Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

Zweyter Abschnitt. Von der unbestimmten Analytik.

Des

Zweyten Theils
Zweyter Abschnitt.

Von
der unbestimmten Analytik.

Des Zweyten Theils Zweyter Abschnitt.

Von der unbestimmten Analytik.

I. Capitel.

Von der Auflösung solcher einfachen Gleichungen, in welchen mehr als eine unbekannte Zahl vorkömmt.

§. 1.

Wir haben oben gesehen, da eine einzige unbekannte Zahl auch nur eine einzige Gleichung erfordert, zwey unbekannte Zahlen aber durch zwey Gleichungen, 3 durch 3, 4 durch 4 u. s. f. bestimmt werden können; so daß jedesmal eben so viel Gleichungen erfordert werden, als unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen, wenn anders die Aufgabe selbst bestimmt ist.

Wenn aber nicht so viel Gleichungen aus den in der Aufgabe bekannt gemachten Umständen gezogen werden können, als unbekannte Zahlen angenommen worden sind, so bleiben einige unbestimmt, und bleiben unserer Willkühr überlassen; daher solche Aufgaben unbestimmte genannt werden, und es machen diese einen eigenen Theil der Analytik aus, welche man die **unbestimmte Analytik** zu nennen pflegt.

§. 2.

Da in diesen Fällen eine oder mehrere unbekannte Zahlen nach Belieben angenommen werden können, so finden hier mehrere Auflösungen Statt.

Allein es wird gewöhnlich die Bedingung hinzu gefügt, daß die gesuchten Zahlen ganze, und so gar positive, oder wenigstens Rationalzahlen seyn sollen, wodurch die Anzahl der möglichen Auflösungen sehr eingeschränkt wird, so daß oft nur etliche wenige, oft zwar auch unendlich viele, welche aber nicht so leicht in die Augen fallen, Statt finden, zuweilen auch nicht einmal eine einzige möglich ist. Daher dieser Theil der Analytik nicht selten ganz besondere Kunstgriffe erfordert, und sehr dazu dient den Verstand der Anfänger aufzuklären, und ihnen eine größere Fertigkeit in algebraischen Arbeiten beyzubringen.

§. 3.

Wir wollen mit einer der leichtesten Aufgaben den Anfang machen, und **zwey ganze positive Zahlen suchen, deren Summe 10 seyn soll.**

Diese Zahlen seyen nun x und y, so ist $x + y = 10$; hieraus findet man $x = 10 - y$, so daß y nicht anders bestimmt wird, als daß es eine ganze und positive Zahl seyn soll. Man könnte daher für y alle ganze Zahlen von 1 bis ins Unendliche annehmen. Da aber x auch positiv seyn muß, so kann y nicht größer als 10 angenommen werden, weil sonst x negativ seyn würde; und wenn auch o nicht gelten soll, so kann y höchstens 9 gesetzt werden, weil sonst $x = 0$ würde; es finden daher nur die folgenden Auflösungen Statt:

wenn $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$
so wird $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Von diesen neun Auflösungen aber sind die vier letztern mit den vier erstern einerley, daher in allem nur fünf verschiedene Auflösungen möglich sind.

Sollten drey Zahlen verlangt werden, deren Summe 10 wäre, so dürfte man nur die eine der hier gefundenen beyden Zahlen wiederum in zwey Theile zertheilen, wodurch man eine größere Menge Auflösungen erhalten würde.

§. 4.

Von dieser überaus leichten Aufgabe wollen wir zu etwas schwereren fortschreiten.

I. Aufg. Man soll 25 in zwey Theile zertheilen, wovon der eine sich durch 2, der andere aber durch 3 theilen läßt, beyde aber ganze und positive Zahlen sind.

Es sey der eine Theil $2x$, der andere $3y$, so muß seyn $2x + 3y = 25$. Also $2x = 25 - 3y$. Man theile durch 2, so kömmt $x = \frac{25 - 3y}{2}$, woraus wir zuerst sehen, daß $3y$ kleiner seyn muß als 25, und daher y nicht größer als 8. Man ziehe so viel Ganze daraus, als möglich, d. i. man dividire den Zähler $25 - 3y$ durch den Nenner 2, so wird $x = 12 - y + \frac{1 - y}{2}$; also muß sich $1 - y$, oder auch $y - 1$ durch 2 theilen lassen. Man setze daher $y - 1 = 2z$ und also $y = 2z + 1$, so wird $x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z$. Weil nun y nicht

nicht größer seyn kann als 8, so können auch für z keine andere Zahlen angenommen werden, als solche, die $2z + 1$ nicht größer geben als 8. Folglich muß z kleiner seyn als 4; daher z nicht größer als 3 angenommen werden kann, woraus diese Auflösungen folgen:

Setzt man $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$,
so wird $y = 1$, $y = 3$, $y = 5$, $y = 7$,
und $x = 11$, $x = 8$, $x = 5$, $x = 2$.

Daher die gesuchten zwey Theile von 25 seyn werden:

I.) $22 + 3$, II.) $16 + 9$, III.) $10 + 15$, IV.) $4 + 21$.

§. 5.

II. Aufg. Man theile 100 in zwey Theile, so daß der erste sich durch 7, der andere aber durch 11 theilen lasse.

Der erste Theil sey also $7x$, der andere aber $11y$, so muß $7x + 11y = 100$ seyn; daher $x = \frac{100 - 11y}{7} = \frac{98 + 2 - 7y - 4y}{7}$, also wird $x = 14 - y + \frac{2 - 4y}{7}$; also muß $2 - 4y$ oder $4y - 2$ sich durch 7 theilen lassen. Läßt sich aber $4y - 2$ durch 7 theilen, so muß sich auch die Hälfte davon $2y - 1$ durch 7 theilen lassen. Man setze daher $2y - 1 = 7z$, oder $2y = 7z + 1$, so wird $x = 14 - y - 2z$; da aber $2y = 7z + 1 = 6z + z + 1$ seyn muß, so hat man $y = 3z + \frac{z + 1}{2}$. Nun setze man $z + 1 = 2u$ oder $z = 2u - 1$, so wird $y = 3z + u$. Folglich kann man für u eine jede ganze Zahl nehmen, die so beschaffen ist, daß weder x noch y negativ wird, und alsdann bekömmt man:

$$y = 7u - 3 \text{ und } x = 19 - 11u.$$

Nach

Nach der ersten Formel muß $7u$ größer seyn als 3, nach der andern aber muß $11u$ kleiner seyn als 19, oder u kleiner als $\frac{19}{11}$, also daß u nicht einmal 2 seyn kann; da nun u unmöglich 0 seyn kann, so bleibt nur ein einziger Werth übrig, nemlich $u = 1$, daraus bekommen wir $x = 8$ und $y = 4$; daher die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden I. 56 und II. 44.

§. 6.

III. Aufg. Man theile 100 in zwey Theile, die folgende Eigenschaften haben müssen: wenn man den ersten durch 5 dividirt, so muß 2 übrig bleiben, und wenn man den zweyten durch 7 dividirt, so muß der Rest 4 seyn.

Da der erste Theil durch 5 dividirt, 2 übrig läßt, so setze man denselben $5x + 2$, und weil der andere durch 7 dividirt, 4 übrig läßt, so setze man denselben $7y + 4$; also wird $5x + 7y + 6 = 100$ oder $5x = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y - 2y$. Hieraus erhält man $x = 18 - y - \frac{2y + 4}{5}$; also muß $4 - 2y$, oder $2y - 4$, oder auch die Hälfte davon $y - 2$ durch 5 theilbar seyn. Man setze daher $y - 2 = 5z$, oder $y = 5z + 2$, so wird $x = 16 - 7z$; hieraus erhellt, daß $7z$ kleiner seyn muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$ und also nicht größer als 2. Wir haben also hier drey Auflösungen:

I. $z = 0$ giebt $x = 16$ und $y = 2$; daher die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden $82 + 18$.

II. $z = 1$ giebt $x = 9$, und $y = 7$; daher die beyden Theile seyn können $47 + 53$.

III. $z = 2$ giebt $x = 2$, und $y = 12$; woraus man man für die verlangten beyden Theile erhält $12 + 88$.

§. 7.

IV. Aufg. Zwey Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer. Die erste spricht: wenn ich die meinigen immer zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig; die andere spricht: wenn ich die meinigen zu 10 überzähle, so bleiben mir auch 7 übrig. Wie viel hat jede Eyer gehabt?

Weil die Anzahl der Eyer der ersten Bäuerin, durch 8 dividirt, 7 übrig läßt, die Zahl der Eyer der zweyten Bäuerin, durch 10 dividirt, auch 7 übrig läßt, so setze man die Zahl der ersten $8x + 7$, der andern aber $10y + 7$, so daß $8x + 10y + 14 = 100$, oder $8x = 86 - 10y$, oder $4x = 43 - 5y = 40 + 3 - 4y - y$. Daher setze man $y - 3 = 4z$, so wird $y = 4z + 3$ und $x = 10 - 4z - 3 - z = 7 - 5z$. Folglich muß $5z$ kleiner seyn als 7, und also z kleiner als 2; woraus folgende zwey Auflösungen entstehen:

I. $z = 0$ giebt $x = 7$, und $y = 3$; daher die erste Bäuerin 63 Eyer, die andere aber 37 gehabt hat.

II. $z = 1$ giebt $x = 2$, und $y = 7$; daher auch die erste Bäuerin 23 Eyer, die andere aber 77 gehabt haben kann.

§. 8.

V. Aufg. Eine Gesellschaft von Männern und Weibern haben zusammen 41 Thlr. 16 Gr. verzehrt. Ein Mann hat 19 Gr., eine Frau aber 13 Gr. bezahlt; wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die

Die Zahl der Männer sey $= x$, der Weiber aber $= y$, so bekömmt man, weil 41 Thlr. 16 Gr. 1000 Groschen ausmachen, diese Gleichung: $19x + 13y = 1000$. Daraus wird folgende: $13y = 1000 - 19x$, oder $13y = 988 + 12 - 13x - 6x$, und daher $y = 76 - x + \frac{12-6x}{13}$. Folglich muß sich $12 - 6x$ oder $6x - 12$, durch 13 theilen lassen, welches allemal geschehen wird, wenn sich der sechste Theil davon, nemlich $x - 2$, durch 13 dividiren läßt. Man setze also $x - 2 = 13z$, so wird $x = 13z + 2$, und $y = 76 - 13z - 2 - 6z$, oder $y = 74 - 19z$. Es muß also z kleiner seyn als $\frac{74}{19}$, und folglich kleiner als 4; daher folgende vier Auflösungen möglich sind.

I.) $z = 0$ giebt $x = 2$ und $y = 74$. Es können also 2 Männer und 74 Weiber gewesen seyn; jene haben 38, diese aber 962 Groschen bezahlt.

II.) $z = 1$ giebt die Zahl der Männer $x = 15$, und die Zahl der Weiber $y = 55$; jene haben 285, diese aber 715 Groschen verzehrt.

III.) $z = 2$ giebt die Zahl der Männer $x = 28$, und die Zahl der Weiber $y = 36$; jene haben 532, diese aber 468 Groschen verzehrt.

IV.) $z = 3$ giebt die Zahl der Männer $x = 41$, und die Zahl der Weiber $y = 17$; jene haben 779, diese aber 221 Groschen verzehrt.

§. 9.

VI. Aufg. Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen zusammen für 1770 Thlr. Er zahlt für ein Pferd 31 Thlr, für einen Ochsen aber 21 Thlr. Wie viel sind es Pferde und Ochsen gewesen?

Die

Die Zahl der Pferde sey $= x$, der Ochsen aber $= y$, so muß seyn: $31x + 21y = 1770$, oder $21y = 1770 - 31x = 1764 + 6 - 21x - 10x$, und also $y = 84 - x + \frac{6 - 10x}{21}$. Daher muß $6 - 10x$ oder $10x - 6$ durch 21 theilbar seyn. Wäre nun die Hälfte $5x - 3$ durch 21 theilbar, so würde es auch $10x - 6$ seyn. Man setze also $5x - 3 = 21z$, so ist $5x = 21z + 3$ und $x = \frac{21z+3}{5}$ oder $x = 4z + \frac{z+3}{5}$. Man setze nun ferner $z + 3 = 5u$, so wird $z = 5u - 3$, $x = 21u - 12$ und $y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u$; es muß daher u größer seyn als 0, und doch kleiner als 4; woraus wir folgende drey Auflösungen erhalten:

I.) $u = 1$ giebt die Zahl der Pferde $x = 9$, und der Ochsen $y = 71$; jene haben 279, diese aber 1491, beyde zusammen 1770 Rthl. gekostet.

II.) $u = 2$ giebt die Zahl der Pferde $x = 30$, und der Ochsen $y = 40$; jene kosteten 930, diese aber 840, beyde zusammen also 1770 Rthl.

III.) $u = 3$ giebt die Zahl der Pferde $x = 51$, und der Ochsen $y = 9$; jene kosteten 1581, diese aber 189, und beyde zusammen 1770 Rthl.

§. 10.

Die bisherigen Aufgaben leiten immer auf eine solche Gleichung, wie $ax + by = c$, wo die Buchstaben a, b und c ganze und positive Zahlen bedeuten, und wo für x und y auch ganze und positive Zahlen gefordert werden.

Wenn aber b negativ ist, und die Gleichung die Form $ax = by + c$ erhält, so sind die Aufgaben von einer ganz andern Art, und lassen eine unendliche Menge Auflösungen zu, wovon die Methode

noch

noch in diesem Capitel erklärt werden soll. Die leichtesten Aufgaben von dieser Art sind, wenn man zwey Zahlen sucht, deren Differenz gegeben ist. Wäre sie z. B. 6, so nehme man an, die kleinere sey $= x$, die größere $= y$, und dann muß $y - x = 6$, folglich $y = 6 + x$ seyn. Hier hindert nun nichts, daß nicht für x alle mögliche ganze Zahlen sollten genommen werden können, und was man immer für eine nehmen mag, so wird y jedesmal um 6 größer. Nimmt man z. B. $x = 100$, so ist $y = 106$; es ist hieraus also ganz klar, daß unendlich viele Auflösungen Statt finden.

§. 11.

Darauf folgen die Aufgaben, wo $c = 0$, und ax schlecht weg dem by gleich seyn soll. Man suche nemlich eine Zahl, die sich sowohl durch 5, als auch durch 7 theilen theilen läßt, und setze diese Zahl $= N$, so muß erstlich $N = 5x$ seyn, weil die Zahl N durch 5 theilbar seyn soll; ferner muß auch $N = 7y$ seyn, weil sich diese Zahl auch durch 7 soll theilen lassen; daher bekömmt man $5x = 7y$ und also $x = \frac{7y}{5}$; da sich nun 7 nicht durch 5 theilen läßt, so muß sich y dadurch theilen lassen. Man setze daher $y = 5z$, so wird $x = 7z$, daher die gesuchte Zahl $N = 35z$, wo man für z eine jede ganze Zahl annehmen kann, also daß für N unendlich viele Zahlen angegeben werden können, z. B.

35, 70, 105, 140, 175, 910, u. s. f.

Wollte man, daß sich die Zahl N noch überdeis durch 9 theilen ließe, so wäre erstlich $N = 35z$, hernach müßte auch $N = 9u$ seyn, also $35z = 9u$, und daher $u = \frac{35z}{9}$; woraus sich ergiebt, daß sich z

durch

durch 9 muß theilen lassen. Es sey also $z = 9s$, so wird $u = 35s$ und die gesuchte Zahl $N = 315s$.

§. 12.

Mehrere Schwierigkeit hat es, wenn die Zahl c nicht 0 ist, z. B. wenn $5x = 7y + 3$ seyn soll, welche Gleichung herauskömmt, wenn eine solche Zahl N gefunden werden soll, welche durch 5 theilbar ist, mit 7 aber dividirt, 3 übrig läßt. Denn alsdann muß $N = 5x$ seyn, ferner $N = 7y + 3$, und deswegen wird $5x = 7y + 3$; folglich $x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$. Man setze $\frac{2y+3}{5} = z$, so wird $2y + 3 = 5z$, und $x = y + z$. Da aber $2y + 3 = 5z$, oder $2y = 5z - 3$, so wird $y = \frac{5z-3}{2}$, oder $y = 2z + \frac{z-3}{2}$. Man setze nun $z - 3 = 2u$, so wird $z = 2u + 3$ und $y = 5u + 6$, und $x = y + z = 7u + 9$; folglich die gesuchte Zahl $N = 35u + 45$, wo für u alle ganze und auch sogar negative Zahlen angenommen werden können, wofern nur N positiv wird, welches hier geschieht, wenn $u = -1$, denn da wird $N = 10$. Die folgenden erhält man, wenn man dazu immer 35 addirt; daher die gesuchten Zahlen 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220 u. s. f. sind.

§. 13.

Die Auflösung solcher Fragen beruht auf dem Verhältniß der beyden Zahlen, wodurch getheilt werden soll, und nach der Beschaffenheit desselben wird die Auflösung bald kürzer, bald weitläuftiger. Bey folgender Aufgabe findet eine kurze Auflösung Statt:

VII.

VII. Aufg. Man suche eine Zahl, welche durch 6 dividirt, 2 übrig läßt, wenn man selbige aber durch 13 dividirt, so bleiben 3 übrig.

Diese Zahl sey N, so muß erstlich $N = 6x + 2$ seyn, hernach aber $N = 13y + 3$; also wird $6x + 2 = 13y + 3$, und $6x = 13y + 1$; daher $x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}$. Man setze also $y + 1 = 6z$, so wird $y = 6z - 1$, und $x = 2y + z = 13z - 2$. Folglich wird die gesuchte Zahl $N = 78z - \cancel{16}$. ~~12~~ Solche Zahlen sind daher folgende: 68, 146, 224, 302, 380, u. s. f., welche nach einer arithmetischen Progression fortgehen, deren Differenz $78 = 6 \cdot 13$ ist. Wenn man also nur eine von diesen Zahlen weiß, so lassen sich alle übrigen leicht finden, indem man nur jedesmal 78 dazu addiren, oder auch davon subtrahiren darf, so lange wie es angeht.

§. 14.

Ein Beyspiel, wo die Rechnung weitläuftiger und schwerer wird, mag folgendes seyn.

VIII. Aufg. Man suche eine Zahl N, welche durch 39 dividirt, 16, und durch 56 dividirt, 27 übrig läßt.

Erstlich muß also $N = 39p + 16$ seyn, hernach aber $N = 56q + 27$; daher wird $39p + 16 = 56q + 27$, oder $39p = 56q + 11$, und $p = \frac{56q+11}{39}$, oder $p = q + \frac{17q+11}{39} = q + r$, so daß $r = \frac{17q+11}{39}$; daher wird $39r = 17q + 11$, und $q = \frac{39r-11}{17} = 2r + \frac{5r-11}{17} = 2r + s$, so daß $s = \frac{5r-11}{17}$ oder

$17s = 5r - 11$, und daher wird $r = \frac{17s + 11}{5} = 3s + \frac{2s + 11}{5} = 3s + t$, so daß $t = \frac{2s + 11}{5}$, oder $5t = 2s + 11$, und also wird $s = \frac{5t - 11}{2} = 2t + \frac{t - 11}{2} = 2t + u$, so daß $u = \frac{t - 11}{2}$ und $t = 2u + 11$. Da nun kein Bruch mehr vorhanden ist, so kann man u nach Belieben annehmen, und daraus erhalten wir rückwärts folgende Bestimmungen:

$$\begin{aligned} t &= 2u + 11 \\ s &= 2t + u = 5u + 22 \\ r &= 3s + t = 17u + 77 \\ q &= 2r + s = 39u + 176 \\ p &= q + r = 56u + 253 \end{aligned}$$

und endlich $N = 39 \cdot 56u + 9883$. Um die kleinste Zahl für N zu finden, setze man $u = -4$, so wird $N = 1147$. Setzt man $u = x - 4$, so wird $N = 2184x - 8736 + 9883$, oder $N = 2184x + 1147$. Diese Zahlen machen also folgende arithmetische Progression aus, deren erstes Glied 1147, und die Differenz = 2184 ist:

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, 12067, u. s. f.

Anmerk. Zu Aufgaben dieser Art gehört die Chronologische: das Jahr der Julianischen Periode zu finden, dem gegebene: Indiction, Mondszirkel und Sonnenzirkel zugehören, wovon wir im dritten Theile dieser Algebra die Auflösung geben wollen.

§. 15.

Zur Uebung wollen wir noch einige Aufgaben hinzufügen.

IX. Aufg. Eine Gesellschaft von Männern und Weibern sind in einem Wirthshause. Ein Mann verzehrt 25 Gro-

Groschen, ein Weib aber 16 Groschen, und es findet sich, daß die Weiber zusammen einen Groschen mehr verzehrt haben, als die Männer. Wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Weiber sey $= p$, der Männer aber $= q$ gewesen, so haben die Weiber $16p$, die Männer aber $25q$ verzehrt; daher muß $16p = 25q + 1$ seyn, und da wird $p = \frac{25q + 1}{16} = q + \frac{9q + 1}{16} = q + r$. Es ist also $r = \frac{9q + 1}{16}$, oder $9q = 16r - 1$; daher wird $q = \frac{16r - 1}{9} = r + \frac{7r - 1}{9} = r + s$, so daß $s = \frac{7r - 1}{9}$, oder $9s = 7r - 1$; daher wird $r = \frac{9s + 1}{7} = s + \frac{2s + 1}{7} = s + t$, also $t = \frac{2s + 1}{7}$ oder $7t = 2s + 1$; mithin wird $s = \frac{7t - 1}{2} = 3t + \frac{t - 1}{2} = 3t + u$, so daß $u = \frac{t - 1}{2}$ oder $2u = t - 1$, daher $t = 2u + 1$. Hieraus erhalten wir nun rückwärts:

$$t = 2u + 1$$
$$s = 3t + u = 7u + 3$$
$$r = s + t = 9u + 4$$
$$q = r + s = 16u + 7$$
$$p = q + r = 25u + 11$$

Es war daher die Anzahl der Weiber $25u + 11$, der Männer aber $16u + 7$, wo man für u in ganzen Zahlen annehmen kann was man will. Die kleineren Zahlen sind daher nebst den folgenden wie hier steht:

Anzahl der Weiber: = 11, 36, 61, 86, 111, u. s. f.
der Männer: = 7, 23, 39, 55, 71, u. s. f.

Nach der ersten Auflösung in den kleinsten Zahlen haben die Weiber 176, die Männer aber 175 Groschen verzehrt; also die Weiber einen Groschen mehr als die Männer, dem Verlangen der Aufgabe gemäß.

§. 16.

