}\right) = \sigma_e \cdot f_e \left(h - a - \frac{\chi}{3}\right);$$

damit wird aber
$$\sigma_b = \frac{2 \cdot M}{b \cdot \chi \cdot \left(h - a - \frac{\chi}{3}\right)} \qquad \text{(b)}$$

und
$$\sigma_e = \frac{M}{f_e \left(h - a - \frac{\chi}{3}\right)}. \qquad \text{(c)}$$

Die Anwendung dieser Gleichungen erfolgt dann zweckmäßig so, daß man zunächst die erforderliche Plattenstärke und Einlage nach der Tabelle II bestimmt und die so gefundenen Werte in die Gleichungen a, b und c einsetzt.

Beispiel: Die 1,8 m weit gespannte durchgehende Platte einer Plattenbalkendecke erhält eine 1,1 m hohe Erdüberschüttung. Welche Stärke und Einlage ist erforderlich, wenn die Betonspannung $k_b = 20$ kg/qcm und die Eisenspannung $k_e = 1000$ kg/qcm betragen darf. Wird die Stärke zunächst zu 0,25 m angenommen, so ergibt sich als Belastung

$$Q = 1{,}8 \cdot 1{,}0 (1{,}1 \cdot 1600 + 0{,}25 \cdot 2400) = 4248 \text{ kg für das m Plattentiefe.}$$

Damit wird, da die Platten als durchgehend zu betrachten sind,

$$M = \frac{Q \cdot l}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{Q \cdot l}{10} = \frac{4248 \cdot 180}{10} = 76\,464 \text{ kgcm.}$$

Nach Tabelle II wird somit $h = 0{,}0685 \sqrt{76\,464} = 18{,}94 + 2{,}1$ cm Umhüllung $= 21$ cm und $f_e = 0{,}231 \cdot 18{,}9 = 4{,}37$ qcm; dafür genügen 9 Stück 0,8 m starke Rundeisen.

Nach den ministeriellen Bestimmungen ergeben sich mit diesen Werten folgende Spannungen:

$$\chi = \frac{15 \cdot 4{,}52}{100}\left[\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100 (21 \cdot 2{,}1)}{15 \cdot 4{,}52}} - 1\right] = 4{,}43 \text{ cm,}$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 76\,464}{100 \cdot 4{,}43 \left(21 - 2{,}1 - \frac{4{,}43}{3}\right)} = 19{,}8 \text{ kg/qcm,}$$

$$\sigma_e = \frac{76\,464}{4{,}52 \left(21 - 2{,}1 - \frac{4{,}43}{3}\right)} = 970 \text{ kg/qcm.}$$

Diese Ergebnisse zeigen also, daß die Tabellenwerte auch den Vorschriften nach jeder Richtung hin genügen.

Die Gleichungen 9, 10 und 11, ebenso wie diejenigen a, b und c, lassen sich naturgemäß auch zur Berechnung von Balken und Unterzügen aus Eisenbeton anwenden, vorausgesetzt, daß diese nicht als Plattenbalken konstruiert werden. Die Tabelle II dagegen kann hier nicht direkt Anwendung finden, da die Breite b verschiedene Werte erhält.