X. Aufg. Es kauft jemand Pferde und Ochsen, und bezahlt für ein Pferd 31 Rthl., für einen Ochsen aber 20 Rthl., nun findet sich, daß die Ochsen insgesammt 7 Rthl. mehr gekostet haben als die Pferde. Wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

Es sey die Anzahl der Ochsen $= p$, die Zahl der Pferde aber $= q$, so ist $20p = 31q + 7$, und $p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r$; daher $20r = 11q + 7$, und $q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + s$; mithin $11s = 9r - 7$ und $r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t$, also $9t = 2s + 7$, und $s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u$, folglich $2u = t - 7$, und $t = 2u + 7$

$$s = 4t + u = 9u + 28$$
$$r = s + t = 11u + 35$$
$$q = r + s = 20u + 63 \text{ Zahl der Pferde}$$
$$p = q + r = 31u + 98 \text{ Zahl der Ochsen.}$$

Hieraus findet man die kleinsten positiven Zahlen für p und q, wenn man $u = -3$ annimmt; die größeren steigen nach arithmetischen Progressionen wie folgt:

Zahl der Ochsen $p = 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253,$ u. s. f.

Zahl der Pferde $q = 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163,$ u. s. f.

§. 17.

Wenn wir bey diesem Beyspiele erwägen, wie die Buchstaben p und q durch die folgenden bestimmt werden, so ist leicht einzusehen, daß solches auf dem Verhältnisse der Zahlen 31 und 20 beruht, und zwar auf demjenigen, nach welchem der größte gemeinschaftliche Theiler dieser beyden Zahlen gefunden zu werden pflegt, wie aus folgendem erhellt:

```
20|31|1
  |20|
  ----
   11|20|1
     |11|
     ----
       9|11|1
        | 9|
        ----
          2| 9|4
           | 8|
           ----
             1| 2|2
              | 2|
              ----
                0
```

Denn hier ist klar, daß die Quotienten in der auf einander folgenden Bestimmung der Buchstaben p, q, r, s, u. s. f. vorkommen, und mit dem ersten Buchstaben auf der rechten Hand verbunden sind, indem der letztere immer einfach bleibt; bey der letzten Gleichung aber kömmt zuerst die Zahl 7 zum Vorschein, und zwar mit dem Zeichen +, weil die letzte Bestimmung die fünfte ist; wäre hingegen die Zahl derselben gerade gewesen, so hätte — 7 gesetzt werden müssen. Dieses wird aus der folgenden Tabelle deutlicher hervorgehen, wo zuerst die Zergliederung der Zahlen 31 und 20, und hernach die Bestimmung der Buchstaben p, q, r, u. s. f. vorkömmt.

$31 = 1.20 + 11.$	$p = 1.q + r$
$20 = 1.11 + 9.$	$q = 1.r + s$
$11 = 1.\ 9 + 2.$	$r = 1.s + t$
$9 = 4.\ 2 + 1.$	$s = 4.t + u$
$2 = 2.\ 1 + 0.$	$t = 2.u + 7$

Anmerk. Euler hat zwar hier die Aehnlichkeit zwischen dem Verfahren § 16. und § 17. bemerkt, aber hat von § 17. den Beweis der Auflösung nicht entwickelt. Diesen nun gebe ich im 3ten Theile dieser Algebra.

§. 18.

Eben so kann auch die vorhergehende Aufgabe im 14ten §. vorgestellt werden, wie aus folgendem erhellet.

$56 = 1.39 + 17$	$p = 1.q + r$
$39 = 2.17 + 5$	$q = 2.r + s$
$17 = 3.\ 5 + 2$	$r = 3.s + t$
$5 = 2.\ 2 + 1$	$s = 2.t + u$
$2 = 2.\ 1 + 0$	$t = 2.u + 11$

§. 19.

Auf diese Art sind wir im Stande alle dergleichen Aufgaben auf eine allgemeine Art aufzulösen:

Es sey z. B. die Gleichung $bp = aq + n$ gegeben, wo a, b und n bekannte Zahlen sind. Hier darf man nur eben die Rechnung anstellen, als wenn man zwischen den Zahlen a und b den größten gemeinschaftlichen Theiler suchen wollte, aus welchen sogleich p und q durch die folgenden Buchstaben bestimmt werden, wie folgt:

Es sey	$a = Ab + c$	so wird	$p = Aq + r$
	$b = Bc + d$		$q = Br + s$
	$c = Cd + e$		$r = Cs + t$
	$d = De + f$		$s = Dt + u$
	$e = Ef + g$		$t = Eu + v$
	$f = Fg + o$		$u = Fv + n$

Hier

Hier wird in der letzten Bestimmung $+ n$ genommen, wenn die Anzahl der Bestimmungen ungerade ist, hingegen aber $- n$, wenn dieselbe Zahl gerade ist. Auf diese Art können nun alle dergleichen Aufgaben ziemlich geschwind aufgelöset werden, wovon wir einige Beispiele geben wollen.

§. 20.

XI. Aufg. Man sucht eine Zahl, welche durch 11 dividirt, 3, durch 19 aber dividirt, 5 übrig läßt.

Diese Zahl sey N, so muß erstlich $N = 11p + 3$, hernach auch $N = 19q + 5$ seyn; folglich $11p + 3 = 19q + 5$ oder $11p = 19q + 2$, woraus folgende Tabelle verfertigt wird:

$19 = 1.\ 11 + 8$	$p = q + r$
$11 = 1.\ 8 + 3$	$q = r + s$
$8 = 2.\ 3 + 2$	$r = 2s + t$
$3 = 1.\ 2 + 1$	$s = t + u$
$2 = 2.\ 1 + 0$	$t = 2u + 2$

Hier kann man u nach Belieben annehmen, und daraus die vorhergehenden Buchstaben der Ordnung nach rückwärts bestimmen, wie sich aus dem folgenden zeigt:

$$t = 2u + 2$$
$$s = t + u = 3u + 2$$
$$r = 2s + t = 8u + 6$$
$$q = r + s = 11u + 8$$
$$p = q + r = 19u + 14$$

Hieraus bekömmt man die gesuchte Zahl $= 209u + 157$, daher ist die kleinste Zahl für $N = 157$.

§. 21.

XII. Aufg. Man sucht eine Zahl N, welche, wie vorher, durch 11 dividirt, 3, und durch 19 dividirt, 5; durch 29 dividirt aber 10 übrig läßt.

Nach der letzten Bedingung muß $N = 29p + 10$ seyn, und da die zwey ersten Bedingungen schon berechnet worden, so muß zufolge derselben, wie oben gefunden worden ist, $N = 209u + 157$ seyn, wofür wir $N = 209q + 157$ schreiben wollen; daher wird $29p + 10 = 209q + 157$ oder $29p = 209q + 147$; woraus die folgende Rechnung angestellt wird:

$$\begin{array}{rll} 209 = 7 \cdot 29 + 6; & \text{also } p = 7q + r \\ 29 = 4 \cdot 6 + 5; & q = 4r + s \\ 6 = 1 \cdot 5 + 1; & r = s + t \\ 5 = 5 \cdot 1 + 0; & s = 5t - 147 \end{array}$$

Nun wollen wir auf folgende Art zurück gehen:

$$\begin{aligned} s &= 5t - 147 \\ r &= s + t = 6t - 147 \\ q &= 4r + s = 29t - 735 \\ p &= 7q + r = 209t - 5292 \end{aligned}$$

Folglich $N = 6061t - 153458$. Die kleinste Zahl kömmt heraus, wenn man $t = 26$ annimmt, dann wird $N = 4128$.

§. 22.

Es ist aber hier wohl zu bemerken, daß, wenn eine solche Gleichung, wie $bp = aq + n$ aufgelöset werden soll, die beyden Zahlen a und b keinen gemeinschaftlichen Theiler außer 1 haben müssen, denn sonst wäre die Aufgabe unmöglich, wenn nicht die Zahl n eben denselben gemeinschaftlichen Theiler hätte.

Denn wenn z. B. $9p = 15q + 2$ seyn sollte, wo 9 und 15 den gemeinschaftlichen Theiler 3 haben, wodurch sich 2 nicht theilen läßt, so ist es unmöglich, diese

diese Aufgabe aufzulösen, weil sich $9p - 15q$ jedesmal durch 3 theilen läßt und also niemals 2 werden kann. Wäre aber in diesem Fall $n = 3$ oder $n = 6$ u. s. f., so wäre die Auflösung wohl möglich, man müßte aber die Gleichung durch 3 theilen, da man dann $3p = 5q + 1$ erhielte, welche Gleichung nach der obigen Regel leicht aufgelöset wird. Also sieht man deutlich, daß die beyden Zahlen a und b keinen gemeinschaftlichen Theiler außer 1 haben müssen, und daß die gegebene Regel in keinen andern Fällen Statt finden kann.

§. 23.

Um dieses noch deutlicher zu zeigen, wollen wir die Gleichung $9p = 15q + 2$ nach der natürlichen Art behandeln. Da wird nun $p = \frac{15q+2}{9} = q + \frac{6q+2}{9}$ $= q + r$, so daß $9r = 6q + 2$, oder $6q = 9r - 2$; daher $q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6} = r + s$, so daß $3r - 2$ $= 6s$, oder $3r = 6s + 2$; daher $r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3}$, welche Formel niemals eine ganze Zahl werden kann, weil s nothwendig eine ganze Zahl seyn muß; woraus deutlich zu ersehen ist, daß dergleichen Aufgaben ihrer Natur nach unmöglich sind.

Anmerk. Im dritten Theile dieser Algebra werde ich das unentbehrlichste von den vortrefflichen Hindenburgischen combinatorischen Operationen mittheilen. Diese glückliche Erfindung läßt sich auch in der unbestimmten Analytik mit vielen Nutzen anwenden.

II. Capitel.

Von der sogenannten Regel Coeci, wo aus zweyen Gleichungen drey oder mehrere unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen.

§. 24.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, wie aus einer Gleichung zwey unbekannte Zahlen auf die Art bestimmt werden sollen, daß dafür ganze und positive Zahlen gefunden werden. Sind aber zwey Gleichungen gegeben, und die Aufgabe soll unbestimmt seyn, so müßten mehr als zwey unbekannte Zahlen vorkommen. Dergleichen Aufgaben kommen selbst in den gemeinen Rechenbüchern vor, und pflegen nach der so genannten Regel Coeci aufgelöset zu werden, von welcher wir hier den Grund anzeigen und diese Regel durch Beyspiele erläutern wollen.

§. 25.

I. Aufg. 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehren in einem Wirthshause 50 Rthl., und zwar bezahlt ein Mann 3, ein Weib 2, und ein Kind 1 Rthl. Wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?

Es sey die Zahl der Männer $= p$, die Zahl der Weiber $= q$, und die der Kinder $= r$, so erhält man die zwey folgenden Gleichungen: I.) $p + q + r = 30$, II.) $3p + 2q + r = 50$; aus welchen die drey Buchstaben p, q und r in ganzen und positiven Zahlen

Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten Gleichung wird nun $r = 30 - p - q$, und darum muß $p + q$ kleiner seyn, als 30. Dieser Werth in der zweyten Gleichung für r geschrieben, giebt $2p + q + 30 = 50$; also $q = 20 - 2p$ und $p + q = 20 - p$, welches von selbst kleiner ist als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10; woraus folgende Auflösungen entstehen:

Zahl der Männer $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$
Zahl der Weiber $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0,$
Zahl der Kinder $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.$

Läßt man von diesen die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 wahre Auflösungen übrig.

§. 26.

II. Aufg. Es kauft jemand 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schaafe, für 100 Rthl. Ein Schwein kostet $3\frac{1}{2}$, eine Ziege $1\frac{1}{3}$, ein Schaaf $\frac{1}{2}$ Rthl. Wie viel waren es von jeder Gattung?

Die Zahl der Schweine sey $= p$, der Ziegen $= q$, der Schaafe $= r$, so hat man folgende zwey Gleichungen: I.) $p + q + r = 100$, II.) $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$. Multiplicirt man diese letztere mit 6, um die Brüche wegzubringen, so kömmt $21p + 8q + 3r = 600$ heraus. Aus der ersten hat man $r = 100 - p - q$, welcher Werth in der zweyten Gleichung für r gesetzt, $18p + 5q = 300$, oder $5q = 300 - 18p$ und $q = 60 - \frac{18p}{5}$ giebt, folglich muß $18p$ durch 5 theilbar seyn, oder 5 als einen Factor in sich schließen. Man setze also $p = 5s$, so wird $q = 60 - 18s$ und $r = 13s + 40$, wo für s eine beliebige ganze Zahl genommen werden kann, doch so, daß q nicht negativ werde; daher s nicht größer als 3 angenommen werden kann, und also, wenn o auch ausgeschlossen wird, nur folgende drey Auflösungen Statt finden:

nemlich wenn	$s = 1, 2, 3.$
so wird	$p = 5, 10, 15.$
	$q = 42, 24, 6.$
	$r = 53, 66, 79.$

§. 27.

Wenn man dergleichen Aufgaben selbst andern zur Auflösung aufgeben will, so ist vor allen Dingen darauf zu sehen, daß sie mögliche Fälle betreffen. Zur Beurtheilung dieser Möglichkeit dient folgendes.

Wir wollen die beyden bisher betrachteten Gleichungen so vorstellen: I.) $x + y + z = a$, II.) $fx + gy + hz = b$, wo f, g, h, nebst a und b gegebene Zahlen sind. Nun sey unter den Zahlen f, g und h die erste f die größte und h die kleinste. Da $x + y + z = a$, so wird $fx + fy + fz = fa$. Nun ist $fx + fy + fz$ größer als $fx + gy + hz$; daher muß fa größer seyn, als b, oder b muß kleiner seyn, als fa; und da ferner $hx + hy + hz = ha$ und $hx + hy + hz$ gewiß kleiner ist, als $fx + gy + hz$, so muß auch ha kleiner seyn als b, oder b größer als ha. Wenn daher die Zahl b nicht kleiner als fa, und zugleich größer als ha ist, so bleibt die Auflösung der Aufgabe immer unmöglich.

Diese Bedingung pflegt man auch so auszudrücken: die Zahl b muß zwischen den Gränzen fa und ha enthalten seyn; ferner muß dieselbe auch nicht einer

einer der beyden Gränzen gar zu nahe kommen, weil sonst die übrigen Buchstaben nicht bestimmt werden könnten.

In dem vorigen Beyspiele, wo $a = 100$, $f = 3\frac{1}{2}$, und $h = \frac{1}{2}$, waren die Gränzen 350 und 50. Wollte man nun $b = 51$ statt 100 setzen, so wären die Gleichungen $x + y + z = 100$, und $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 51$, und wenn man mit 6 multiplicirt, $21x + 8y + 3z = 306$. Man nehme die erste Gleichung dreymal, so wird $3x + 3y + 3z = 300$, und wenn man diese von jener abzieht, $18x + 5y = 6$, welche offenbar unmöglich ist, weil x und y ganze Zahlen seyn müssen.

§. 28.

Diese Regel hat auch für die Münzmeister und Goldschmiede ihren großen Nutzen, wenn sie aus drey oder mehreren Sorten von Silber eine Masse von einem gegebenen Gehalte zusammen schmelzen wollen, wie man aus folgendem Beyspiele sehen kann.

III. Aufg. Ein Münzmeister hat dreyerley Silber; das erste ist 14löthig, das andere 11löthig, das dritte 9löthig. Nun braucht er 30 Mark zwölflöthiges Silber zu einer gewissen Arbeit, wie viel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x Mark, von der zweyten y M., und von der dritten z M., so muß $x + y + z = 30$ seyn, welches die erste Gleichung ist.

Da ferner eine Mark von der ersten Sorte 14 Loth fein Silber hält, so werden die x Mark $14x$ Loth Silber enthalten. Eben so werden die y Mark von

von der zweyten Sorte $11y$ Loth, und die z Mark von der dritten Sorte werden $9z$ Loth Silber enthalten; daher die ganze Masse an Silber $14x + 11y + 9z$ Loth enthalten wird. Weil nun dieselbe 30 Mark wiegt, wovon eine Mark 12 Loth Silber enthalten soll, so muß auch die Quantität Silber darin enthalten seyn, nemlich 360 Loth; woraus diese zweyte Gleichung entsteht: $14x + 11y + 9z = 360$. Hiervon subtrahire man die erste neunmal genommen, nemlich $9x + 9y + 9z = 270$, so bleibt $5x + 2y = 90$, woraus x und y bestimmt werden sollen, und zwar in ganzen Zahlen; alsdann aber wird $z = 30 - x - y$. Aus jener Gleichung bekömmt man $2y = 90 - 5x$ und $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Es sey daher $x = 2u$, so wird $y = 45 - 5u$ und $z = 3u - 15$. Folglich muß u größer als 4 und gleichwohl kleiner als 10 seyn; hieraus werden folgende Auflösungen gezogen:

$u = 5,$	$6,$	$7,$	$8,$	$9,$
$x = 10,$	$12,$	$14,$	$16,$	$18,$
$y = 20,$	$15,$	$10,$	$5,$	$0,$
$z = 0,$	$3,$	$6,$	$9,$	$12,$

§. 29.

Es kommen öfters mehr als drey unbekannte Zahlen vor, aber die Auflösung kann dennoch auf eben diese Art geschehen, wie sich aus folgendem Beyspiele ersehen läßt.

IV. Aufg. Es kauft jemand 100 Stück Vieh für 100 Rthl. und zwar 1 Ochsen für 10 Rthl., 1 Kuh für 5 Rthl., 1 Kalb für 2 Rthl., 1 Schaaf für $\frac{1}{2}$ Rthl. Wie viel Ochsen, Kühe, Kälber und Schaafe sind es gewesen?

Die

Die Zahl der Ochsen sey = p, der Kühe = q, der Kälber = r, und der Schaafe = s, so ist die erste Gleichung: $p + q + r + s = 100$; die zweyte Gleichung aber wird $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, und wenn man sie, um die Brüche wegzubringen, mit 2 multiplicirt, $20p + 10q + 4r + s = 200$. Hiervon subtrahire man die erste Gleichung, so hat man folgende: $19p + 9q + 3r = 100$, und also $3r = 100 - 19p - 9q$ und $r = 33 + \frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, oder $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3}$; daher muß $1 - p$ oder $p - 1$ durch 3 theilbar seyn. Man setze daher $p - 1 = 3t$, so wird

$$p = 3t + 1 \text{ und } -3t = 1 - p, \text{ folglich}$$
$$6p = 18t + 6 \text{ und } -t = \frac{1-p}{3}.$$

Wenn man nun in der vorigen Gleichung $33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3} = r$, anstatt 6p den gleichgeltenden Ausdruck $18t + 6$, und anstatt $\frac{1-p}{3}$ das ihm gleiche $-t$ setzt, so erhält man folgende Gleichung: $r = 33 - 18t - 6 - 3q - t = 27 - 19t - 3q$. Und weil $p + q + r + s = 100$, so ist $s = 100 - p - q - r$. Wenn man nun hier anstatt p den ihm gleichgeltenden Ausdruck $3t + 1$, und anstatt r die Formel $27 - 19t - 3q$ setzt, so wird $s = 72 + 2q + 16t$. Also muß $19t + 3q$ kleiner seyn als 27. Hier können nun q und t nach Belieben angenommen werden, wenn nur die Bedingung beobachtet wird, daß $19t + 3q$ nicht größer werden als 27; daher wir folgende Fälle zu bemerken haben.

I. wenn

I. wenn $t = 0$,	II. wenn $t = 1$,
so wird $p = 1$,	so wird $p = 4$,
$q = q$,	$q = q$,
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$
$s = 72 + 2q$	$s = 88 + 2q$

Im ersten Fall muß q nicht größer seyn als 9, und im zweyten Fall nicht größer als 2. Mehr Fälle sind aber nicht möglich, weil t nicht 2, noch viel weniger größer seyn kann. Denn wollte man $t = 2$ setzen, so würde $19t + 3q = 38 + 3q$, folglich größer als 27, und daher r negativ werden. Wie könnte man aber unter r eine negative Größe verstehen, da dieser Buchstabe die Anzahl der eingekauften Kälber anzeigt? Aus beyden Fällen erhalten wir also folgende Auflösungen.

Aus dem ersten Fall nemlich fließen nachstehende 10 Auflösungen:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Aus dem zweyten Fall aber diese 3 Auflösungen:

	I.	II.	III.
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Dieses sind nun in allem zusammen 13 Auflösungen. Wollte man aber 0 nicht gelten lassen, so wären es nur 10 Auflösungen.

§. 30.

§. 30.

Die Art der Auflösung bleibt einerley, wenn auch in der ersten Gleichung die Buchstaben mit gegebenen Zahlen multiplicirt sind, wie aus folgendem Beyspiele zu ersehen ist:

V. Aufg. Man suche drey ganze Zahlen; wenn die erste mit 3, die andere mit 5, und die dritte mit 7 multiplicirt wird, daß dann die Summe der Producte 560 sey; wenn aber die erste mit 9, die andere mit 25 und die dritte mit 49 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte 2920 sey.

Es sey die erste Zahl $= x$, die zweyte $= y$, die dritte $= z$, so hat man folgende zwey Gleichungen: I.) $3x + 5y + 7z = 560$, II.) $9x + 25y + 49z = 2920$, von der zweyten subtrahirt man die erste dreymal genommen, nemlich $9x + 15y + 21z = 1680$, so bleiben übrig $10y + 28z = 1240$, oder durch 2 dividirt, $5y + 14z = 620$, daraus wird $y = 124 - \frac{14z}{5}$; also muß sich z durch 5 theilen lassen; daher setze man $z = 5u$, so wird $y = 124 - 14u$; welche Werthe in der ersten Gleichung für z und y geschrieben, geben $3x - 35u + 620 = 560$, oder $3x = 35u - 60$ und $x = \frac{35u}{3} - 20$; deswegen setze man $u = 3t$, so bekommen wir endlich folgende Auflösung: $x = 35t - 20$, $y = 124 - 42t$, und $z = 15t$, wo man für t eine beliebige ganze Zahl setzen kann, doch so, daß t größer sey als 0 und doch kleiner als 3, woraus man 2 Auflösungen erhält:

I.) wenn $t = 1$, so wird $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$,
II.) wenn $t = 2$, so wird $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$.

III. Ca-

III. Capitel.

Von den zusammengesetzten unbestimmten Gleichungen, wo von der einen unbekannten Zahl nur die erste Potenz vorkömmt.

§. 31.

Wir kommen nun zu solchen unbestimmten Gleichungen, wo zwey unbekannte Zahlen gesucht werden, und die eine nicht, wie bisher, allein steht, sondern entweder mit der andern multiplicirt oder in einer höhern Potenz vorkömmt, wenn nur von der andern blos die erste Potenz vorhanden ist. Auf eine allgemeine Art haben solche Gleichungen folgende Form:

$$+ bx + cy + dx^2 + exy + fx^2 + gx^2y$$
$$+ hx^4 + kx^3y + \text{u. s. f.} = 0$$

in welcher nur y vorkömmt, und also aus dieser Gleichung leicht bestimmt werden kann; die Bestimmung muß aber so geschehen, daß für x und y ganze Zahlen herauskommen. Dergleichen Fälle wollen wir nun betrachten und mit den leichtern den Anfang machen.

§. 32.

I. Aufg. Man suche zwey Zahlen von dieser Beschaffenheit, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Product addirt wird, 79 herauskomme.

Es seyen die zwey verlangten Zahlen x und y, so muß $xy + x + y = 79$ seyn, woraus wir bekommen

men $xy + y = 79 - x$, und $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -$ $1 + \frac{80}{x + 1}$; hieraus erhellt, daß $x + 1$ ein Theiler von 80 seyn muß. Da nun 80 viele Theiler hat, so findet man aus einem jeden einen Werth für x, wie sich im folgenden zeigt:

die Theiler sind	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
daher wird $x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
und $y =$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

Weil nun hier die letztern Auflösungen mit den erstern übereinkommen, so hat man in allem folgende fünf Auflösungen:

I.	II.	III.	IV.	V.
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

§. 33.

Auf diese Art kann auch folgende allgemeine Gleichung aufgelöset werden: $xy + ax + by = c$, woraus man $xy + by = c - ax$, und also $y = \frac{c - ax}{x + b}$ oder $y = - a + \frac{ab + c}{x + b}$ erhält. Daher muß $x + b$ ein Theiler der bekannten Zahl $ab + c$ seyn, und also kann aus einem jeden Theiler derselben ein Werth für x gefunden werden. Man setze daher, es sey $ab + c = fg$, so daß $y = - a + \frac{fg}{x + b}$. Nun nehme man $x + b = f$, oder $x = f - b$, so wird $y = - a + g$, oder $y = g - a$. Auf so viel verschiedene Arten sich also die Zahl $ab + c$ durch zwey Factoren, als fg, vorstellen läßt, so viel Auflösungen erhält man, daher nicht bloß eine, sondern zwey Auflösungen Statt finden. Die erste ist nemlich $x = f - b$ und $y = g - a$, die andere aber kommt auf gleiche Art heraus, wenn man $x + b = g$ setzt, da wird $x = g - b$ und $y = f - a$.

Sollte daher folgende Gleichung gegeben seyn: $xy + 2x + 3y = 42$, so wäre $a = 2$, $b = 3$, und $c = 42$; folglich $y = -2 + \frac{48}{x+3}$. Nun kann die Zahl 48 auf vielerley Art durch 2 Factoren, als fg, vorgestellt werden, wo dann immer $x = f - 3$ und $y = g - 2$, oder auch $x = g - 3$ und $y = f - 2$ seyn wird. Dergleichen Factoren sind nun folgende:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factoren	1 . 48		2 . 24		3 . 16		4 . 12		6 . 8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Zahlen	−2	46	−1	22	0	14	1	10	3	6
oder	45	−1	21	0	13	1	9	2	5	4

§. 34.

Noch allgemeiner kann die Gleichung auf folgende Art vorgestellt werden: $mxy = ax + by + c$, wo a, b, c und m gegebene Zahlen sind, für x und y aber ganze Zahlen verlangt werden.

Man suche daher y, so bekömmt man $y = \frac{ax + c}{mx - b}$; damit hier x aus dem Zähler weg gebracht werden könne, so multiplicirt man auf beyden Seiten mit m, so hat man $my = \frac{max + mc}{mx - b} = a + \frac{mc + ab}{mx - b}$. Der Zähler dieses Bruchs ist nun eine bekannte Zahl, wovon der Nenner ein Theiler seyn muß. Man stelle daher den Zähler durch zwey Factoren, als fg vor, welches oft auf vielerley Art ge-

geschehen kann, und sehe, ob sich einer davon mit $mx - b$ vergleichen lasse, so daß $mx - b = f$. Hierzu wird aber erfordert, weil $x = \frac{f+b}{m}$, daß $f+b$ sich durch m theilen lasse; daher hier nur solche Factoren von $mc + ab$ gebraucht werden können, die sich, wenn dazu b addirt wird, durch m theilen lassen, welches durch ein Beyspiel erläutert werden soll:

Es sey daher $5xy = 2x + 3y + 18$. Hieraus bekömmt man $y = \frac{2x+18}{5x-3}$ und $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3}$. Hier müssen nun von 96 solche Theiler gesucht werden, daß, wenn zu denselben 3 addirt wird, die Summe durch 5 theilbar werde. Man nehme daher alle Theiler von 96, welche sind: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, woraus man sieht, daß nur folgende, nemlich 2, 12, 32, gebraucht werden können.

Es sey demnach I.) $5x - 3 = 2$, so wird $5y = 50$, und daher $x = 1$, und $y = 10$.

II.) $5x - 3 = 12$, so wird $5y = 10$, und daher $x = 3$, und $y = 2$.

III.) $5x - 3 = 32$, so wird $5y = 5$, und daher $x = 7$, und $y = 1$.

§. 35.

Da hier in der allgemeinen Auflösung $my - a = \frac{mc+ab}{mx-b}$ wird, so ist nöthig hier noch anzumerken, daß, wenn eine in der Form $mc + ab$ enthaltene Zahl einen Theiler hat, der in der Form $mx - b$ enthalten ist, alsdann der Quotient nothwendig die Form $my - a$ haben müsse, und daß alsdann die

Zahl $mc + ab$ durch ein solches Product $(mx-b)(my-a)$ vorgestellt werden könne. Es sey z. B. $m = 12$, $a = 5$, $b = 7$, und $c = 15$; so bekömmt man $12y - 5 = \frac{215x}{12x-7}$. Nun sind von 215 die Theiler 1, 5, 43, 215, unter welchen die gesucht werden müssen, welche in der Form $12x - 7$ enthalten sind, oder wenn man 7 dazu addirt, daß sich die Summe durch 12 theilen lasse, von welchen nur 5 dieses leistet, also $12x - 7 = 5$ und $12y - 5 = 43$. Wie nun aus der ersten $x = 1$ wird, so findet man auch aus der andern y in ganzen Zahlen, nemlich $y = 4$. Diese Eigenschaft ist in Betrachtung der Natur der Zahlen von der größten Wichtigkeit, und verdient deswegen wohl bemerkt zu werden.

§. 36.

Wir wollen nun auch eine Gleichung von folgender Art betrachten: $xy + xx = 2x + 3y + 29$. Hieraus findet man nun $y = \frac{2x - xx + 29}{x-3}$, oder $y = -x - 1 + \frac{26}{x-3}$; also muß $x - 3$ ein Theiler von der Zahl 26 seyn, und dann wird der Quotient $= y + x + 1$. Nun sind von 26 die Theiler 1, 2, 13, 26 u. s. f., also erhalten wir folgende Auflösungen: ist

I.) $x - 3 = 1$ oder $x = 4$, so wird $y + x + 1 = y + 5 = 26$; und $y = 21$,

II.) $x - 3 = 2$ oder $x = 5$, also $y + x + 1 = y + 6 = 13$; und $y = 7$,

III.) $x - 3 = 13$ oder $x = 16$, so wird $y + x + 1 = y + 17 = 2$; und $y = -15$,

welchen

welchen negativen Werth man aber weglassen kann, und deswegen muß auch der letzte Fall $x - 3 = 26$ nicht gerechnet werden.

§. 37.

Mehrere Formeln von dieser Art, wo nur die erste Potenz von y, noch höhere aber von x vorkommen, sind nicht nöthig, hier zu berechnen, weil diese Fälle nur selten vorkommen, und dann auch nach der hier erklärten Art aufgelöset werden können. Wenn aber auch y zur zweyten oder einer noch höhern steigt, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln bestimmen will, so kömmt man auf Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweyten oder einer noch höhern Potenz befindlich ist, und dann kömmt es darauf an, solche Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Hierin besteht vorzüglich die größte Kunst der unbestimmten Analytik, dergleichen Irrationalformeln zur Rationalität zu bringen, wozu in den folgenden Capiteln einige Anleitung gegeben werden soll.

IV. Capitel.

Von der Art, folgende irrationale Formel $\sqrt{(a + bx + cx^2)}$ rational zu machen.

§. 38.

Hier ist also die Frage, was für Werthe von x angenommen werden sollen, daß diese Formel $a + bx + cx^2$ ein wirkliches Quadrat werde, und also die Quadratwurzel daraus rational angegeben werden könne. Es bedeuten aber die Buchstaben a, b und c gegebene Zahlen, und auf der Beschaffenheit derselben beruht hauptsächlich die Bestimmung der unbekannten Zahl x; doch muß zum voraus bemerkt werden, daß in vielen Fällen die Auflösung davon unmöglich ist. Wenn aber dieselbe möglich ist, so muß man sich wenigstens anfänglich in Bestimmung des Buchstabens x blos mit rationalen Werthen begnügen, und nicht fordern, daß diese so gar ganze Zahlen seyn sollen, welches letztere eine ganz besondere Untersuchung erfordert.

§. 39.

Wir nehmen hier an, daß diese Formel nur bis zur zweyten Potenz von x steige, indem höhere Potenzen besondere Methoden erfordern, wovon hernach gehandelt werden soll.

Sollte nicht einmal die zweyte Potenz vorkommen, und $c = 0$ seyn, so hätte die Auflösung keine Schwierigkeit. Denn wenn diese Formel $\sqrt{(a+bx)}$ gegeben wäre, und man x so bestimmen sollte, daß $a + bx$ ein Quadrat würde, so dürfte man nur $a + bx = y^2$ setzen, woraus man sogleich $x = \frac{y^2 - a}{b}$ erhielte; und nun möchte man für y alle beliebige Zahlen annehmen, und aus einer jeden würde man einen solchen Werth für x finden, daß $a + bx$ ein Quadrat, und folglich $\sqrt{(a + bx)}$ rational herauskäme.

§. 40.

Wir wollen daher bey dieser Formel anfangen $\sqrt{(1 + x^2)}$, wo solche Werthe für x gefunden werden sollen, daß, wenn zu ihrem Quadrat x^2 noch 1 ad-

1 addirt wird, die Summe wiederum ein Quadrat werde, welches offenbar in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, indem keine ganze Quadratzahl nur um 1 größer ist, als die vorhergehende; daher man sich nothwendig mit gebrochenen Zahlen für x begnügen muß.

§. 41.

Weil $1 + x^2$ ein Quadrat seyn soll, und man $1 + x^2 = y^2$ annehmen wollte, so würde $x^2 = y^2 - 1$ und $x = \sqrt{}(y^2 - 1)$. Um also x zu finden, müßte man solche Zahlen für y suchen, daß ihre um 1 verminderte Quadrate wieder neue Quadrate würden; welche Auflösung eben so schwer, als die vorige, und also hier von keinem Nutzen ist.

Daß es aber wirklich solche Brüche gebe, welche für x gesetzt $1 + x^2$ zum Quadrat machen, kann man aus folgenden Fällen ersehen:

I.) wenn $x = \frac{3}{4}$, so wird $1 + x^2 = \frac{25}{16}$, folglich $\sqrt{}(1 + x^2) = \frac{5}{4}$.

II.) Eben dieses geschieht, wenn $x = \frac{4}{3}$, denn so ist $\sqrt{}(1 + x^2) = \frac{5}{3}$.

III.) Setzt man $x = \frac{5}{12}$, so erhält man $1 + x^2 = \frac{169}{144}$, wovon die Quadratwurzel $\frac{13}{12}$ ist.

Wie also dergleichen und so gar alle mögliche Zahlen gefunden werden sollen, muß hier gezeigt werden.

§. 42.

Es kann dieses aber auf zweyerley Art geschehen. Nach der ersten Art setze man $\sqrt{}(1 + x^2) = x + p$, so wird $1 + x^2 = x^2 + 2px + p^2$, wo sich das Quadrat x^2 aufhebt, und folglich x ohne ein Wurzelzeichen bestimmt werden kann. Denn subtrahirt man in der gefundenen Gleichung auf beyden Seiten

x^2, so wird $2px + p^2 = 1$, und also $x = \frac{1 - p^2}{2p}$, wo man für p eine jede Zahl, und auch so gar Brüche annehmen kann.

Man setze daher $p = \frac{m}{n}$, so wird $x = \frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{\frac{2m}{n}}$; diesen Bruch multiplicire man oben und unten mit n^2, so bekömmt man $x = \frac{n^2 - m^2}{2mn}$.

§. 43.

Damit also $1 + x^2$ ein Quadrat werde, so kann man für m und n nach Belieben alle mögliche ganze Zahlen annehmen, und also daraus unendlich viele Werthe für x finden.

Setzt man auch überhaupt $x = \frac{n^2 - m^2}{2mn}$, so wird $1 + x^2 = 1 + \frac{n^4 - 2n^2m^2 + m^4}{4m^2n^2}$ oder $1 + x^2 = \frac{n^4 + 2m^2n^2 + m^4}{4m^2n^2}$, welcher Bruch wirklich ein Quadrat ist, und man findet daraus: $\sqrt{(1 + x^2)} = \frac{n^2 + m^2}{2mn}$. Hieraus können nun folgende kleinere Werthe für x bemerkt werden:

Wenn	$n = 2$,	3,	3,	4,	4,	5,	5,	5,	5,
und	$m = 1$,	1,	2,	1,	3,	1,	2,	3,	4,
so wird	$x = \frac{3}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{5}{18}$,	$\frac{7}{24}$,	$\frac{12}{5}$,	$\frac{21}{20}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{9}{40}$.

§. 44.

Hieraus folgt auf eine allgemeine Art, daß $1 + \frac{(n^2 - m^2)^2}{(2mn)^2} = \frac{(n^2 + m^2)^2}{(2mn)^2}$. Nun multiplicire

man

man diese Gleichung mit $(2mn)^2$, so wird $(2mn)^2 + (n^2 - m^2)^2 = (n^2 + m^2)^2$. Wir haben also auf eine allgemeine Art zwey Quadrate, deren Summe wieder ein Quadrat ist. Hierdurch wird nun folgende Aufgabe aufgelöset:

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist.

Ist z. B. die Gleichung $p^2 + q^2 = r^2$ gegeben, so darf man nur $p = 2mn$ und $q = n^2 - m^2$ annehmen, so wird $r = n^2 + m^2$; und da hernach ferner $(n^2 + m^2)^2 - (2mn)^2 = (n^2 - m^2)^2$ ist, so können wir auch folgende Aufgabe auflösen:

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Differenz wieder eine Quadratzahl sey, so daß $p^2 - q^2 = r^2$; denn hier darf man nur setzen: p sey $= n^2 + m^2$ und $q = 2mn$, so wird $r = n^2 - m^2$. Oder man kann auch $p = n^2 + m^2$ und $q = n^2 - m^2$ setzen, so wird alsdann $r = 2mn$.

§. 45.

Wir haben aber noch eine zweyte Methode versprochen, um die Formel $1 + x^2$ zu einem Quadrat zu machen; diese zweyte Art nun ist folgende:

Man setze $\sqrt{}(1 + x^2) = 1 + \frac{mx}{n}$; daher bekömmt man $1 + x^2 = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$. Subtrahirt man hier auf beyden Seiten 1, so wird $x^2 = \frac{2mx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$, welche Gleichung sich durch x theilen läßt. Diese Theilung giebt $x = \frac{2m}{n} + \frac{m^2x}{n^2}$, und wenn man mit n^2 multiplicirt, $n^2x = 2mn + m^2x$;

woraus man $x = \frac{2mn}{n^2 - m^2}$ findet. Setzt man diesen Werth für x, so wird $1 + x^2 = 1 + \frac{4m^2n^2}{n^4 - 2m^2n^2 + m^4}$ oder $= \frac{n^4 + 2m^2n^2 + m^4}{n^4 - 2m^2n^2 + m^4}$, welcher Bruch das Quadrat von $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}$ ist. Da man nun daher die Gleichung $1 + \frac{(2mn)^2}{(n^2 - m^2)^2} = \frac{(n^2 + m^2)^2}{(n^2 - m^2)^2}$ bekommt, so fließt daraus, wie oben, $(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2$, welches die vorigen zwey Quadrate sind, deren Summe wieder ein Quadrat macht.

§. 46.

Dieser Fall, welchen wir hier ausführlich abgehandelt haben, giebt uns nun zwey Methoden an die Hand, die allgemeine Formel $a + bx + cx^2$ zu einem Quadrat zu machen. Die erstere geht auf alle Fälle, wo c ein Quadrat ist; der andere aber, wo a ein Quadrat ist, welche beyde Fälle wir hier durchgehen wollen.

I.) Es sey also erstlich c eine Quadratzahl, oder die gegebene Formel sey $a + bx + f^2x^2$, welche ein Quadrat werden soll. Zu diesem Ende setze man $\sqrt{(a + bx + f^2x^2)} = fx + \frac{m}{n}$, so wird das Quadrat $a + bx + f^2x^2 = f^2x^2 + \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2}{n^2}$, wo sich f^2 x^2 auf beyden Seiten aufhebt, so daß $a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2}{n^2}$, welche Gleichung, wenn man sie mit n^2 multiplicirt, $n^2a + n^2bx = 2mnfx + m^2$ giebt; woraus $x = \frac{m^2 - n^2a}{n^2b - 2mnf}$ gefunden wird. Schreibt

man

man nun diesen Werth für x, so wird $\sqrt{}(a + bx + f^2x^2) = \frac{m^2f - n^2af}{n^2b - 2mnf} + \frac{m}{n} = \frac{mnb - m^2f - n^2af}{n^2b - 2mnf}$.

§. 47.

Da für x ein Bruch gefunden worden ist, so setze man sogleich $x = \frac{p}{q}$, so daß $p = m^2 - n^2a$, und $q = n^2b - 2mnf$; alsdann wird die Formel $a + \frac{bp}{q} + \frac{f^2p^2}{q^2}$ ein Quadrat. Folglich bleibt dieselbe auch ein Quadrat, wenn sie mit dem Quadrat q^2 multiplicirt wird; daher auch wieder die Formel $aq^2 + bpq + f^2p^2$ ein Quadrat wird, wenn man $p = m^2 - n^2a$ und $q = n^2b - 2mnf$ annimmt, woraus unendlich viele Auflösungen in ganzen Zahlen gefunden werden können, weil man die Buchstaben m und n nach Belieben annehmen kann.

§. 48.

II. Der zweyte Fall findet Statt, wenn der Buchstabe a ein Quadrat ist. Es sey daher z. B. die Formel gegeben: $f^2 + bx + cx^2$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Zu diesem Ende setze man $\sqrt{}(f^2 + bx + cx^2) = f + \frac{mx}{n}$, so wird das Quadrat $f^2 + bx + cx^2 = f^2 + \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$, wo sich f^2 aufhebt, und die übrigen Glieder sich alle durch x theilen lassen, so daß $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{m^2x}{n^2}$, oder mit n^2 multiplicirt, $n^2b + n^2cx = 2mnf + m^2x$, oder versetzt, $n^2cx - m^2x = 2mnf - n^2b$,

n^2b, und folglich $x = \frac{2mnf - n^2b}{n^2c - m^2}$. Setzt man nun diesen Werth für x, so wird $\sqrt{(f^2 + bx + cx^2)}$ $= f + \frac{2m^2f - mnb}{n^2c - m^2} = \frac{n^2cf + m^2f - mnb}{n^2c - m^2}$. Setzt man hier $x = \frac{p}{q}$, so kann, wie oben, folgende Form zu einem Quadrat gemacht werden: $f^2q^2 + bpq + cp^2$, und dieses geschieht, wenn man nemlich $p = 2mnf - n^2b$ und $q = n^2c - m^2$ annimmt.

§. 49.

Hier ist besonders der Fall merkwürdig, wenn $a = o$, oder wenn diese Formel $bx + cx^2$ zu einem Quadrat gemacht werden soll. Denn da darf man nur $\sqrt{(bx + cx^2)} = \frac{mx}{n}$ setzen, so wird $bx + cx^2$ $= \frac{m^2x^2}{n^2}$, und wenn man durch x dividirt und mit n^2 multiplicirt, $bn^2 + cn^2x = m^2x$; folglich $x = \frac{n^2b}{m^2 - cn^2}$. Man suche z. B. alle dreyeckige Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind, so muß $\frac{x^2 + x}{2}$, und also auch $2x^2 + 2x$ ein Quadrat seyn. Dasselbe sey nun $\frac{m^2x^2}{n^2}$, so wird $2n^2x + 2n^2 = m^2x$ und $x = \frac{2n2}{m^2 - 2n^2}$, wo man für m und n alle mögliche Zahlen annehmen kann, für x aber alsdenn gemeiniglich ein Bruch gefunden wird. Doch können auch ganze Zahlen herauskommen. Denn

wenn

wenn man z. B. $m = 3$ und $n = 2$ setzt, so bekömmt man $x = 8$, wovon das Dreyeck 36 ist, welches auch ein Quadrat ist.

Man kann auch $m = 7$, und $n = 5$ setzen, so wird $x = - 50$, wovon das Dreyeck 1225 ist, welches zugleich das Dreyeck von $+ 49$ und auch das Quadrat von 35 ist. Dieses wäre auch herausgekommen, wenn man $n = 7$, und $m = 10$ gesetzt hätte; denn da wird $x = 49$.

Eben so kann man $m = 17$, und $n = 12$ annehmen, da wird $x = 288$, wovon das Dreyeck ist $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{288 . 289}{2} = 144 . 289$, welches eine Quadratzahl ist, deren Wurzel $= 12 . 17 = 204$ ist.

§. 50.

Bey diesem letzten Fall ist zu erwägen, daß die Formel $bx + cx^2$ aus diesem Grunde zum Quadrat gemacht worden ist, weil dieselbe einen Factor hatte, nemlich x, welches uns auf neue Fälle führt, in welchen auch die Formel $a + bx + cx^2$ ein Quadrat werden kann, wenn weder a noch c ein Quadrat ist.

Diese Fälle finden Statt, wenn sich $a + bx + cx^2$ in zwey Factoren theilen läßt, welches geschieht, wenn $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist. Hierbey ist aber zu merken, daß die Factoren immer von den Wurzeln einer Gleichung abhängen. Man setze also $a + bx + cx^2 = 0$, so wird $cx^2 = - bx - a$; folglich $x^2 = - \frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$, und $x = - \frac{b}{2c} \pm \sqrt{}\left(\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}\right)$, oder $x = - \frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{}(b^2 - 4ac)}{2c}$; woraus erhellt, daß, wenn $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist, diese Wurzel rational angegeben werden könne.

Es sey daher $b^2 - 4ac = d^2$, so sind die Wurzeln $\frac{-b \pm d}{2c}$, oder es ist $x = \frac{-b \pm d}{2c}$; also werden von der Formel $a + bx + cx^2$ die Divisores seyn: $x + \frac{b-d}{2c}$ und $x + \frac{b+d}{2c}$, welche mit einander multiplicirt, dieselbe Formel nur durch c dividirt hervorbringen. Man findet nemlich $x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \frac{d^2}{4c^2}$. Da nun $d^2 = b^2 - 4ac$, so hat man

$$x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \left(\frac{b^2}{4c^2} + \frac{4ac}{4c^2}\right) = x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c},$$

woraus man durch die Multiplication mit c, $cx^2 + bx + a$ erhält. Man darf also nur den einen Factor mit c multipliciren, so wird unsere Formel folgendem Producte gleich seyn:

$$\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c}\right)$$

und man sieht, daß diese Auflösung immer Statt findet, so oft $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist.

§. 51.

Hieraus fließt der dritte Fall, in welchem unsere Formel $a + bx + cx^2$ zu einem Quadrat gemacht werden kann; welchen wir also zu den obigen beyden hinzufügen wollen.

III. Dieser Fall ereignet sich nun, wenn unsere Formel durch ein solches Product vorgestellt werden kann: $(f + gx).(h + kx)$. Um dieses zu einem Quadrat zu machen, so setze man die Wurzel davon: $\sqrt{(f+gx).(h+kx)} = \frac{m.(f+gx)}{n}$, so bekömmt

man

man $(f+gx)(h+kx) = \frac{m^2.(f+gx)^2}{n^2}$, welche Gleichung durch $f+gx$ dividirt, folgende giebt: $h+kx = \frac{m^2.(f+gx)}{n^2}$, d. i. $hn^2 + kn^2x = fm^2 + gm^2x$, und also $x = \frac{fm^2 - hn^2}{kn^2 - gm^2}$.

§. 52.

Zur Erläuterung kann folgende Aufgabe dienen:

I. Aufg. Man suche die Zahlen x, welche von der Beschaffenheit sind, daß, wenn man von ihrem doppelten Quadrat 2 subtrahirt, der Rest wieder ein Quadrat sey.

Da nun $2x^2 - 2$ ein Quadrat seyn muß, so ist zu erwägen, daß sich diese Formel durch folgende Factoren vorstellen läßt: $2.(x+1)(x-1)$. Man setze also die Wurzel davon $\frac{m.(x+1)}{n}$, so wird $2.(x+1)(x-1) = \frac{m^2(x+1)^2}{n^2}$. Nunmehr dividire durch $x+1$, und multiplicire mit n^2, so bekömmt man $2n^2x - 2n^2 = m^2x + m^2$, und daher $x = \frac{m^2+2n^2}{2n^2-m^2}$. Nimmt man hier $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = 3$, und $2x^2 - 2 = 16 = 4^2$.

Setzt man $m = 3$ und $n = 2$, so wird $x = -17$. Da aber nur das Quadrat von x vorkömmt, so ist es gleich viel, ob man $x = -17$ oder $x = +17$ setzt; aus beyden wird $2x^2 - 2 = 576 = 24^2$.

§. 53.

II. Aufg. Es sey folgende Formel gegeben: $6 + 13x + 6x^2$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Hier ist nun $a = 6$, $b = 13$ und $c = 6$, wo also weder a noch c ein Quadrat ist. Man sehe also, ob $b^2 - 4ac$ ein Quadrat werde. Da nun $b^2 - 4ac = 169 - 144 = 25 = 5^2$, so erhellt hieraus, daß $b^2 - 4ac$ wirklich ein Quadrat ist. Die gegebene Formel $6 + 13x + 6x^2$ läßt sich durch folgende zwey Factoren vorstellen: $(2 + 3x) \cdot (3 + 2x)$. Davon sey nun die Wurzel $\frac{m(2 + 3x)}{n}$, so bekömmt man $(2 + 3x) \cdot (3 + 2x) = \frac{m^2(2 + 3x)^2}{n^2}$; daraus wird $3n^2 + 2n^2x = 2m^2 + 3m^2x$, und daher $x = \frac{2m^2 - 3n^2}{2n^2 - 3m^2} = \frac{3n^2 - 2m^2}{3m^2 - 2n^2}$. Damit nun der Zähler positiv werde, so muß $3n^2$ größer seyn, als $2m^2$, und also $2m^2$ kleiner als $3n^2$; folglich muß $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner seyn als $\frac{3}{2}$. Damit aber auch der Nenner positiv werde, so muß $3m^2$ größer als $2n^2$, und also $\frac{m^2}{n^2}$ größer als $\frac{2}{3}$ seyn. Um daher für x positive Zahlen zu finden, so müssen für m und n solche Zahlen angenommen werden, daß $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner als $\frac{3}{2}$ und doch größer als $\frac{2}{3}$ sey.

Setzt

Setzt man nun $m=6$ und $n=5$, so wird $\frac{m^2}{n^2} = \frac{36}{25}$, welches kleiner als $\frac{3}{2}$, und offenbar größer als $\frac{2}{3}$ ist; daher bekömmt man $x = \frac{3}{58}$.

§. 54.

IV. Dieser dritte Fall leitet uns noch auf einen vierten, welcher Statt findet, wenn die Formel $a+bx+cx^2$ dergestalt in zwey Theile getheilt werden kann, daß der erste ein Quadrat sey, der andere aber sich in zwey Factoren auflösen lasse, so daß eine solche Form herauskomme: p^2+qr, wo die Buchstaben p, q und r Formeln von dieser Art $f+gx$ bedeuten. Denn da darf man nur setzen $\surd(p^2+qr) = p + \frac{mq}{n}$; so wird $p^2+qr = p^2 + \frac{2mpq}{n} + \frac{m^2q^2}{n^2}$, wo sich die p^2 aufheben und die übrigen Glieder durch q theilen lassen, so daß $r = \frac{2mp}{n} + \frac{m^2q}{n^2}$ oder $n^2r = 2mnp + m^2q$, woraus sich das übrige leicht bestimmen läßt; und dieses ist der vierte Fall, in welchem unsere Formel zu einem Quadrat gemacht werden kann, welchen wir nun noch durch einige Beispiele erläutern wollen.

§. 55.

III. Aufg. Man suche Zahlen x, die von der Beschaffenheit sind, daß ihr Quadrat doppelt genommen um 1 grösser werde als ein anderes Quadrat, oder wenn man davon 1 subtrahirt, wieder ein Quadrat übrig bleibe, wie solches bey der Zahl 5 geschieht, deren Quadrat

25 doppelt genommen 50, und um eins größer, als das Quadrat 49 ist.

Also muß $2x^2 - 1$ ein Quadrat seyn, wo nach unserer Formel $a = -1$, $b = 0$, und $c = 2$, und also weder a noch c ein Quadrat ist; auch läßt sich dieselbe nicht in zwey Factoren auflösen, weil $b^2 - 4ac = 8$ kein Quadrat ist, und daher keiner von den drey ersten Fällen hier Statt findet.

Nach dem vierten Fall aber kann diese Formel auf folgende Art vorgestellt werden: $x^2 + (x^2 - 1) = x^2 + (x-1)(x+1)$. Hiervon werde nun die Wurzel $x + \frac{m(x+1)}{n}$ gesetzt, so wird das Quadrat davon seyn: $x^2 + (x+1).(x-1) = x^2 + \frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{m^2(x+1)^2}{n^2}$, wo sich x^2 auf beyden Seiten abziehen und die übrigen Glieder durch $x+1$ theilen lassen, wo denn $n^2x - n^2 = 2mnx + m^2x + m^2$ und $x = \frac{m^2+n^2}{n^2-2mn-m^2}$ heraus kömmt; und weil in der Formel $2x^2 - 1$ nur das Quadrat x^2 vorkömmt, so ist es gleich viel, ob die Werthe von x positiv oder negativ heraus kommen. Man kann auch sogleich $-m$ statt $+m$ schreiben, damit man $x = \frac{m^2+n^2}{n^2+2mn-m^2}$ bekomme. Nimmt man hier $m=1$ und $n = 1$, so hat man $x = 1$ und $2x^2 - 1 = 1$. Es sey ferner $m = 1$ und $n = 2$, so wird $x = \frac{5}{7}$ und $2x^2 - 1 = \frac{1}{49}$. Setzt man aber $m = 1$ und $n = -2$, so wird $x = -5$, oder $x = +5$ und $2x^2 - 1 = 49$.

§. 56.

IV. Aufg. Man suche solche Zahlen, deren Quadrat doppelt genommen, wenn dazu 2 addirt wird, wieder ein Quadrat mache.

mache. Dergleichen ist die Zahl 7, von welcher das doppelt genommene Quadrat um 2 vermehrt, das Quadrat 100 giebt.

Es muß also die Formel $2x^2 + 2$ ein Quadrat seyn, wo $a = 2$, $b = 0$ und $c = 2$, und also weder a noch c ein Quadrat ist, auch ist $b^2 - 4ac$ oder -16 kein Quadrat, und kann also die dritte Regel hier nicht Statt finden.

Nach der vierten Regel aber läßt sich unsere Formel so vorstellen:

Man setze den ersten Theil $= 4$, so wird der andere seyn: $2x^2 - 2 = 2(x+1).(x-1)$, und daher unsere Formel $4 + 2(x+1).(x-1)$. Davon sey die Wurzel $2 + \frac{m.(x+1)}{n}$, woraus folgende Gleichung entsteht: $4 + 2(x+1).(x-1) = 4 + \frac{4m(x+1)}{n} + \frac{m^2(x+1)^2}{n^2}$, wo sich 4 auf beyden Seiten aufhebt, die übrigen Glieder aber durch $x + 1$ theilen lassen, so daß $2n^2x - 2n^2 = 4mn + m^2x + m^2$ und daher $x = \frac{4mn + m^2 + 2n^2}{2n^2 - m^2}$. Setzt man $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = 7$, und $2x^2 + 2 = 100$.

Nimmt man $m = 0$ und $n = 1$, so wird $x = 1$ und $2x^2 + 2 = 4$.

§. 57.

Oft geschieht es auch, daß, wenn sich weder die erste, noch die zweyte, noch die dritte Regel anwenden läßt, man nicht finden kann, wie zufolge der vierten Regel die Formel in zwey solche Theile zergliedert werden könne, als doch erfordert werden. Z. B. wenn diese Formel vorkäme: $7 + 15x + 13x^2$, so ist zwar eine solche Zergliederung möglich, sie fällt aber nicht so leicht in die Augen. Denn der erste Theil ist $(1 - x)^2$ oder $1 - 2x + x^2$, und daher wird der andere $6 + 17x + 12x^2$ seyn, welcher deswegen Factoren hat, weil $17^2 - 4.6.12 = 1$, und also ein Quadrat ist. Die zwey Factoren davon sind auch wirklich $(2 + 3x).(3 + 4x)$, so daß diese Formel $(1 - x)^2 + (2 + 3x)(3 + 4x)$ seyn wird, welche sich jetzt nach der vierten Regel auflösen läßt.

Es ist aber nicht wohl zu verlangen, daß jemand diese Zergliederung errathen soll; daher wollen wir noch einen allgemeinen Weg anzeigen, um zuerst zu erkennen, ob es möglich sey eine solche Formel aufzulösen? Denn es giebt unendlich viel dergleichen Formeln, deren Auflösung schlechterdings unmöglich ist, z. B. $3x^2 + 2$, welche nimmermehr zu einem Quadrat gemacht werden kann.

Findet sich aber eine Formel in einem einzigen Falle möglich, so ist es leicht, alle Auflösungen derselben zu finden, welches wir noch hier erläutern wollen.

§. 58.

Der ganze Vortheil, welcher uns in solchen Fällen zu statten kommen kann, besteht darin, daß man suche, ob man keinen Fall finden, oder gleichsam errathen könne, in welchem eine solche Formel, wie $a + bx + cx^2$ ein Quadrat wird, indem man für x einige kleinere Zahlen nach und nach setzt, um zu sehen, ob in keinem Fall ein Quadrat herauskomme.

Weil es auch möglich ist, daß man durch eine gebrochene Zahl für x gesetzt seine Absicht erreichen könne, so wird es rathsam seyn, sogleich für x einen Bruch, z. B. $\frac{t}{u}$ zu schreiben, woraus diese Formel

ent-

entsteht: $a + \frac{bt}{u} + \frac{ct^2}{u^2}$, welche, wenn sie ein Quadrat ist, auch mit dem Quadrat u^2 multiplicirt, ein Quadrat bleibt. Man hat also nur nöthig zu versuchen, ob man für t und u solche Werthe in ganzen Zahlen errathen könne, daß die Formel $au^2 + btu + ct^2$ ein Quadrat werde. Denn alsdann, wenn man $x = \frac{t}{u}$ annimmt, so wird auch die Formel $a + bx + cx^2$ gewiß ein Quadrat seyn.

Kann man aber aller Mühe ungeachtet keinen solchen Fall finden, so hat man einen hinreichenden Grund zu vermuthen, daß es ganz und gar unmöglich sey, die Formel zu einem Quadrat zu machen.

§. 59.

Hat man aber einen Fall errathen, in welchem eine solche Formel ein Quadrat wird, so ist es ganz leicht, alle übrige Fälle zu finden, in welchen dieselbe ebenfalls ein Quadrat wird, und die Anzahl derselben ist immer unendlich groß. Um dieses zu zeigen, so wollen wir erstlich folgende Formel betrachten: $2 + 7x^2$, wo $a = 2$, $b = 0$, und $c = 7$. Diese wird nun offenbar ein Quadrat, wenn $x = 1$; daher setze man $x = 1 + y$, so wird $x^2 = 1 + 2y + y^2$, und unsere Formel wird seyn: $9 + 14y + 7y^2$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Setzen wir also nach der zweyten Regel die Quadratwurzel davon $= 3 + \frac{my}{n}$, so bekommen wir die Gleichung: $9 + 14y + 7y^2 = 9 + \frac{6my}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$, wo sich 9 auf beyden Seiten aufhebt, die übrigen Glieder aber alle durch y theilen lassen; wir bekommen also $14n^2 + 7n^2y = 6mn + m^2y$ und daher $y =$

 6mn

$\frac{6mn - 14n^2}{7n^2 - m^2}$; daraus finden wir $x = \frac{6mn - 7n^2 - m^2}{7n^2 - m^2}$, wo man für m und n alle beliebige Zahlen annehmen kann.

Setzt man nun $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{1}{3}$, oder auch, weil nur x^2 vorkömmt, $x = +\frac{1}{3}$; daher $2 + 7x^2 = \frac{25}{9}$.

Man setze ferner $m = 3$ und $n = 1$, so wird $x = -1$ oder $x = +1$.

Setzt man aber $m = 3$ und $n = -1$, so wird $x = 17$; hieraus erhält man $2 + 7x^2 = 2025$, welches das Quadrat von 45 ist.

Wir wollen auch annehmen $m = 8$ und $n = 3$, so wird $x = -17$, wie zuvor.

Setzen wir aber $m = 8$ und $n = -3$, so wird $x = 271$, daraus wird $2 + 7x^2 = 514089 = 717^2$.

§. 60.

Wir wollen ferner die Formel $5x^2 + 3x + 7$ betrachten, welche ein Quadrat wird, wenn $x = -1$. Deswegen setze man $x = y - 1$, so ist $x^2 = (y-1)^2 = y^2 - 2y + 1$. Folglich

$$\begin{array}{rcl} 5x^2 & = & 5y^2 - 10y + 5 \\ 3x & = & + 3y - 3 \\ 7 & = & + 7 \\ \hline 5x^2 + 3x + 7 & = & 5y^2 - 7y + 9 \end{array}$$

Setzt man hiervon die Quadratwurzel $= 3 - \frac{my}{n}$, so wird $5y^2 - 7y + 9 = 9 - \frac{6my}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$; daher wir bekommen $5n^2y - 7n^2 = -6mn + m^2y$, und $y = \frac{7n^2 - 6mn}{5n^2 - m^2}$; folglich $x = \frac{2n^2 - 6mn + m^2}{5n^2 - m^2}$.

Es sey $m = 2$ und $n = 1$, so wird $x = -6$ und also $5x^2 + 3x + 7 = 169 = 13^2$.

Setzt man aber $m = -2$ und $n = 1$, so wird $x = 18$ und $5x^2 + 3x + 7 = 1681 = 41^2$.

§. 61.

Betrachten wir nun auch folgende Formel: $7x^2 + 15x + 13$, und setzen wir sogleich $x = \frac{t}{u}$, so daß diese Formel $7t^2 + 15tu + 12u^2$ ein Quadrat seyn soll. Nun versuche man für t und u einige kleinere Zahlen wie folgt:

Es sey $t = 1$ und $u = 1$, so wird unsere Formel	$= 35$
$t = 2$ und $u = 1$	$= 71$
$t = 2$ und $u = -1$	$= 11$
$t = 3$ und $u = 1$	$= 121$

Da nun 121 ein Quadrat ist, und also der Werth $x = 3$ ein Genüge leistet, so setze man $x = y + 3$ und dann wird unsere Formel $7y^2 + 42y + 63 + 15y + 45 + 13$ oder $7y^2 + 57y + 121$; von dieser setze man die Wurzel $= 11 + \frac{my}{n}$, so bekömmt man $7y^2 + 57y + 121 = 121 + \frac{22my}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$, oder $7n^2y + 57n^2 = 22mn + m^2y$, und daher $y = \frac{57n^2 - 22mn}{m^2 - 7n^2}$ und $x = \frac{36n^2 - 22mn + 3m^2}{m^2 - 7n^2}$.

Man setze z. B. $m = 3$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{3}{2}$ und unsere Formel $7x^2 + 15x + 13 = \frac{25}{4} = (\frac{5}{2})^2$. Es sey ferner $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{17}{6}$. Nimmt man $m = 3$ und $n = -1$, so wird $x = \frac{129}{2}$ und unsere Formel $7x^2 + 15x + 13 = \frac{120409}{4} = (\frac{347}{2})^2$.

§. 62.

Zuweilen aber ist alle Mühe umsonst, einen Fall zu errathen, in welchem die gegebene Formel ein Quadrat wird, z. B. $3x^2 + 2$, oder wenn man anstatt x den Bruch $\frac{t}{u}$ setzt, $3t^2 + 2u^2$ wird niemals ein Quadrat, man mag auch für t und u Zahlen annehmen welche man will. Dergleichen Formeln, welche auf keine Weise zu einem Quadrat gemacht werden können, giebt es unendlich viele, und deswegen wird es der Mühe werth seyn, einige Kennzeichen anzugeben, woraus die Unmöglichkeit erkannt werden kann, damit man oft der Mühe überhoben seyn möge, durch Rathen solche Fälle zu finden, wo ein Quadrat herauskömmt. Wir wollen hiervon im folgenden Capitel ausführlich reden.

V. Capitel.

Von den Fällen, in welchen die Formel $a + bx + cx^2$ niemals ein Quadrat werden kann.

§. 63.

Da unsere allgemeine Formel aus drey Gliedern besteht, so ist zu bemerken, daß sie immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied fehlt. Dieses geschieht, wenn man $x = \frac{y-b}{2c}$ annimmt, dadurch bekömmt unsere Formel folgende Gestalt: $a + \frac{by - b^2}{2c} + \frac{y^2 - 2by + b^2}{4c}$,

oder

oder $\frac{4ac-b^2+y^2}{4c}$. Soll diese Formel ein Quadrat werden, so setze man dieselbe $=\frac{z^2}{4}$. Hierdurch erhält man $4ac-b^2+y^2=cz^2$, folglich $y^2=cz^2+b^2-4ac$. Wenn also unsere Formel ein Quadrat seyn soll, so wird auch die Formel cz^2+b^2-4ac ein Quadrat, und umgekehrt, wenn diese ein Quadrat wird, so wird auch die obige ein Quadrat. Folglich wenn man für b^2-4ac den Buchstaben t setzt, so kömmt es darauf an, ob eine solche Formel cz^2+t ein Quadrat werden könne oder nicht; und da diese Formel nur aus zwey Gliedern besteht, so ist es unstreitig weit leichter, die Möglichkeit und Unmöglichkeit derselben zu beurtheilen, welches aus der Beschaffenheit der beyden gegebenen Zahlen c und t geschehen muß.

§. 64.

Setzt man $t=0$, so ist offenbar, daß die Formel cz^2 nur alsdann ein Quadrat werde, wenn die Zahl c ein Quadrat ist. Denn da ein Quadrat durch ein anderes Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird, so kann cz^2 kein Quadrat seyn, wofern nicht $\frac{cz^2}{z^2}$, das ist c, ein Quadrat ist. Also wenn die Zahl c kein Quadrat ist, so kann auch die Formel cz^2 auf keine Weise ein Quadrat werden. Ist aber c eine Quadratzahl, so ist auch cz^2 ein Quadrat, man mag für z annehmen, was man will.

§. 65.

Um andere Fälle beurtheilen zu können, so müssen wir dasjenige zu Hülfe nehmen, was im sechsten Capitel des ersten Theils von den Eigenschaften der

Zahlen in Ansehung ihrer Theiler gelehrt worden ist.

So sind z. B. in Ansehung des Theilers 3 die Zahlen von dreyerley Art; die erste begreift diejenigen Zahlen in sich, welche sich durch 3 theilen lassen und durch die Formel $3n$ vorgestellt werden.

Zu der andern Art gehören diejenigen, welche durch 3 dividirt, 1 übrig lassen, und in der Formel $3n + 1$ enthalten sind.

Die dritte Art aber begreift die Zahlen in sich, welche durch 3 dividirt, 2 übrig lassen, und durch die Formel $3n + 2$ vorgestellt werden.

Da nun alle Zahlen in einer von diesen 3 Formeln enthalten sind, (1 Th. §. 60), so wollen wir die Quadrate davon betrachten.

Ist die Zahl in der Formel $3n$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9n^2$, welches sich also nicht nur durch 3, sondern auch so gar durch 9 theilen läßt.

Ist die Zahl in der Formel $3n + 1$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9n^2 + 6n + 1$, welches durch 3 dividirt, $3n^2 + 2n$ giebt und 1 zum Rest läßt, und also auch zur zweyten Art $3n + 1$ gehört.

Ist endlich die Zahl in der Formel $3n + 2$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9n^2 + 12n + 4$, welches durch 3 dividirt, $3n^2 + 4n + 1$ giebt, und 1 zum Rest läßt, und also auch zu der zweyten Art $3n + 1$ gehört. Daher ist klar, daß alle Quadratzahlen in Ansehung des Theilers 3, nur von doppelter Art sind. Denn entweder lassen sie sich durch 3 theilen, und alsdann müssen sie sich auch nothwendig durch 9 theilen lassen; oder wenn sie sich nicht durch 3 theilen lassen, so bleibt jedesmal nur 1, niemals aber 2 übrig. Daher keine Zahl, die in der Form $3n + 2$ enthalten ist, ein Quadrat seyn kann.

§. 66.

§. 66.

Hieraus können wir nun leicht zeigen, daß die Formel $3x^2 + 2$ niemals ein Quadrat werden kann, man mag für x eine ganze Zahl oder einen Bruch setzen. Denn wenn x eine ganze Zahl ist, und man theilt diese Formel $3x^2 + 2$ durch 3, so bleiben 2 übrig; daher diese Formel kein Quadrat seyn kann. Ist aber x ein Bruch, so setze man $x = \frac{t}{u}$, von welchem Bruch wir annehmen können, daß derselbe schon in seine kleinste Form sey gebracht worden, und also t und u keinen gemeinschaftlichen Theiler außer 1 haben. Sollte nun $\frac{t^2}{u^2} + 2$ ein Quadrat seyn, so müßte dieselbe auch mit u^2 multiplicirt, d. i. $3t^2 + 2u^2$, ein Quadrat seyn, welches aber ebenfalls unmöglich ist. Denn die Zahl u läßt sich entweder durch 3 theilen, oder nicht. Läßt sie sich dadurch theilen, so läßt sich t nicht theilen, weil sonst t und u einen gemeinschaftlichen Theiler hätten.

Man setze daher $u = 3f$, so wird unsere Formel $3t^2 + 18f^2$, welche durch 3 getheilt, $t^2 + 6f^2$ giebt. Diese letzte Formel aber läßt sich nicht weiter durch 3 theilen, wie zu einem Quadrat erfordert wird, weil sich zwar $6f^2$ theilen läßt, t^2 aber durch 3 dividirt, 1 übrig läßt.

Läßt sich aber u nicht durch 3 theilen, so sehe man was übrig bleibt. Weil sich das erste Glied durch 3 theilen läßt, so kömmt es mit dem Rest bloß auf das zweyte Glied $2u^2$ an. Da aber u^2 durch 3 dividirt 1 zum Rest hat, oder eine Zahl von der Art $3n + 1$ ist; so wird $2u^2$ eine Zahl von der Art $6n + 2$ seyn, und also durch 3 dividirt 2 übrig lassen; daher unsere Formel $3t^2 + 2u^2$ durch 3 dividirt,

dirt, 2 übrig läßt, und also gewiß keine Quadratzahl seyn kann.

§. 67.

Eben so kann man beweisen, daß auch die Formel $3t^2 + 5u^2$ niemals ein Quadrat seyn kann, und so gar auch keine von den folgenden: $3t^2+8u^2$, $3t^2 + 11u^2$, $3t^2 + 14u^2$ u. s. f., wo die Zahlen 3, 8, 11, 14 u. s. f. durch 3 dividirt, 2 übrig lassen. Denn wäre u durch 3 theilbar, folglich t nicht, und man setzte $u = 3s$, so würde die Formel durch 3, nicht aber durch 9 theilbar seyn. Wäre u nicht durch 3 theilbar und also u^2 eine Zahl von der Art $2n + 1$, so wäre zwar das erste Glied $3t^2$ durch 3 theilbar, das andere aber $5u^2$ von der Form $15n + 5$, oder $8u^2$ von der Form $24n + 8$, oder $11u^2$ von dieser $33n + 11$ u. s. f. würde durch 3 dividirt, 2 übrig lassen, und also kein Quadrat seyn können.

§. 68.

Dieses gilt also auch von der allgemeinen Formel $3t^2 + (3n + 2) . u^2$, welche nie ein Quadrat werden kann, und auch dann nicht, wenn für n negative Zahlen gesetzt würden. Nimmt man z. B. $n = -1$ an, so ist es unmöglich, die Formel $3t^2 - u^2$ zu einem Quadrat zu machen. Denn ist u durch 3 theilbar, so ist die Sache offenbar; wäre aber u nicht durch 3 theilbar, so würde u^2 eine Zahl von der Art $3n + 1$, und also unsere Formel $3t^2 - 3n - 1$ seyn, welche durch 3 dividirt, -1, oder um 3 mehr, $+2$ übrig läßt. Man setze überhaupt $n = -m$, so wird unsere Formel $3t^2 - (3m - 2) u^2$, welche auch niemals ein Quadrat werden kann.

§. 69.

§. 69.

Hierzu hat uns nun die Betrachtung des Theilers 3 geführt; wir wollen daher auch 4 als einen Theiler betrachten, wo dann alle Zahlen in einer von folgenden vier Formeln enthalten sind, als:

I. $4n$, II. $4n + 1$, III. $4n+2$, IV. $4n+3$, (1 Th. §. 61)

Von den Zahlen der ersten Art ist das Quadrat $16n^2$ und läßt sich also durch 16 theilen. Ist es eine Zahl von der zweyten Art $4n + 1$, so ist ihr Quadrat $16n^2 + 8n + 1$, welches durch 8 dividirt, 1 übrig läßt und gehört also zu der Formel $8n + 1$.

Ist es eine Zahl von der dritten Art $4n + 2$, so ist ihr Quadrat $16n^2 + 16n + 4$, welche durch 16 dividirt, 4 übrig läßt, und also in der Form $16n + 4$ enthalten ist. Ist es endlich eine Zahl von der vierten Art $4n + 3$, so ist ihr Quadrat $16n^2 + 24n + 9$, welches durch 8 dividirt, 1 übrig läßt.

§. 70.

Hieraus lernen wir zuerst, daß alle gerade Quadratzahlen in der Form $16n$, oder in der $16n+4$ enthalten sind; folglich alle übrige gerade Formeln, nemlich $16n + 2$, $16n + 6$, $16n + 8$, $16n+10$, $16n + 12$, $16n + 14$, können niemals Quadratzahlen seyn.

Ferner ist offenbar, daß alle ungerade Quadratzahlen in der einzigen Formel $8n + 1$ enthalten sind, oder durch 8 dividirt, 1 als Rest lassen. Daher alle übrige ungerade Zahlen, welche in einer von diesen Formeln: $8n + 3$, $8n + 5$, $8n + 7$, enthalten sind, niemals Quadrate werden können.

§. 71.

§. 71.

Aus diesem Grunde können wir auch wiederum zeigen, daß die Formel $3t^2 + 2u^2$ kein Quadrat seyn kann. Denn entweder sind beyde Zahlen t und u ungerade, oder die eine ist gerade und die andere ist ungerade, weil beyde zugleich nicht gerade seyn können, indem sonst 2 ihr gemeinschaftlicher Theiler seyn würde. Wären beyde ungerade, und folglich sowohl t^2 als u^2 in der Form $8n + 1$ enthalten, so würde das erste Glied $3t^2$ durch 8 dividirt, 3, das andere Glied aber 2, und beyde zusammen würden 5 als Rest lassen, und also keine Quadrate seyn. Wäre aber t eine gerade Zahl und u ungerade, so würde sich das erste Glied $3t^2$ durch 4 theilen lassen, das andere aber $2u^2$ würde durch 4 dividirt, 2, also beyde zusammen würden 2 übrig lassen und also kein Quadrat seyn. Wäre aber endlich u gerade, nemlich $u = 2s$, aber t ungerade und folglich $t^2 = 8n + 1$, so würde unsere Formel seyn: $24n + 3 + 8s^2$, welche durch 8 dividirt, 3 übrig läßt, und also kein Quadrat seyn kann.

Eben dieser Beweis läßt sich auch auf die Formel $3t^2 + (8n + 2)u^2$ ausdehnen; ingleichen auch auf diese $(8m + 3)t^2 + 2u^2$, und auch so gar auf die $(8m + 3)t^2 + (8n + 2)u^2$, wo für m und n alle ganze Zahlen sowohl positive als negative, genommen werden können.

§. 72.

Wir gehen nun weiter zum Theiler 5, in Ansehung dessen alle Zahlen in einer von folgenden fünf Formeln enthalten sind.

I. $5n$, II. $5n+1$, III. $5n+2$, IV. $5n+3$, V. $5n+4$, (1 Th. §. 62). Gehört nun eine Zahl zu der ersten

Art,

Art, so ist ihr Quadrat $25n^2$, welches nicht nur durch 5, sondern auch durch 25 theilbar ist.

Ist eine Zahl von der zweyten Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 10n + 1$, welches durch 5 dividirt, 1 übrig läßt und also in der Formel $5n + 1$ enthalten ist.

Ist eine Zahl von der dritten Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 20n + 4$, welches durch 5 dividirt, 4 übrig läßt.

Ist eine Zahl von der vierten Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 30n + 9$, welches durch 5 dividirt, 4 übrig läßt.

Ist endlich eine Zahl von der fünften Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 40n + 16$, welches durch 5 dividirt, 1 übrig läßt. Wenn daher eine Quadratzahl sich nicht durch 5 theilen läßt, so ist der Rest immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3; daher in diesen Formeln $5n + 2$ und $5n + 3$ kein Quadrat enthalten seyn kann.

§. 73.

Aus diesem Grunde können wir auch beweisen, daß weder die Formel $5t^2 + 2u^2$, noch diese $5t^2 + 3u^2$ ein Quadrat werden könne. Denn entweder ist u durch 5 theilbar oder nicht; im ersten Falle würden sich diese Formeln durch 5, nicht aber durch 25 theilen lassen, und also auch keine Quadrate seyn können. Ist aber u nicht durch 5 theilbar, so ist u^2 entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$. Im erstern Falle wird die erste Formel $5t^2 + 10n + 2$, welche durch 5 getheilt, 2 übrig läßt; die andere aber wird $5t^2 + 15n + 3$, welche durch 5 getheilt, 3 übrig läßt, und also keine ein Quadrat seyn kann. Ist aber $u^2 = 5n + 4$, so wird die erste Formel $5t^2 + 10n + 8$, welche durch 5 dividirt, 3 übrig läßt;

die

die andere aber wird $5t^2 + 15n + 12$, welche durch 3 dividirt, 2 übrig läßt, und also auch in diesem Falle kein Quadrat werden kann.

Aus eben diesem Grunde kann auch weder die Formel $3t^2 + (5n + 2)u^2$, noch diese $5t^2 + (5n + 3)u^2$ ein Quadrat seyn, weil eben dieselben Reste, wie vorher, überbleiben; man kann auch so gar im ersten Gliede $5mt^2$ statt $5t^2$ schreiben, wenn nur m nicht durch 5 theilbar ist.

§. 74.

Wie alle gerade Quadrate in dieser Form $4n$, alle ungerade aber in dieser Form $4n + 1$ enthalten sind, und also weder $4n + 2$, noch $4n + 3$, ein Quadrat seyn kann, so folgt daraus, daß die allgemeine Formel $(4m + 3)t^2 + (4n + 3)u^2$ niemals ein Quadrat seyn kann. Denn wäre t gerade, so würde sich t^2 durch 4 theilen lassen, das andere Glied aber würde durch 4 dividirt, 3 übrig lassen. Wären hingegen die Zahlen t und u ungerade, so würden die Reste von t^2 und u^2 nur 1, also von der ganzen Formel würde 2 der Rest seyn. Nun aber ist keine Zahl, welche durch 4 dividirt, 2 übrig läßt, ein Quadrat. Hier ist auch zu merken, daß sowohl m als n negativ, und auch = 0, genommen werden kann; daher weder diese Formel $3t^2 + 3u^2$, noch diese $3t^2 - u^2$ ein Quadrat seyn kann.

§. 75.

So wie wir von den bisherigen Theilern gefunden haben, daß einige Arten der Zahlen niemals Quadrate sind, so gilt dieses auch bey allen andern Theilern, daß sich immer einige Arten finden, die keine Quadrate seyn können.

Es

Es sey z. B. der Theiler 7, so sind alle Zahlen in einer der folgenden sieben Arten enthalten, von welchen wir auch die Quadrate untersuchen wollen.

Arten der Zahlen		ihre Quadrate	gehören zu der Art
I.	$7n$	$49n^2$	$7n$
II.	$7n + 1$	$49n^2 + 14n + 1$	$7n + 1$
III.	$7n + 2$	$49n^2 + 28n + 4$	$7n + 4$
IV.	$7n + 3$	$49n^2 + 42n + 9$	$7n + 2$
V.	$7n + 4$	$49n^2 + 56n + 16$	$7n + 2$
VI.	$7n + 5$	$49n^2 + 70n + 25$	$7n + 4$
VII.	$7n + 6$	$49n^2 + 84n + 36$	$7n + 1$

Da nun die Quadrate, die sich nicht durch 7 theilen lassen, in einer von diesen drey Arten: $7n+1$, $7n + 2$, $7n + 4$, enthalten seyn müssen, so werden die drey übrigen Arten von der Natur der Quadrate gänzlich ausgeschlossen. Diese Arten sind nun $7n + 3$, $7n + 5$, $7n + 6$, und der Grund davon ist offenbar, weil sich immer zwey Arten finden, von welchen die Quadrate zu einer Gattung gehören.

§. 76.

Um dieses noch deutlicher zu zeigen, so merke man, daß die letzte Art, $7n + 6$, auch durch $7n - 1$ ausgedrückt werden kann. Denn $7n + 6$ und $7n - 1$ sind um 7 von einander unterschieden. Aus eben dieser Ursache ist auch die Formel $7n + 5$ mit dieser, $7n - 2$, einerley, und $7n + 4$ ist eben so viel als $7n - 3$. Nun aber ist offenbar, daß von diesen zwey Arten der Zahlen $7n + 1$ und $7n - 1$ die Quadrate, durch 7 dividirt, einerley übrig lassen, nemlich 1; eben so sind auch die Quadrate dieser beyden Arten $7n + 2$ und $7n - 2$ von einerley Gattung.

§. 77.

Ueberhaupt also, wie auch immer der Theiler beschaffen seyn mag, welchen wir mit dem Buchstaben d andeuten wollen, so sind die daher entstehenden verschiedenen Arten der Zahlen folgende:

$$dn;$$
$$dn+1,\ dn+2,\ dn+3.\ \text{u. s. f.}$$
$$dn-1,\ dn-2,\ dn-3.\ \text{u. s. f.}$$

wo die Quadrate von $dn+1$ und $dn-1$ dieses gemein haben, daß sie durch d dividirt, 1 übrig lassen, und also beyde zu einer Art, nemlich zu $dn+1$, gehören. Eben so verhält es sich auch mit den beyden Arten $dn+2$ und $dn-2$, deren Quadrate zu der Art $dn+4$ gehören.

Und überhaupt gilt es auch von diesen zwey Arten $dn+a$ und $dn-a$, deren Quadrate durch d dividirt, einerley übrig lassen, nemlich a^2, oder so viel als übrig bleibt, wenn man a^2 durch d theilt.

§. 78.

So erhält man also eine unendliche Menge solcher Formeln, wie at^2+bu^2, welche auf keine Art Quadrate werden können. So sieht man z. B. aus dem Theiler 7 gar leicht, daß keine von diesen drey Formeln $7t^2+3u^2$, $7t^2+5u^2$ und $7t^2+6u^2$ jemals ein Quadrat werden kann, weil u, durch 7 dividirt, entweder 1, oder 2, oder 4 übrig läßt; ferner weil bey der ersten entweder 3, oder 6, oder 5, bey der zweyten entweder 5, oder 3, oder 6, bey der dritten entweder 6, oder 5, oder 3 übrig bleibt, welches bey keinem Quadrat geschehen kann. Wenn nun dergleichen Formeln vorkommen, so würde man sich vergebens bemühen, irgend einen Fall zu errathen, wo ein Quadrat herauskommen möchte,

möchte, und deswegen ist diese Betrachtung von großer Wichtigkeit.

Ist aber eine gegebene Formel nicht von dieser Beschaffenheit, und man kann einen einzigen Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird, so ist in dem vorigen Capitel schon gezeigt worden, wie daraus unendlich viele andere Fälle gefunden werden sollen.

Die gegebene Formel war eigentlich $ax^2 + b$, und weil gewöhnlich für x Brüche gefunden werden, so haben wir $x = \frac{t}{u}$ gesetzt, so daß diese Formel $at^2 + bu^2$ zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Es giebt aber auch oft unendlich viel Fälle, wo so gar x in ganzen Zahlen gegeben werden kann; wie nun diese zu finden sind, das soll in dem folgenden Capitel gezeigt werden.

VI. Capitel.

Von den Fällen in ganzen Zahlen, wo die Formel $ax^2 + b$ ein Quadrat wird.

§. 79.

Es ist schon oben (§. 63) die Methode gezeigt worden, die Formel $a + bx + cx^2$ so zu verwandeln, daß das mittlere Glied wegfalle, und daher begnügen wir uns, die gegenwärtige Abhandlung nur auf die Form $ax^2 + b$ einzuschränken; wobey es darauf ankömmt, daß für x nur ganze Zahlen gefunden werden, wodurch die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist es nöthig, daß eine solche Formel an sich möglich sey; denn wäre sie unmöglich, so könnten nicht einmal Brüche für x, noch weniger aber ganze Zahlen Statt finden.

§. 80.

Man setze also die Formel $ax^2 + b = y^2$, da dann beyde Buchstaben x und y ganze Zahlen seyn sollen, weil a und b dergleichen sind.

Zu diesem Ende ist unumgänglich nöthig, daß man schon einen Fall in ganzen Zahlen wisse oder errathen habe; denn sonst würde alle Mühe überflüssig seyn, mehrere dergleichen Fälle zu suchen, weil vieleicht die Formel selbst etwas unmögliches enthalten könnte.

Wir wollen daher annehmen, daß diese Formel ein Quadrat werde, wenn man $x = f$ setzt, und wollen das Quadrat durch g^2 andeuten, so daß $af^2 + b = g^2$, wo also f und g bekannte Zahlen anzeigen. Es kömmt daher nur darauf an, wie aus diesem Fall noch andere Fälle hergeleitet werden können; und diese Untersuchung ist um so viel wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieselbe unterworfen ist, welche wir aber durch folgende Kunstgriffe überwinden werden.

§. 81.

Da nun schon $af^2 + b = g^2$ gefunden worden ist, und überdem auch $ax^2 + b = y^2$ seyn soll, so subtrahire man jene Gleichung von dieser, wodurch man $ax^2 - af^2 = y^2 - g^2$ erhält, welche Gleichung sich durch folgende Factoren ausdrücken läßt: $a(x + f)(x - f) = (y + g)(y - g)$. Man multiplicire auf beyden Seiten mit pq, so hat man $apq(x + f)(x - f) = pq(y + g)(y - g)$; welche Gleichung sich auf folgende Art vertheilen läßt:

läßt: $ap(x + f) = q(y + g)$ und $q(x - f) = p(y - g)$. Nunmehr suche man aus diesen beyden Gleichungen die Buchstaben x und y zu bestimmen. Die erste Gleichung durch q dividirt, giebt $y + g = \frac{apx + apf}{q}$; die andere durch p dividirt, giebt $y - g = \frac{ax - af}{p}$; diese von jener subtrahirt, giebt $2g = \frac{(ap^2 - q^2)x + (ap^2 + q^2)f}{pq}$, und wenn man mit pq multiplicirt, so erhält man $2pqg = (ap^2 - q^2)x + (ap^2 + q^2)f$; daher $x = \frac{2gpq}{ap^2 - q^2} - \frac{(ap^2 + q^2)f}{ap^2 - q^2}$. Hieraus findet man ferner $y = g + \frac{2gq^2}{ap^2 - q^2} - \frac{(ap^2 + q^2)fq}{(ap^2 - q^2)p} - \frac{qf}{p}$. Hier enthalten die zwey ersten Glieder den Buchstaben g, welche zusammen gezogen, $\frac{g(ap^2 + q^2)}{ap^2 - q^2}$ geben; die beyden andern enthalten den Buchstaben f, und geben unter einer Benennung $-\frac{2afpq}{ap^2 - q^2}$, daher ist $y = \frac{g(ap^2 + q^2) - 2afpq}{ap^2 - q^2}$.

§. 82.

Diese Arbeit scheint unserm Zwecke gar nicht zu entsprechen, indem wir hier auf Brüche gerathen sind, da wir doch für x und y ganze Zahlen finden sollten, und es würde nun auf eine neue Untersuchung ankommen, was man anstatt p und q für Zahlen annehmen müßte, damit die Brüche wegfallen; diese Frage scheint aber noch schwerer zu seyn, als unsere Hauptfrage. Allein es kann hier ein besonderer Kunstgriff angewendet werden, wodurch wir leicht zum Ziele gelangen. Denn da hier alles

alles in ganzen Zahlen ausgedrückt werden soll, so setze man $\frac{ap^2+q^2}{ap^2-q^2}=m$, und $\frac{2pq}{ap^2-q^2}=n$; hierdurch erhält man $x=ng-mf$ und $y=mg-naf$. Allein hier können wir m und n nicht nach Belieben nehmen, sondern sie müssen so bestimmt werden, daß den obigen Bestimmungen ein Genüge geschehe; zu diesem Ende wollen wir ihre Quadrate betrachten, da wir dann haben werden:

$$m^2=\frac{a^2p^4+2ap^2q^2+q^4}{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4} \text{ und } n^2=\frac{4p^2q^2}{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4};$$

wir bekommen daher:

$$m^2-an^2=\frac{a^2p^4+2ap^2q^2+q^4-4ap^2q^2}{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4}$$

$$=\frac{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4}{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4}=1.$$

§. 83.

Hieraus sieht man, daß die beyden Zahlen m und n so beschaffen seyn müssen, daß $m^2=an^2+1$. Da nun a eine bekannte Zahl ist, so muß man vor allen Dingen darauf bedacht seyn, eine solche ganze Zahl für n zu finden, daß an^2+1 ein Quadrat werde, von welchem hernach m die Wurzel ist; und so bald man eine solche gefunden, und überdem auch die Zahl f so bestimmt hat, daß af^2+b ein Quadrat werde, nemlich durch g^2, so bekömmt man für x und y folgende Werthe in ganzen Zahlen: $x=ng-mf$; $y=mg-naf$, und dadurch wird $ax^2+b=y^2$.

§. 84.

Es ist schon für sich klar, daß, wenn einmal m und n gefunden worden, man dafür auch $-m$ und $-n$ schreiben könne, weil das Quadrat n^2 doch einerley bleibt.

Um daher x und y in ganzen Zahlen zu finden, damit $ax^2 + b = y^2$ werde, so muß man vor allen Dingen einen solchen Fall schon haben, daß nemlich $af^2 + b = g^2$ sey. So bald dieser Fall bekannt ist, so muß man noch zu der Zahl a solche Zahlen m und n suchen, daß $an^2 + 1 = m^2$ werde, wozu in folgendem die Anleitung gegeben werden soll. Ist nun dies geschehen, so hat man sogleich einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + naf$, da dann $x^2 + b = y^2$ seyn wird.

Setzt man diesen neuen Fall an die Stelle des vorigen, für bekannt angenommenen Falls, und schreibt $ng + mf$, statt f, und $mg + naf$, statt g, so bekömmt man für x und y wieder neue Werthe, aus welchen ferner, wenn sie für f und g gesetzt werden, noch andere neue heraus gebracht werden, und so immerfort, so daß, wenn man anfänglich nur einen solchen Fall gehabt hat, man daraus unendlich viele andere finden kann.

§. 85.

Die Art, wie wir zu dieser Auflösung gelangt sind, war ziemlich mühsam, und schien anfänglich von unserm Endzweck sich zu entfernen, indem wir auf ziemlich verwirrte Brüche geriethen, die durch ein besonderes Glück haben weggeschaft werden können. Es wird daher gut seyn, noch einen andern kürzern Weg anzuzeigen, welcher uns zu eben dieser Auflösung führet.

§. 86.

Da $ax^2 + b = y^2$ seyn soll, und man schon $af^2 + b = g^2$ gefunden hat, so giebt uns jene Gleichung $b = y^2 - ax^2$, diese aber $b = g^2 - af^2$. Folglich muß auch $y^2 - ax^2 = g^2 - af^2$ seyn; und jetzt kömmt alles darauf an, daß man aus den bekannten Zahlen f und g die unbekannten x und y finden soll; wo denn so gleich in die Augen fällt, daß diese Gleichung erhalten werde, wenn man $x = f$ und $y = g$ annimmt. Allein hieraus erhält man keinen neuen Fall, außer denjenigen, der schon für bekannt genommen wird.

Wir wollen also setzen, man habe für n schon eine solche Zahl gefunden, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat werde, oder daß $an^2 + 1 = m^2$; daher wird nun $m^2 - an^2 = 1$. Damit multiplicire man in obiger Gleichung den Theil $g^2 - af^2$, so muß auch $y^2 - ax^2 = (g^2 - af^2)(m^2 - an^2) = g^2m^2 - af^2m^2 - ag^2n^2 + a^2f^2n^2$ seyn. Wir wollen zu diesem Ende $y = gm + afn$ setzen, so bekommen wir: $g^2m^2 + 2afgmn + a^2f^2n^2 - ax^2 = g^2m^2 - af^2m^2 - ag^2n^2 + a^2f^2n^2$, wo sich die Glieder g^2m^2 und $a^2f^2n^2$ einander aufheben, und wir also $ax^2 = af^2m^2 + ag^2n^2 + 2afgmn$ erhalten, welche Gleichung, durch a getheilt, $x^2 = f^2m^2 + g^2n^2 + 2fgmn$ giebt. Diese Formel ist offenbar ein Quadrat, woraus wir $x = fm + gn$ erhalten, welches eben die Formeln sind, die wir vorher gefunden haben.

§. 87.

Es wird nun noch nöthig seyn, diese Auflösung durch einige Beispiele deutlicher zu machen.

I. Aufg. Man suche alle ganze Zahlen für x, und zwar von der Beschaffenheit, daß $2x^2 - 1$ ein Quadrat werde, oder daß $2x^2 - 1 = y^2$ sey.

Hier ist also $2x^2 - 1 = ax^2 + b$, und daher $a = 2$ und $b = -1$. Der erste Fall, welcher in die Augen fällt, ist nun, wenn man $x = 1$ und

y = 1

$y = 1$ annimmt. Aus diesem bekannten Falle haben wir nun $f = 1$ und $g = 1$. Es wird aber ferner erfordert, eine solche Zahl für n zu finden, daß $2n^2 + 1$ ein Quadrat werde, nemlich m^2; dieses geschieht nun, wenn $n = 2$ und $m = 3$, daher wir aus einem jeden bekannten Fall f und g folgende neue finden: $x = 3f + 2g$, und $y = 3g + 4f$. Da nun der erste bekannte Fall $f = 1$ und $g = 1$ ist, so finden wir daraus folgende neue Fälle:

$x = f = 1$	5	29	169
$y = g = 1$	7	41	239 u. s. f.

§. 88.

II. Aufg. Man suche alle dreyeckige Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind.

Es sey z die Dreyeckswurzel, so ist das Dreyeck $\frac{z^2 + z}{2}$, welches ein Quadrat seyn soll. Die Wurzel davon sey x, so muß $\frac{z^2 + z}{2} = x^2$ seyn. Man multiplicire mit 8, so wird $4z^2 + 4z = 8x^2$ und auf beyden Seiten 1 addirt, giebt $4z^2 + 4z + 1 = (2z + 1)^2 = 8x^2 + 1$. Es kömmt also darauf an, daß $8x^2 + 1$ ein Quadrat werde, und wenn man $8x^2 + 1 = y^2$ setzt, so wird $y = 2z + 1$, und also die gesetzte Dreyeckwurzel $z = \frac{y - 1}{2}$.

Hier ist nun $a = 8$ und $b = 1$, und der bekannte Fall fällt so gleich in die Augen, nemlich $f = 0$ und $g = 1$. Damit ferner $8n^2 + 1 = m^2$ werde, so ist $n = 1$ und $m = 3$; daher bekömmt man $x = 3f + g$ und $y = 3g + 8f$, und $z = \frac{y - 1}{2}$. Hieraus bekommen wir folgende Auflösungen:

$x = f = 0$	1	6	35	204	1189	
$y = g = 1$	3	17	99	577	3363	
$z = \frac{y-1}{2} = 0$	1	8	49	288	1681	u. s. f.

§. 89.

III. Aufg. Man suche alle Fünfeckszahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind.

Die Fünfeckswurzel sey $= z$, so ist das Fünfeck $= \frac{3z^2 - z}{2}$, welches dem Quadrat x^2 gleich gesetzt werde; daher wird $3z^2 - z = 2x^2$; man multiplicire mit 12 und addire, so wird $36z^2 - 12z + 1 = 24x^2 + 1 = (6z - 1)^2$.

Setzt man nun $24x^2 + 1 = y^2$, so ist $y = 6z - 1$ und $z = \frac{y+1}{6}$. Da nun hier $a = 24$, $b = 1$, so ist der bekannte Fall $f = 0$ und $g = 1$. Da ferner $24n^2 + 1 = m^2$ seyn muß, so nehme man $n = 1$ und davon wird $m = 5$; daher erhalten wir $x = 5f + g$ und $y = 5g + 24f$ und $z = \frac{y+1}{6}$; oder auch $y = 1 - 6z$, so wird ebenfalls $z = \frac{-y}{6}$, woraus man folgende Auflösungen findet:

$x = f = 0$	1	10	99	980
$y = g = 1$	5	49	485	4801
$z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
oder $z = \frac{1-y}{6} = 0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

§. 90.

IV. Aufg. Man suche alle Quadrate in ganzen Zahlen, welche siebenmal genommen und dazu 2 addirt, wiederum Quadrate werden.

Hier

Hier wird also gefordert, daß $7x^2 + 2 = y^2$ seyn soll, wo $a = 7$ und $b = 2$; der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, wenn $x = 1$ und dann ist $x = f = 1$ und $y = g = 3$. Nun betrachte man die Gleichung $7n^2 + 1 = m^2$, und da findet man leicht $n = 3$ und $m = 8$; daher erhalten wir $x = 8f + 3g$ und $y = 8g + 21f$, woraus folgende Werthe für x gefunden werden:

$x = f = 1$	17	271
$y = g = 3$	45	717

§. 91.

V. Aufg. Man suche alle dreyeckige Zahlen, welche zugleich fünfeckige Zahlen sind.

Es sey die Dreyeckswurzel $= p$ und die Fünfeckswurzel $= q$, so muß seyn $\frac{p^2+p}{2} = \frac{3q^2-q}{2}$, oder $3q^2 - q = p^2 + p$; hieraus suche man q, und da $q^2 = \frac{1}{3}q + \frac{p^2+p}{3}$, so wird $q = \frac{1}{6} \pm \surd\left(\frac{1}{36} + \frac{p^2+p}{3}\right)$, das ist $q = \frac{1 \pm \surd(12p^2 + 12p + 1)}{6}$. Es kömmt also darauf an, daß $12p^2 + 12p + 1$ ein Quadrat und zwar in ganzen Zahlen werde. Da nun hier das mittlere Glied 12p vorhanden ist, so setze man $p = \frac{x-1}{2}$; dadurch bekommen wir $12p^2 = 3x^2 - 6x + 3$ und $12p = 6x - 6$, daher $12p^2 + 12p + 1 = 3x^2 - 2$, welches ein Quadrat seyn muß.

Nehmen wir daher an, daß $3x^2 - 2 = y^2$, so haben wir daraus $p = \frac{x-1}{2}$ und $q = \frac{1+y}{6}$; da nun

die

die ganze Sache auf die Formel $3x^2 - 2 = y^2$ ankömmt, so ist $a = 3$ und $b = -2$, und der bekannte Fall $x = f = 1$ und $y = g = 1$; hernach haben wir für diese Gleichung $m^2 = 3n^2 + 1$, $n = 1$ und $m = 2$, daraus erhalten wir folgende Werthe für x und y, und daher weiter für p und q.

Da $x = 2f + g$ und $y = 2g + 3f$ ist, so wird:

	$x = f = 1$	3	11	41
	$y = g = 1$	5	19	71
	$p = 0$	1	5	20
	$q = \frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
oder	$q = 0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

weil nemlich auch $q = \frac{1-y}{6}$ ist.

§. 92.

Bisher waren wir gezwungen, aus der gegebenen Formel das zweyte Glied wegzuschaffen, wenn eines vorhanden war. Man kann aber auch die erste gegebene Methode auf solche Formeln anwenden, wo das mittlere Glied vorhanden ist, welches wir hier noch anzeigen wollen. Es sey demnach die gegebene Formel, die ein Quadrat seyn soll, diese: $ax^2 + bx + c = y^2$, und hievon sey schon der Fall $af^2 + bf + c = g^2$ bekannt.

Nun subtrahire man diese Gleichung von der gegebenen, so wird $a(x^2 - f^2) + b(x - f) = y^2 - g^2$, welche durch folgende Factoren ausgedrückt werden kann: $(x - f)(ax + af + b) = (y - g)(y + g)$. Man multiplicire auf beyden Seiten mit pq, so wird $pq(x - f)(ax + af + b) = pq(y - g)(y + g)$, welche Gleichung sich in diese zwey zergliedern läßt: I.) $p(x - f) = q(y - g)$; II.) $q(ax + af + b) = p(y + g)$; denn wenn man sie in einander multiplicirt, so erhält man jene

Gleichung. Nun multiplicire man die erste mit p, die andere mit q, und subtrahire jenes Product von diesem, so kömmt $(aq^2 - p^2)x + (aq^2 + p^2)f + bq^2 = 2gpq$ heraus. Folglich ist $x = \frac{2gpq}{aq^2-p^2} - \frac{(aq^2+p^2)f}{aq^2-p^2} - \frac{bq^2}{aq^2-p^2}$. Nach der ersten Gleichung ist $q(y-g) = p(x-f) = p\left(\frac{2gpq}{aq^2-p^2} - \frac{2afq^2}{aq^2-p^2} - \frac{bq^2}{aq^2-p^2}\right)$; also $y - g = \frac{2gp^2}{aq^2-p^2} - \frac{2afpq}{aq^2-p^2} - \frac{bpq}{aq^2-p^2}$, und daher $y = g\left(\frac{aq^2+p^2}{aq^2-p^2}\right) - \frac{2afpq}{aq^2-p^2} - \frac{bpq}{aq^2-p^2}$.

Um diese Brüche wegzubringen, nehme man, wie oben (§. 82) geschehen ist, $\frac{aq^2+p^2}{aq^2-p} = m$ und $\frac{2pq}{aq^2-p^2} = n$ an, so wird $m + 1 = \frac{2aq^2}{aq^2-p^2}$ und also $\frac{q^2}{aq^2-p^2} = \frac{m+1}{2a}$. Folglich wird $x = ng - mf - b\frac{(m+1)}{2a}$ und $y = mg - naf - \frac{1}{2}bn$ seyn, wo die Buchstaben m und n eben so beschaffen seyn müssen, wie oben, nemlich daß $m^2 = an^2 + 1$.

§. 93.

Solchergestalt sind aber die für x und y gefundenen Formeln noch mit Brüchen vermengt, weil die Glieder, welche den Buchstaben b enthalten, Brüche sind, und also unserm Endzweck kein Ge-

nüge

nüge leisten. Allein es ist zu merken, daß, wenn man von diesen Werthen zu den folgenden fortschreitet, diese immer ganze Zahlen werden, welche man aber viel leichter aus den anfänglich eingeführten Zahlen p und q finden kann. Denn man nehme p und q dergestalt an, daß $p^2 = aq^2 + 1$; so fallen, weil $aq^2 - p^2 = -1$, die Brüche von selbst weg; und da wird $x = -2gpq + f(aq^2 + p^2) + bq^2$, und $y = -g(aq^2 + p^2) + 2afpq + bpq$. Weil aber in dem bekannten Falle $af^2 + bf + c = g^2$ nur das Quadrat g^2 vorkömmt, so ist es gleichviel, ob man dem Buchstaben g das Zeichen + oder − giebt. Man schreibe also $-g$ statt $+g$, so werden unsere Formeln seyn: $x = 2gpq + f(aq^2 + p^2) + bq^2$; und $y = g(aq^2 + p^2) + 2afpq + bpq$, wo denn gewiß $ax^2 + bx + c = y^2$ seyn wird.

Man suche z. B. diejenigen Sechseckzahlen, welche zugleich Quadrate sind.

Da muß dann $2x^2 - x = y^2$ seyn, wo $a = 2$, $b = -1$, und $c = 0$; der bekannte Fall ist hier offenbar $x = f = 1$, und $y = g = 1$.

Da hernach $p^2 = 2q^2 + 1$ seyn muß, so wird $q = 2$ und $p = 3$; daher wir erhalten $x = 12g + 17f - 4$ und $y = 17g + 24f - 6$, woraus folgende Werthe gefunden werden:

$x = f = 1$	25	841	
$y = g = 1$	35	1189	u. s. f.

§. 94.

Wir wollen aber bey der erstern Formel, wo das mittlere Glied fehlt, noch etwas stehen bleiben, und die Fälle in Erwägung ziehen, wo die Formel $ax^2 + b$ ein Quadrat in ganzen Zahlen wird.

Es sey daher $ax^2 + b = y^2$, und hiezu werden zwey Stücke erfordert:

Erstlich, daß man einen Fall wisse, wo dieses geschieht; derselbe sey nun $af^2 + b = g^2$.

Zweytens, daß man solche Zahlen für m und n wisse, daß $m^2 = an^2 + 1$ sey, wozu im folgenden Capitel die Anleitung gegeben werden soll.

Hieraus erhält man nun einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + anf$, aus welchem hernach auf gleiche Art neue Fälle gefunden werden können, welche wir folgender maaßen vorstellen wollen:

$x = f$	A	B	C	D	E	
$y = g$	P	Q	R	S	T	u. s. f.

wo $A = ng + mf$ | $B = nP + mA$ | $C = nQ + mB$
und $P = mg + anf$ | $Q = mP + anA$ | $R = mQ + anB$
$D = nR + mC$ | $F = nT + mE$ |
$S = mR + anC$ | $V = mT + anE$ | u. s. f.

welche beyde Reihe Zahlen man mit leichter Mühe so weit fortsetzen kann, als man nur immer will.

§. 95.

Bey dieser Art aber kann man weder die obere Reihe für x fortsetzen, ohne zugleich die untere zu wissen, und eben so wenig kann man auch die untere fortsetzen, ohne die obere zu kennen. Man kann aber doch leicht eine Regel angeben, die obere Reihe allein fortzusetzen, ohne die untere zu wissen, welche Regel denn auch für die untere Reihe gilt, ohne daß man nöthig hätte, die obere zu wissen.

Die Zahlen nemlich, welche für x gesetzt werden können, schreiten nach einer gewissen Progression fort, wovon man ein jedes Glied, z. B. E, aus den beyden vorhergehenden C und D, bestimmen kann,

kann, ohne dazu die untern Glieder R und S nöthig zu haben. Denn da $E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC)$, d. i. $E = 2mnR + an^2C + m^2C$, so wird, weil $nR = D - mC$ gefunden, $E = 2mD - m^2C + an^2C$ oder $E = 2mD - (m^2 - an^2)C$. Da aber $m^2 = an^2 + 1$, also $m^2 - an^2 = 1$, so haben wir $E = 2mD - C$; woraus erhellt, wie eine jede dieser obern Zahlen aus den beyden vorhergehenden bestimmt wird.

Eben so verhält es sich auch mit der untern Reihe. Denn da $T = mS + anD$, und $D = nR + mC$, so wird $T = mS + an^2R + amnC$. Da nun ferner $S = mR + anC$, so ist $anC = S - mR$, welcher Werth für anC geschrieben, $T = 2mS - R$ giebt, so daß die untere Reihe nach eben der Regel fortschreitet, als die obere.

Man suche z. B. alle ganze Zahlen x, welche diese Eigenschaft haben, daß $2x^2 - 1 = y^2$. Da ist nun $f = 1$ und $g = 1$. Ferner damit $m^2 = 2n^2 + 1$, so muß $n = 2$ und $m = 3$ seyn. Da nun $A = ng + mf = 5$, so sind die zwey ersten Glieder 1 und 5, aus welchen die folgenden nach der Regel gefunden werden: $E = 6D - C$, d. h. ein jedes Glied sechsmal genommen, weniger dem vorhergehenden, giebt das folgende; daher die für x verlangten Zahlen nach dieser Regel folgendermaaßen fortgehen:

1, 5, 29, 169, 985, 5741 u. s. f.

Hieraus sieht man, daß sich diese Zahlen unendlich weit fortsetzen lassen. Wollte man aber auch Brüche gelten lassen, so würde, nach der oben gezeigten Methode, eine noch unendlich größere Menge angegeben werden können.

VII. Capitel.

Von einer besondern Methode die Formel $an^2 + 1$ zu einem Quadrate in ganzen Zahlen zu machen.

§. 96.

Die in dem vorigen Capitel gegebenen Vorschriften können nicht zur Ausführung gebracht werden, wenn man nicht im Stande ist, für eine jede Zahl a, eine solche ganze Zahl n zu finden, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat werde, oder daß man $m^2 = an^2 + 1$ bekomme.

Wollte man sich mit gebrochenen Zahlen begnügen, so würde diese Gleichung leicht aufzulösen seyn, indem man nur $m = 1 + \frac{np}{q}$ annehmen dürfte. Denn da wird $m^2 = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{n^2p^2}{q^2} = an^2 + 1$; wenn man also 1 auf beyden Seiten abzieht, und die übrigen Glieder durch n dividirt, und dann mit q^2 multiplicirt, so erhält man $2pq + np^2 = anq^2$, hieraus wird $n = \frac{2pq}{aq^2 - p^2}$ gefunden, woraus unendlich viele Werthe für n hergeleitet werden können. Weil aber n eine ganze Zahl seyn soll, so hilft uns dieses nichts; daher zur Erreichung unserer Absicht eine ganz andere Methode gebraucht werden muß.

§. 97.

Vor allen Dingen aber ist zu merken, daß, wenn $an^2 + 1$ ein Quadrat in ganzen Zahlen werden soll, a mag eine Zahl seyn, was man für eine will, solches nicht allezeit möglich sey.

Denn erstlich werden alle Fälle, wo a eine negative Zahl ist, ausgeschlossen; hernach auch alle diejenigen Fälle, wo a selbst eine Quadratzahl ist, weil alsdann an^2 ein Quadrat seyn würde, kein Quadrat aber von einem andern Quadrate in ganzen Zahlen um 1 unterschieden seyn kann. Daher muß unsere Formel so eingeschränkt werden, daß der Buchstabe a weder eine negative, noch eine Quadratzahl sey. So oft aber a eine positive Zahl und kein Quadrat ist, so kann jedesmal für n eine solche ganze Zahl gefunden werden, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat werde.

Hat man aber eine solche Zahl gefunden, so ist es leicht, nach dem vorigen Capitel unendlich viele andere herzuleiten. Zu unserm Vorhaben aber ist es genug, eine einzige, und zwar die kleinste, ausfindig zu machen.

§. 98.

Hierzu hat vormals ein gelehrter Engländer, Namens Pell, eine ganz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen. Diese ist aber nicht so beschaffen, daß sie auf eine allgemeine Art für eine jede Zahl a, sondern nur für einen jeden Fall besonders gebraucht werden kann.

Wir wollen daher mit den leichten Fällen den Anfang machen, und für n eine Zahl suchen, daß $2n^2 + 1$ ein Quadrat, oder daß $\sqrt{(2n^2 + 1)}$ rational werde.

Hier sieht man nun leicht, daß diese Quadratwurzel größer als n, aber kleiner als 2n seyn werde. Man nehme daher an, dieselbe sey $= n + p$, so wird p gewiß kleiner seyn, als n. Also haben wir

$\sqrt{(2n^2}$

$\sqrt{(2n^2 + 1)} = n + p$, und daher $2n^2 + 1 = n^2 + 2np + p^2$; woraus wir nun n suchen wollen. Da nun $n^2 = 2np + p^2 - 1$ ist, so wird $n = p + \sqrt{(2p^2 - 1)}$.

Es kömmt also darauf an, daß $2p^2 - 1$ ein Quadrat werde, welches geschieht, wenn $p = 1$ ist, und hieraus findet man $n = 2$ und $\sqrt{(2n^2 + 1)} = 3$. Wäre dieses letztere nicht so gleich in die Augen gefallen, so hätte man weiter fortgehen können, und da $\sqrt{(2p^2 - 1)}$ größer, als p, folglich n größer als 2p ist, so setze man $n = 2p + q$, wo denn $2p + q = p + \sqrt{(2p^2 - 1)}$ oder $p + q = \sqrt{(2p^2 - 1)}$ wird. Hiervon die Quadrate genommen, kömmt $p^2 + 2pq + q^2 = 2p^2 - 1$ oder $p^2 = 2pq + q^2 + 1$, folglich $p = q + \sqrt{(2q^2 + 1)}$. Es muß also $2q^2 + 1$ ein Quadrat seyn, wenn $q = 0$; daher $p = 1$ und $n = 2$. Aus diesem Beyspiele kann man sich schon einen Begriff von dieser Methode machen, welcher aber durch das folgende noch weiter aufgeklärt wird.

§. 99.

Es sey nun $a = 3$, so daß die Formel $3n^2 + 1$ ein Quadrat werden soll. Man setze $\sqrt{(3n^2 + 1)} = n + p$, so wird $3n^2 + 1 = n^2 + 2np + p^2$ und $2n^2 = 2np + p^2 - 1$, folglich $n = \frac{p + \sqrt{(3p^2 - 2)}}{2}$. Da nun $\sqrt{(3p^2 - 2)}$ größer als p, und also n größer als $\frac{2p}{2}$ oder als p ist, so setze man $n = p + q$, da wird $2p + 2q = p + \sqrt{(3p^2 - 2)}$ oder $p + 2q = \sqrt{(3p^2 - 2)}$; hiervon die Quadrate genommen, wird $p^2 + 4pq + 4q^2 = 3p^2 - 2$ oder $2p^2 = 4pq + 4q^2 + 2$, d. i. $p^2 = 2pq + 2q^2 + 1$, daher $p = q + \sqrt{(3q^2 + 1)}$. Diese Formel ist der gegebenen gleich, und also leistet $q = 0$ ein Genüge; daraus wird $p = 1$ und $n = 1$, also $\sqrt{(3n^2 + 1)} = 2$.

§. 100.

Nun sey $a = 5$, um diese Formel $5n^2 + 1$ zu einem Quadrat zu machen, wovon die Wurzel grösser als $2n$ ist. Man setze also $\sqrt{(5n^2 + 1)} = 2n + p$, so wird $5n^2 + 1 = 4n^2 + 4np + p^2$, und daraus $n^2 = 4np + p^2 - 1$; daher $n = 2p + \sqrt{(5p^2 - 1)}$. Weil nun $\sqrt{(5p^2 - 1)}$ größer ist als $2p$, so ist auch n größer als $4p$; deswegen setze man $n = 4p + q$, so wird $2p + q = \sqrt{(5p^2 - 1)}$ oder $4p^2 + 4pq + q^2 = 5p^2 - 1$; folglich $p^2 = 4pq + q^2 + 1$, und also $p = 2q + \sqrt{(5q^2 + 1)}$. Dieser geschieht ein Genüge, wenn $q = 0$, folglich $p = 1$ und $n = 4$; daher $\sqrt{(5n^2 + 1)} = 9$.

§. 101.

Es sey ferner $a = 6$, um $6n^2 + 1$ zu einem Quadrat zu machen, wovon die Wurzel größer ist als $2n$. Man setze deswegen $\sqrt{(6n^2 + 1)} = 2n + p$, so wird $6n^2 + 1 = 4n^2 + 4np + p^2$ oder $2n^2 = 4np + p^2 - 1$ und daher $n = p + \frac{\sqrt{(6p^2 - 2)}}{2}$, oder $n = \frac{2p + \sqrt{(6p^2 - 2)}}{2}$, also n größer als $2p$. Es sey daher $n = 2p + q$, so wird $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6p^2 - 2)}$ oder $2p + 2q = \sqrt{(6p^2 - 2)}$, und die Quadrate hiervon $4p^2 + 8pq + 4q^2 = 6p^2 - 2$, oder $2p^2 = 8pq + 4q^2 + 2$, d. i. $p^2 = 4pq + 2q^2 + 1$, woraus $p = 2q + \sqrt{(6q^2 + 1)}$ gefunden wird; welche Formel der ersten gleich ist, und also $q = 0$ gesetzt werden kann, woraus folgt, daß $p = 1$ und $n = 2$, also $\sqrt{(6n^2 + 1)} = 5$ ist.

§. 102.

Es sey weiter $a = 7$ und $7n^2 + 1 = m^2$. Weil nun m größer als $2n$, so setze man $m = 2n + p$; folglich ist $7n^2 + 1 = 4n^2 + 4np + p^2$ oder $3n^2 = 4np + p^2 - 1$, also $n = \frac{2p + \sqrt{(7p^2 - 3)}}{3}$. Da nun n größer ist als $\frac{4}{3}p$, und also größer als p ist, so setze man $n = p + q$; so wird $p + 3q = \sqrt{(7p^2 - 3)}$, wovon die Quadrate sind: $p^2 + 6pq + 9q^2 = 7p^2 - 3$; oder $6p^2 = 6pq + 9q^2 + 3$, oder $2p^2 = 2pq + 3q^2 + 1$, und also $p = \frac{q + \sqrt{(7q^2 + 2)}}{2}$. Da nun hier n größer als $\frac{3q}{2}$, und also größer als q ist, so setze man $p = q + r$, wodurch man erhält $q + 2r = \sqrt{(7q^2 + 2)}$, die Quadrate genommen, giebt $q^2 + 4qr + 4r^2 = 7q^2 + 2$, oder $6q^2 = 4qr + 4r^2 - 2$ oder $3q^2 = 2qr + 2r^2 - 1$, folglich $q = \frac{r + \sqrt{(7r^2 - 3)}}{3}$. Da aber q größer ist als r, so setze man $q = r + s$, da wird $2r + 3s = \sqrt{(7r^2 - 3)}$. Die Quadrate hiervon sind $4r^2 + 12rs + 9s^2 = 7r^2 - 3$, oder $3r^2 = 12rs + 9s^2 + 3$ und $r^2 = 4rs + 3s^2 + 1$; also $r = 2s + \sqrt{(7s^2 + 1)}$. Da nun diese Formel der erstern gleich, so setze man $s = 0$, und da bekömmt man $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ und $n = 3$, daraus $m = 8$.

Diese Rechnung kann auf folgende Art sehr abgekürzt werden, welches auch in andern Fällen Statt findet.

Da $7n^2 + 1 = m^2$, so ist m kleiner als $3n$. Man setze deswegen $m = 3n - p$, so wird $7n^2 + 1 = 9n^2 - 6np + p^2$ oder $2n^2 = 6np - p^2 + 1$, und daraus $n = \frac{3p - \sqrt{(7p^2 + 2)}}{2}$. Weil also n kleiner als $3p$ ist, so setze man ferner $n = 3p - q$; es wird also $3p - 2q = \sqrt{(7p^2 + 2)}$ und die Quadrate genommen $9p^2 - 12pq + 4q^2 = 7p^2 + 2$, oder $2p^2 = 12pq - 4q^2 + 2$ und $p^2 = 6pq - 2q^2 + 1$, daraus wird $p = 3q + \sqrt{(7q^2 + 1)}$. Hier kann man nun so gleich $q = 0$ annehmen und dann wird $p = 1$, $n = 3$, und $m = 8$ wie vorher.

§. 103.

Nehmen wir ferner $a = 8$, so daß $8n^2 + 1 = m^2$ und daher m kleiner als $3n$, so setze man $m = 3n - p$, so wird $8n^2 + 1 = 9n^2 - 6np + p^2$, oder $n^2 = 6np - p^2 + 1$, daraus $n = 3p + \sqrt{(8p^2 + 1)}$, welche Formel der ersten schon gleich ist, daher man $p = 0$ setzen kann, dann kömmt $n = 1$ und $m = 3$.

§. 104.

Auf gleiche Art verfährt man für eine jede andere Zahl a, wenn diese nur positiv und kein Quadrat ist, und man kömmt endlich immer zu einem solchen Wurzelzeichen, welches der gegebenen Formel ähnlich ist, als z. B. zu dieser: $\sqrt{(at^2 + 1)}$, da man denn nur $t = 0$ setzen darf, als in welchem Fall die Irrationalität immer wegfällt, und hierauf, wenn man zurück geht, erhält man einen Werth für n, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat wird.

Bisweilen gelangt man bald zu seinem Zweck, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, nach Beschaffenheit der Zahl a, wovon man doch keine gewisse Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich schnell; kömmt man aber bis zu dem Falle, wo $a = 13$, so wird die Rechnung viel weitläuftiger, und daher wird es gut seyn, diesen Fall hier genauer zu betrachten.

§. 105.

Es sey daher $a = 13$, so daß $13n^2 + 1 = m^2$ seyn soll. Weil nun m^2 größer ist als $9n^2$, und also m größer als $3n$, so setze man $m = 3n + p$. Nunmehr wird $13n^2 + 1 = 9n^2 + 6np + p^2$, oder $4n^2 = 6np + p^2 - 1$, und folglich $n = \frac{3p + \sqrt{(13p^2 - 4)}}{4}$; daher n größer als $\frac{6}{4}p$, und also größer als p ist. Man setze also $n = p + q$, so wird $p + 4q = \sqrt{(13p^2 - 4)}$, und die Quadrate hiervon $13p^2 - 4 = p^2 + 8pq + 16q^2$, daher $12p^2 = 8pq + 16q^2 + 4$, oder durch 4 getheilt, $3p^2 = 2pq + 4q^2 + 1$, und also $p = \frac{q + \sqrt{(13q^2 + 3)}}{3}$. Hier ist p größer als $\frac{q + 3q}{3}$, also größer als q; man setze daher $p = q + r$, so erhält man $2q + 3r = \sqrt{(13q^2 + 3)}$. Das Quadrat hiervon ist $13q^2 + 3 = 4q^2 + 12qr + 9r^2$, d. i. $9q^2 = 12qr + 9r^2 - 3$, durch 3 dividirt, $3q^2 = 4qr + 3r^2 - 1$; folglich $q = \frac{2r + \sqrt{(13r^2 - 3)}}{3}$. Hier ist q größer als $\frac{2r + 3r}{3}$, und also q größer als r; daher setze man $q = r + s$, so wird $r + 3s = \sqrt{(13r^2 - 3)}$; welche Gleichung quadrirt sich in folgende verwandelt: $13r^2 - 3 = r^2 + 6rs + 9s^2$, oder $12r^2 = 6rs + 9s^2 + 3$, durch 3 dividirt, wird $4r^2 = 2rs + 3s^2 + 1$, folglich $r = \frac{s + \sqrt{(13s^2 + 4)}}{4}$. Hier ist r größer als $\frac{s + 3s}{4}$ oder s; daher setze man $r = s + t$, so wird $3s + 4t = \sqrt{(13s^2 + 4)}$; das Quadrat genommen $13s^2 + 4 = 9s^2 + 24st + 16t^2$, und also $4s^2 = 24ts + 16t^2 - 4$, durch 4 dividirt, $s^2 = 6ts + 4t^2 - 1$, mithin $s = 3t + \sqrt{(13t^2 - 1)}$. Also ist s größer als $3t + 3t$ oder $6t$, deswegen setze man

man $s = 6t + u$, so wird $3t + u = \sqrt{(13t^2 - 1)}$, und daher, wenn man die Quadrate nimmt, $13t^2 - 1 = 9t^2 + 6tu + u^2$ und daraus $4t^2 = 6tu + u^2 + 1$, folglich $t = \frac{3u + \sqrt{(13u^2 + 4)}}{4}$, wo t größer als $\frac{6u}{4}$ und also größer als u ist. Man setze deswegen $t = u + v$, so wird $u + 4v = \sqrt{(13u^2 + 4)}$; das Quadrat genommen $13u^2 + 4 = u^2 + 8uv + 16v^2$ und $12u^2 = 8uv + 16v^2 - 4$, durch 4 dividirt, $3u^2 = 2uv + 4v^2 - 1$, daraus $u = \frac{v + \sqrt{(13v^2 - 3)}}{3}$, wo u größer als $\frac{4v}{3}$ und also größer als v, deswegen setze man $u = v + x$, so wird $2v + 3x = \sqrt{(13v^2 - 3)}$; das Quadrat genommen $13v^2 - 3 = 4v^2 + 12vx + 9x^2$ oder $9v^2 = 12vx + 9x^2 + 3$, durch 3 dividirt, $3v^2 = 4vx + 3x^2 + 1$, daraus findet man $v = \frac{2x + \sqrt{(13x^2 + 3)}}{3}$, wo v größer ist als $\frac{4}{3}x$, und also größer als x, deswegen setze man $v = x + y$, so wird $x + 3y = \sqrt{(13x^2 + 3)}$, die Quadrate genommen $13x^2 + 3 = x^2 + 6xy + 9y^2$ oder $12x^2 = 6xy + 9y^2 - 3$, durch 3 dividirt, $4x^2 = 2xy + 3y^2 - 1$, folglich $x = \frac{y + \sqrt{(13y^2 - 4)}}{4}$, wo x größer ist als y; deswegen setze man $x = y + z$, so wird $3y + 4z = \sqrt{(13y^2 - 4)}$, die Quadrate genommen $13y^2 - 4 = 9y^2 + 24yz + 16z^2$ oder $4y^2 = 24yz + 16z^2 + 4$, durch 4 dividirt, $y^2 = 6yz + 4z^2 + 1$, daraus $y = 3z + \sqrt{(13z^2 + 1)}$. Da diese Formel endlich der ersten gleich ist, so setze man $z = 0$, und dann bekömmt man rückwärts gehend folgende Bestimmungen:

$z = 0$	$s = 6t + u = 33$
$y = 1$	$r = s + t = 38$
$x = y + z = 1$	$q = r + s = 71$
$v = x + y = 2$	$p = q + r = 109$
$u = v + x = 3$	$n = p + q = 180$
$t = u + v = 5$	$m = 3n + p = 649$

Also ist 180 nach 0 die kleinste ganze Zahl für n, daß $13n^2 + 1$ ein Quadrat werde.

§. 106.

Aus diesem Beyspiele sieht man deutlich, wie weitläuftig oft eine solche Rechnung werden könne. Denn unter den größern Zahlen muß man oft wohl zehnmal mehr Operationen machen, als hier bey der Zahl 13 vorgekommen sind: man kann auch nicht wohl voraus sehen, bey welchen Zahlen so große Mühe erfordert wird, daher es dienlich ist, sich die Arbeit anderer zu Nutze zu machen, und eine Tabelle beyzufügen, wo zu allen Zahlen a bis auf 100 die Werthe der Buchstaben m und n vorgestellt werden, damit man bey vorkommenden Fällen daraus für eine jede Zahl a die gehörigen Buchstaben m und n nehmen könne.

§. 107.

Indessen ist zu merken, daß bey einigen Arten von Zahlen die Werthe für m und n allgemein gefunden werden können; dieses geschieht aber nur bey solchen Zahlen, welche um 1 oder 2 kleiner oder größer sind als eine Quadratzahl; dieses aber noch zu erläutern, wird wohl der Mühe werth seyn.

§. 108.

Es sey also $a = e^2 - 2$, oder um 2 kleiner als eine Quadratzahl, und da $(e^2 - 2)n^2 + 1 = m^2$

soll, so ist offenbar m kleiner als en; deswegen setze man $m = en - p$, so wird $(e^2 - 2)n^2 + 1 = e^2n^2 - 2enp + p^2$ oder $2n^2 = 2enp - p^2 + 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(e^2p^2 - 2p^2 + 2)}}{2}$, wo sogleich in die Augen fällt, daß, wenn man $p = 1$ annimmt, das Wurzelzeichen wegfalle, und dann $n = 2$ und $m = e^2 - 1$ seyn werde.

Wäre z. B. $n = 23$, wo $e = 5$, so wird $23n^2 + 1 = m^2$, wenn $n = 5$ und $m = 24$. Dieses ist auch an sich offenbar; denn setzt man $n = e$, wenn nemlich $a = e^2 - 2$, so wird $an^2 + 1 = e^4 - 2e^2 + 1$, welches das Quadrat von $e^2 - 1$ ist.

§. 109.

Es sey nun auch $a = e^2 - 1$, nemlich um 1 weniger als eine Quadratzahl, so daß $(e^2 - 1)n^2 + 1 = m^2$ seyn soll. Da nun hier wieder m kleiner ist als en, so setze man $m = en - p$, so wird $(e^2-1)n^2 + 1 = e^2n^2 - 2enp + p^2$, oder $n^2 = 2enp - p^2 + 1$ und daraus $n = ep + \sqrt{(e^2p^2 - p^2 + 1)}$; wo das Wurzelzeichen wegfällt, wenn $p = 1$, und daraus bekömmt man $n = 2e$, und $m = 2e^2 - 1$. Dieses ist auch leicht einzusehen; denn da $a = e^2 - 1$ und $n = 2e$, so wird $an^2 + 1 = 4e^4 - 4e^2 + 1$, welches das Quadrat von $2e^2 - 1$ ist. Es sey z. B. $a = 24$, so daß $e = 5$, so wird $n = 10$ und $24n^2 + 1 = 2401 = (49)^2$ *).

§. 110.

*) Das Wurzelzeichen in diesem Fall verschwindet auch, wenn $p = 0$ gesetzt wird; daher wir denn unstreitig die kleinsten Zahlen für n und m erhalten, welche $n = 1$ und $m = e$ sind. Ist also $e = 5$, so wird die Formel $24n^2 + 1$ ein Quadrat, wenn $n = 1$, und die Wurzel dieses Quadrats $m = e = 5$.

§. 110.

Es sey nun auch $a = e^2 + 1$, oder um 1 größer als eine Quadratzahl, so daß $(e^2 + 1)n^2 + 1 = m^2$ seyn soll, wo m augenscheinlich größer ist als en, deswegen setze man $m = en + p$, so wird $(e^2 + 1)n^2 + 1 = e^2n^2 + 2enp + p^2$ oder $n^2 = 2enp + p^2 - 1$, und daraus $n = ep + \sqrt{(e^2p^2 + p^2 - 1)}$, wo $p = 1$ genommen werden kann, und dann wird $n = 2e$ und $m = 2e^2 + 1$; dieses ist auch leicht einzusehen; denn da $a = e^2 + 1$ und $n = 2e$, so ist $an^2 + 1 = 4e^4 + 4e^2 + 1$, welches das Quadrat von $2e^2 + 1$ ist. Es sey z. B. $a = 17$, so daß $e = 4$, und da wird $17n^2 + 1 = m^2$, wenn $n = 8$ und $m = 33$.

§. 111.

Es sey endlich $a = e^2 + 2$, oder um 2 größer als eine Quadratzahl, so soll $(e^2 + 2)n^2 + 1 = m^2$ seyn, wo m offenbar größer ist als en, daher setze man $m = en + p$, so wird $e^2n^2 + 2n^2 + 1 = e^2n^2 + 2enp + p^2$, oder $2n^2 = 2enp + p^2 - 1$, und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(e^2p^2 + 2p^2 - 2)}}{2}$. Hier nehme man nun $p = 1$, so wird $n = e$ und $m = e^2 + 1$. Dieses fällt auch so gleich in die Augen, denn da $a = e^2 + 2$ und $n = e$, so ist $an^2 + 1 = e^4 + 2e^2 + 1$, welches das Quadrat von $e^2 + 1$ ist. Es sey z. B. $a = 11$, so daß $e = 3$, so wird $11n^2 + 1 = m^2$ seyn, wenn $n = 3$ und $m = 10$. Wollte man $a = 83$ annehmen, so ist $e = 9$, und es wird $83n^2 + 1 = m^2$, wenn man $n = 9$ und $m = 82$ annimmt.

Tabelle,

welche für einen jeden Werth von a die kleinsten Zahlen m und n angiebt, so daß $m^2 = an^2 + 1$

a	*n*	*m*	*a*	*n*	*m*
2	2	3	30	2	11
3	1	2	31	273	1520
5	4	9	32	3	17
6	2	5	33	4	23
7	3	8	34	6	35
8	1	3	35	1	6
10	6	19	37	12	73
11	3	10	38	6	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	66251
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

a	*n*	*m*	*a*	*n*	*m*
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2564	19603	80	1	9
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	82
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	63	85	30996	285771
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	3	28
66	8	65	88	21	197
67	5967	48842	89	53000	500001
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2281249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10

VIII. Ca-

VIII. Capitel.

Von der Art, die Irrationalformel $\sqrt{(a + bx + cx^2 + dx^3)}$ rational zu machen.

§. 112.

Wir gehen nun weiter zu einer Formel, in welcher x zu der dritten Potenz ansteigt, um hernach bis zur vierten fort zu gehen, ungeachtet diese beyden Fälle auf eine ähnliche Art behandelt werden müssen.

Es soll also die Formel $a + bx + cx^2 + dx^3$ zu einem Quadrat gemacht, und darum geschickte Werthe für x in Rationalzahlen gesucht werden: denn da dieses schon weit größern Schwierigkeiten unterworfen ist, so erfordert es auch weit mehr Kunst, nur gebrochene Zahlen für x zu finden, und man ist genöthigt, sich damit zu begnügen, und keine Auflösung in ganzen Zahlen zu verlangen. Zum voraus ist auch hier dieses zu merken, daß man keine allgemeine Auflösung geben kann, wie eben geschehen, sondern eine jede Operation giebt uns nur einen einzigen Werth für x, da hingegen die oben gebrauchte Methode auf einmal zu unendlich vielen Auflösungen führt.

§. 113.

Da es unter der vorher abgehandelten Formel $a + bx + cx^2$ unendlich viele Fälle giebt, in welchen die Auflösung schlechterdings unmöglich ist, so findet solches vielmehr bey der gegenwärtigen Formel Statt, wo nicht einmal an eine Auflösung zu denken ist, wofern man nicht schon eine weiß oder errathen

rathen hat; daher man bloß für diese Fälle Regeln zu geben im Stande ist, durch welche man aus einer schon bekannten Auflösung eine neue ausfindig machen kann, aus welcher nachher auf gleiche Weise noch eine andere neue gefunden wird, so daß man auf diese Art immer weiter fortgehen kann.

Indessen geschieht es doch oft, daß, wenn gleich schon eine Auflösung bekannt ist, aus derselben doch keine andere geschlossen werden kann, so daß in solchen Fällen nur eine einzige Statt findet, welcher Umstand besonders zu bemerken ist, weil in dem vorher gehenden Fall aus einer einzigen Auflösung unendlich viele neue gefunden werden können.

§. 114.

Wenn also eine solche Formel wie $a+bx+cx^2+dx^3$ zu einem Quadrat gemacht werden soll, so muß nothwendig schon ein Fall voraus gesetzt werden, wo dieses geschieht; ein solcher aber fällt am deutlichsten in die Augen, wenn das erste Glied schon ein Quadrat ist und die Formel $f^2+bx+cx^2+dx^3$ ist, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn man $x=0$ setzt.

Wir wollen also diese Formel zuerst betrachten, und sehen, wie aus dem bekannten Fall $x=0$ noch ein anderer Werth für x gefunden werden könne. Zu Erreichung dieser Absicht kann man zwey Wege gebrauchen, von welchen wir einen jeden besonders hier erklären wollen, und wobey es gut seyn wird, mit besondern Fällen den Anfang zu machen.

§. 115.

Es sey daher die Formel $1+2x-x^2+x^3$ gegeben, welche ein Quadrat werden soll. Da nun

hier

hier das erste Glied 1 ein Quadrat ist; so nehme man die Wurzel von diesem Quadrat so an, daß die beyden ersten Glieder wegfallen. Es sey daher die Quadratwurzel $1 + x$, von welcher das Quadrat unserer Formel gleich seyn soll, und da bekommen wir $1 + 2x - x^2 + x^3 = 1 + 2x + x^2$, wo die beyden ersten Glieder einander aufheben, und die Gleichung $x^2 = - x^2 + x^3$ oder $x^3 = 2x^2$ heraus kömmt, welche durch x^2 dividirt, sogleich $x = 2$ giebt, woraus unsere Formel $1 + 4 - 4 + 8 = 9$ wird.

Eben so, wenn die Formel $4 + 6x - 5x^2 + 3x^3$ ein Quadrat werden soll, so setze man zuerst die Wurzel $= 2 + nx$ und suche n, so daß die beyden ersten Glieder wegfallen, weil nun $4 + 6x - 5x^2 + 3x^3 = 4 + 4nx + n^2x^2$ wird, so muß $4n = 6$ und also $n = \frac{3}{2}$ seyn, woher die Gleichung $- 5x^2 + 3x^3 = \frac{9}{4}x^2$ oder $3x^3 = \frac{29}{4}x^2$ entsteht, daher $x = \frac{29}{12}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrate macht, dessen Wurzel $2 + \frac{3}{2}x = \frac{45}{8}$ seyn wird.

§. 116.

Der zweyte Weg besteht darin, daß man der Wurzel drey Glieder giebt, als $f + gx + hx^2$, welche so beschaffen sind, daß in der Gleichung die drey ersten Glieder wegfallen.

Es sey z. B. die Formel $1 - 4x + 6x^2 - 5x^3$ gegeben; hiervon setze man die Wurzel $1 - 2x + hx^2$, wo dann $1 - 4x + 6x^2 - 5x^3 = 1 - 4x + 4x^2 + 2hx^2 - 4hx^3 + h^2x$ seyn soll; hier fallen die zwey ersten Glieder schon weg, damit aber auch das dritte wegfalle, so muß $6 = 2h + 4$ seyn und also $h = 1$. Hieraus bekommen wir $- 5x^3 = - 4x^3 + x^4$, wo durch x^3 dividirt wird, $- 5 = - 4 + x$ und $x = - 1$.

§. 117.

§. 117.

Diese zwey Methoden können also gebraucht werden, wenn das erste Glied a ein Quadrat ist. Der Grund derselben beruht darauf, daß man bey der ersten Methode der Wurzel zwey Glieder giebt, als $f + px$, wo f die Quadratwurzel des ersten Gliedes ist, und p so angenommen wird, daß auch das zweyte Glied wegfallen, und also nur das dritte und vierte Glied unserer Formel, nemlich $cx^2 + dx^3$ mit p^2x^2 verglichen werden muß, da denn die Gleichung, durch x^2 dividirt, einen neuen Werth für x angiebt, welcher $x = \frac{p^2 - c}{d}$ seyn wird. Bey der zweyten Methode giebt man der Wurzel drey Glieder und setzt dieselben $f + px + qx^2$, wenn nemlich $a = f^2$, und bestimmt p und q dergestalt, daß die drey ersten Glieder auf beyden Seiten verschwinden, welches so geschieht: da $f^2 + bx + cx^2 + dx^3 = f^2 + 2fpx + 2fqx^2 + p^2x^2 + 2pqx^3 + q^2x^4$, so muß $b = 2fp$ seyn, also $p = \frac{b}{2f}$, und $c = 2fq + p^2$, also $q = \frac{c - p^2}{2f}$; und die übrige Gleichung $dx^3 = 2pqx^3 + q^2x^4$ läßt sich theilen, und daraus wird $x = \frac{d - 2pq}{q^2}$.

§. 118.

Indessen kann es oft geschehen, daß, obgleich $a = f^2$, dennoch diese Methode keinen neuen Werth für x angebe, wie aus der Formel $f^2 + dx^3$ sich ersehen läßt, wo das zweyte und dritte Glied fehlt.

Denn setzt man nach der ersten die Wurzel $= f + px$, so daß $f^2 + dx^3 = f^2 + 2fpx + p^2x^2$ seyn soll, so muß $o = 2fp$ und $p = o$ seyn, daher bekömmt man $dx^3 = 0$, und daraus $x = 0$, welches kein neuer Werth ist.

Setzt man aber nach der andern Methode die Wurzel $= f + px + qx^2$, so daß $f^2 + dx^3 = f^2 + 2fpx + 2fqx^2 + 2pqx^3 + q^2x^4$ seyn soll, so muß $0 = 2fp$ und $p = 0$ seyn, ferner $0 = 2fp + p^2$, und also $q = 0$, daher man $dx^3 = 0$ und wiederum $x = 0$ bekömmt.

§. 119.

In solchen Fällen ist nun nichts zu thun, als daß man sehe, ob man nicht einen solchen Werth für x errathen könne, wo die Formel ein Quadrat wird, wo man dann aus derselben nach der vorigen Methode neue Werthe für x finden kann; welches auch angeht, wenn gleich das erste Glied kein Quadrat ist.

Um dieses zu zeigen, so soll die Formel $3 + x^3$ ein Quadrat seyn; da nun solches geschieht, wenn $x = 1$, so setze man $x = 1 + y$, und da bekömmt man: $4 + 3y + 3y^2 + y^3$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Man setze also nach der ersten Methode die Wurzel davon $2 + py$, so wird $4 + 3y + 3y^2 + y^3 = 4 + 4py + p^2y^2$; wo nun das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, und also $y = \frac{3}{4}$, alsdann wird $3 + y = p^2$ und $y = p^2 - 3 = \frac{9}{16} - \frac{48}{16} = - \frac{39}{16}$, folglich $x = - \frac{23}{16}$, welches ein neuer Werth für x ist.

Setzt man weiter nach der zweyten Methode die Wurzel $= 2 + py + qy^2$, so wird $4 + 3y + 3y^2 + y^3 = 4 + 4py + 4qy^2 + 2pqy^3 + q^2y^4 + p^2y^2$, wo nun das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, oder $p = \frac{3}{4}$, und um das dritte wegzuschaffen, $3 = 4q + p^2$, also $q = \frac{3 - p^2}{4} = \frac{39}{64}$;

so

so haben wir $1 = 2pq + q^2y$, und daraus $y = \frac{1-2pq}{q^2}$, oder $y = \frac{352}{1521}$, folglich $x = \frac{1873}{1521}$.

§. 120.

Nun wollen wir auch zeigen, wie man, wenn man schon einen solchen Werth gefunden hat, daraus weiter einen andern neuen finden soll. Wir wollen dieses auf eine allgemeine Art vorstellen, und auf folgende Formel anwenden: $a + bx + cx^2 + dx^3$, von welcher schon bekannt sey, daß sie ein Quadrat werde, wenn $x = f$, und daß alsdann $a + bf + cf^2 + df^3 = g^2$ sey. Hierauf setze man $x = f + y$, so erhält man folgende neue Formel:

$$\begin{array}{l} a \\ + bf + by \\ + cf^2 + 2cfy + cy^2 \\ + df^3 + 3df^2y + dy^3 \\ \hline g^2 + (b + 2cf + 3df^2)y + (c + 3df)y^2 + dy^3 \end{array}$$

in welcher Formel das erste Glied ein Quadrat ist, so daß die beyden obigen Methoden angewendet werden können; wodurch neue Werthe für y und also auch für x gefunden werden, nemlich $x = f + y$.

§. 121.

Oft hilft es aber auch nichts, wenn man gleich einen Werth für x errathen hat, wie in der Formel $1 + x^3$ geschieht, welche ein Quadrat wird, wenn man $x = 2$ setzt. Denn setzt man diesem zufolge $x = 2 + y$, so kömmt diese Formel $9 + 12y + 6y^2 + y^3$ heraus, welche nun ein Quadrat seyn soll. Es sey davon, nach der ersten Regel, die Wurzel $= 3 + py$, so wird $9 + 12y + 6y^2 + y^3 = 9 + 6py + p^2y^2$; wo $12 = 6p$ und $p = 2$ seyn muß; alsdann wird $6 + y = p^2 = 4$, und also $y = -2$; folglich $x = 0$, aus welchem Werth aber nichts weiter gefunden werden kann.

Nehmen wir aber nach der zweyten Methode die Wurzel $= 3 + py + qy^2$, so wird $9 + 12y + 6y^2 + y^3 = 9 + 6py + 6qy^2 + 2pqy^3 + q^2y^4 + p^2y^2$, wo erstlich $12 = 6p$ und $p = 2$; ferner $6 = 6q + p^2 = 6q + 4$ und also $q = \frac{1}{3}$ seyn muß. Hieraus erhält man $1 = 2pq + q^2y = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$; daher $y = -3$, folglich $x = -1$, und $1 + x^3 = 0$; aus welchem nichts weiter geschlossen werden kann. Denn wollte man $x = -1 + z$ annehmen, so erhielte man die Formel $3z - 3z^2 + z^3$, wo das erste Glied gar wegfällt, und also weder die eine noch die andere Methode gebraucht werden kann.

Hieraus wird schon sehr wahrscheinlich, daß die Formel $1 + x^3$ kein Quadrat werden könne, außer in diesen drey Fällen:

I.) $x = 2$, II.) $x = 0$, III.) $x = -1$,

doch kann dieses aber auch aus andern Gründen bewiesen werden.

§. 122.

Zur Uebung wollen wir noch die Formel $1 + 3x^3$ betrachten, welche in diesen Fällen ein Quadrat wird I.) $x = 0$, II.) $x = 1$, III.) $x = 2$, und wir wollen sehen, ob sich noch andere solche Werthe finden lassen?

Da nun bekannt ist, daß $x = 1$ ein Werth ist, so setze man $x = 1 + y$; und da bekömmt man $1 + 3x^3 = 4 + 9y + 9y^2 + 3y^3$, davon sey die Wurzel $2 + py$, so daß $4 + 9y + 9y^2 + 3y^3 = 4 + 4py + p^2y^2$ seyn soll, wo $9 = 4p$ und also $p = \frac{9}{4}$ seyn muß; die übrigen Glieder geben aber $9 + 3y = p^2 = \frac{81}{16}$ und $y = -\frac{21}{16}$; folglich $x = -\frac{5}{16}$, wo dann $1 + 3x^3$ ein Quadrat wird, davon die Wurzel $-\frac{61}{64}$ oder auch $+\frac{61}{64}$ ist; wollte man nun weiter $x = -\frac{5}{16} + z$ annehmen, so würde man daraus wieder andere neue Werthe finden können.

Wollte man aber für die obige Formel nach der zweyten Methode die Wurzel setzen: $2 + py + qy^2$, so daß $4 + 9y + 9y^2 + 3y^3 = 4 + 4py + 4qy^2 + p^2y^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$ seyn soll, so müßte erstlich seyn $9 = 4p$, also $p = \frac{9}{4}$; hernach $9 = 4q + p^2 = 4q + \frac{81}{16}$, und also $q = \frac{63}{64}$; aus den noch übrigen Gliedern wird $3 = 2pq + q^2y = \frac{567}{128} + q^2y$, oder $567 + 128q^2y = 384$, oder $128q^2y = -183$, das ist $126. \frac{63}{64}y = -183$, oder $42. \frac{63}{64}y = -61$, daher $y = -\frac{1952}{1323}$, folglich $x = -\frac{629}{1323}$, aus welchem nach der vorher gegebenen Anweisung wiederum andere neue gefunden werden können.

§. 123.

Hier haben wir aus dem bekannten Fall $x = 1$ zwey neue Werthe heraus gebracht, aus welchen man, wenn man sich die Mühe geben wollte, wiederum andere neue finden könnte, wodurch man aber auf sehr weitläuftige Brüche gerathen würde.

Daher hat man Ursache sich zu verwundern, daß aus diesem Fall $x = 1$ nicht auch der andere $x = 2$, der ebenfalls leicht in die Augen fällt, heraus gebracht worden; welches daher ohne Zweifel ein Zeichen der Unvollkommenheit der bisher erfundenen Methode ist. Man kann gleichergestalt aus dem Fall $x = 2$ andere neue Werthe heraus bringen, man setze zu diesem Ende $x = 2 + y$, so daß folgende Formel ein Quadrat seyn soll: $25 + 36y + 18y^2 + 3y^3$; hiervon sey die Wurzel nach der ersten Methode $5 + py$, so wird $25 + 36y + 18y^2 + 3y^3 = 25 + 10py + p^2y^2$, und also $36 = 10p$ oder

 $p = \frac{18}{5}$;

$p = \frac{18}{5}$; daraus wird aus den übrigen Gliedern, durch y^2 dividirt, $18 + 3y = p^2 = \frac{324}{25}$, und daher $y = -\frac{42}{25}$, und $x = \frac{8}{25}$, hieraus wird $1 + 3x^3$ ein Quadrat, wovon die Wurzel ist $5 + py = -\frac{131}{125}$, oder $+\frac{131}{125}$.

Will man ferner nach der zweyten Methode die Wurzel setzen: $5 + py + qy^2$, so wird $25 + 36y + 18y^2 + 3y^3 = 25 + 10py + 10qy^2 + p^2y^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$; wo, um die zweyten und dritten Glieder wegzuschaffen, $36 = 10p$, oder $p = \frac{18}{5}$ seyn muß; hernach $18 = 10q + p^2$, und $10q = 18 - \frac{324}{25} = \frac{126}{25}$, und $q = \frac{63}{125}$, die übrigen Glieder, durch y^3 getheilt, geben $3 = 2pq + q^2y$, oder $q^2y = 3 - 2pq = -\frac{303}{625}$; also $y = -\frac{3275}{1323}$, und $x = -\frac{629}{1323}$.

§. 124.

Eben so schwer und mühsam wird diese Rechnung auch in solchen Fällen, wo aus einem andern Grunde es ganz leicht ist, so gar eine allgemeine Auflösung zu geben, wie bey dieser Formel: $1 - x - x^2 + x^3$ geschieht, wo auf eine allgemeine Art $x = n^2 - 1$ genommen werden kann, und wo n eine jede beliebige Zahl bedeutet.

Denn wenn $n = 2$, so wird $x = 3$, und unsere Formel $= 1 - 3 - 9 + 27 = 16$. Nimmt man $n = 3$, so wird $x = 8$ und unsere Formel $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

Es ereignet sich aber hier ein ganz besonderer Umstand, welchem wir diese leichte Auflösung zu danken haben, und welcher so gleich in die Augen fallen wird, wenn wir unsere Formel in Factoren auflösen. Es ist leicht einzusehen, daß sich dieselbe durch $1 - x$ theilen lasse und daß der Quotient $1 - x^2$ seyn werde, welcher weiter aus folgenden

genden Factoren besteht: $(1 + x)(1 - x)$, so daß unsere Formel diese Gestalt erhält:
$1 - x - x^2 + x^3 = (1 - x)(1 + x)(1 - x) = (1 - x)^2 . (1 + x)$. Da nun dieselbe ein Quadrat seyn soll, und ein Quadrat durch ein Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird, so muß auch $1 + x$ ein Quadrat seyn; und umgekehrt, wenn $1 + x$ ein Quadrat ist, so wird auch $(1 - x)^2 (1 + x)$ ein Quadrat, man darf also nur $1 + x = n^2$ setzen, so bekömmt man sogleich $x = n^2 - 1$.

Hätte man diesen Umstand nicht bemerkt, so würde es schwer gefallen seyn, nach den obigen Methoden nur ein halb Dutzend Werthe für x ausfindig zu machen.

§. 125.

Bei einer jeden gegebenen Formel ist es daher sehr gut, dieselbe in ihre Factoren aufzulösen, wenn dieses nemlich möglich ist.

Wie dieses aber anzustellen sey, ist schon oben gezeigt worden; man setzt nemlich die gegebene Formel $= 0$, und sucht von dieser Gleichung die Wurzel, wo dann eine jede Wurzel, z. B. $x = f$, einen Factor $f - x$ giebt, welche Untersuchung um so viel leichter anzustellen ist, da hier nur rationale Wurzeln gesucht werden, welche alle Theiler der bloßen Zahl sind.

§. 126.

Dieser Umstand trifft auch bey unserer allgemeinen Formel $a + bx + cx^2 + dx^3$ ein, wenn die zwey ersten Glieder wegfallen, so daß $cx^2 + dx^3$ ein Quadrat seyn soll; denn alsdann muß auch nothwendig diese Formel, durch das Quadrat x^2 dividirt, nemlich $c + dx$ ein Quadrat seyn, wo man denn nur setzen darf $c + dx = n^2$, um $x = \frac{n^2 - c}{d}$ zu bekommen, welche auf einmal unendlich viele, und so gar alle mögliche Auflösungen in sich enthält.

§. 127.

Wenn man bey dem Gebrauch der obigen ersten Methode den Buchstaben p nicht bestimmen wollte, um das zweyte Glied wegzuschaffen, so würde man auf eine andere irrationale Formel fallen, welche rational gemacht werden soll.

Es sey demnach die gegebene Formel $f^2 + bx + cx^2 + dx^3$, und man setze die Wurzel davon $= f + px$, so wird $f^2 + bx + cx^2 + dx^3 = f^2 + 2fpx + p^2x^2$, wo sich das erste Glied aufhebt, die übrigen aber durch x dividirt, geben $b + cx + dx^2 = 2fp + p^2x$, welches eine quadratische Gleichung ist, aus welcher x gefunden wird, wie folgt:

$$x = \frac{p^2 - c + \sqrt{(p^4 - 2cp^2 + 8dfp + c^2 - 4bd)}}{2d}.$$

Jetzt kömmt es also darauf an, daß man solche Werthe für p ausfindig mache, wodurch diese Formel $p^4 - 2cp^2 + 8dfp + c^2 - 4bd$ ein Quadrat werde. Da nun hier die vierte Potenz der gesuchten Zahl p vorkömmt, so gehört dieser Fall in das folgende Capitel.

IX. Capitel.

Von der Art, diese Irrationalformel $\sqrt{(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)}$ rational zu machen.

§. 128.

Wir kommen nun zu solchen Formeln, wo die unbestimmte Zahl x bis zur vierten Potenz steigt, womit wir zugleich unsere Untersuchung über die Quadratwurzelzeichen endigen müssen, indem man es bisher noch nicht so weit gebracht hat, daß man Formeln, worin höhere Potenzen von x vorkommen, zu Quadrate machen könnte.

Bey dieser Formel kommen aber folgende drey Fälle in Betrachtung: nemlich erstens, wenn das erste Glied a ein Quadrat; zweytens, wenn das letzte ex^4 ein Quadrat ist; endlich drittens, wenn das erste und letzte Glied zugleich Quadrate sind, welche drey Fälle wir hier besonders abhandeln wollen.

§. 129.

I.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(f^2 + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)}.$$

Da hier das erste Glied ein Quadrat ist, so könnte man auch nach der ersten Methode die Wurzel $= f + px$ setzen, und p so bestimmen, daß die beyden ersten Glieder wegfielen, und die übrigen sich durch x^2 theilen ließen; allein alsdann würde in der Gleichung doch noch x^2 vorkommen, und also die Bestimmung des x ein neues Wurzelzeichen erfordern. Man muß also sogleich die zweyte Methode zur Hand nehmen und die Wurzel $= f + px + qx^2$ setzen, hierauf die Buchstaben p und q so bestimmen, daß die drey ersten Glieder wegfallen, und also die übrigen durch x^3 theilbar werden, wo dann nur eine einfache Gleichung heraus kommt, aus welcher x ohne Wurzelzeichen bestimmt werden kann.

§. 130.

Man setze daher die Wurzel $= f + px + qx^2$, so daß $f^2 + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = f^2 + 2fpx + 2fqx^2 + 2pqx^3 + q^2x^4$ seyn soll, wo die ersten $+ p^2x^2$ Glieder von selbst wegfallen; für die zweyten setze man $b = 2fp$, oder $p = \frac{b}{2f}$, so muß für die dritten Glieder seyn: $c = fq + p^2$, oder $q = \frac{c - p^2}{2f}$; ist dieses geschehen, so lassen sich die übrigen Glieder durch x^3 theilen und geben die Gleichung: $d + ex = 2pq + q^2x$, aus welcher man $x = \frac{d - 2pq}{q^2 - e}$, oder $x = \frac{2pq - d}{e - q^2}$ findet.

§. 131.

Es ist aber leicht zu sehen, daß durch diese Methode nichts gefunden wird, wenn das zweyte und dritte Glied in der Formel mangelt, oder wenn sowohl $b = 0$ als $c = 0$ ist, weil alsdann $p = 0$ und $q = 0$; folglich $x = \frac{d}{-e}$, woraus sich aber gewöhnlich nichts neues finden läßt; denn in diesem Falle wird offenbar $dx^3 + ex^4 = 0$, und also unsere Formel dem Quadrat f^2 gleich. Besonders aber, wenn auch $d = 0$ ist, so kömmt $x = 0$, welcher Werth nichts weiter hilft, daher diese Methode für eine solche Formel $f^2 + ex^4$ keine Dienste leistet. Eben dieser Umstand ereignet sich auch, wenn $b = 0$ und $d = 0$, oder wenn das zweyte und vierte Glied mangelt, und die Formel folgende Gestalt hat: $f^2 + cx^2 + ex^4$; denn da wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2f}$, woraus $x = 0$ gefunden wird, welcher Werth sogleich in die Augen fällt und zu nichts weiter führt.

§. 132.

II.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{}(a + bx + cx^2 + dx^4 + g^2x^4).$$

Diese Formel könnte sogleich auf den ersten Fall gebracht werden, indem man $x = \frac{1}{y}$ annimmt, denn weil alsdann diese Formel $a + \frac{b}{y} + \frac{c}{y^2} + \frac{d}{y^3} + \frac{g^2}{y^4}$ ein Quadrat seyn müßte, so muß auch dieselbe mit dem Quadrat y^4 multiplicirt, ein Quadrat bleiben; alsdann aber bekömmt man diese Formel: $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + g^2$, welche rückwärts geschrieben, der obigen vollkommen ähnlich ist.

Man hat aber dieses nicht nöthig, sondern man kann die Wurzel davon so ansetzen: $gx^2 + px + q$, oder umgekehrt: $q + px + gx^2$, wo dann $a + bx + cx^2 + dx^3 + g^2x^4 = q^2 + 2pqx + \begin{matrix} 2gqx^2 \\ + p^2x^2 \end{matrix} + 2gpx^3 + g^2x^4$, weil sich nun hier die fünften Glieder von selbst aufheben, so bestimme man erstlich p, so daß sich auch die vierten Glieder aufheben; dieses geschieht, wenn $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, hernach bestimme man weiter q, so daß sich auch die dritten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn $c = 2gq + p^2$,

$+ p^2$, oder $q = \frac{c - p^2}{2g}$; ist dieses geschehen, so geben die zwey ersten Glieder die Gleichung $a + bx = q^2 + 2pqx$, woraus $x = \frac{a - q^2}{2pq - b}$, oder $x = \frac{q^2 - a}{b - 2pq}$ gefunden wird.

§. 133.

Hier ereignet sich abermals der oben angeführte Mangel, wenn das zweyte und vierte Glied fehlt, oder wenn $b = 0$ und $d = 0$; denn da wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2g}$, hieraus also $x = \frac{a - q^2}{0}$, welcher Werth unendlich groß ist, und eben so wenig zu etwas führt, als der Werth $x = 0$ im erstern Fall; daher diese Methode bey solchen Gleichungen, wie $a + cx^2 + g^2x^4$, gar nicht gebraucht werden kann.

§. 134.

III.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(f^2 + bx + cx^2 + dx^3 + g^2x^4)}.$$

Es ist klar, daß bey dieser Formel beyde vorhergehende Methoden angebracht werden können, denn da das erste Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel $= f + px + qx^2$ annehmen und die drey ersten Glieder verschwinden machen; hernach weil das letzte Glied ein Quadrat ist, so kann man auch annehmen, die Wurzel sey $= q + px + gx^2$, und die drey letzten Glieder verschwinden machen, da man denn zwey Werthe für x heraus bringt.

Allein man kann auch diese Formel noch auf zwey andere Arten behandeln, die derselben eigen sind.

Nach der ersten Art setzt man die Wurzel $= f + px + gx^2$, und bestimmt p, so daß die zweyten Glieder

Glieder wegfallen, weil nemlich: $f^2 + bx + cx^2 + dx^3 + g^2x^4 = f^2 + 2fpx + 2fgx^2 + 2gpx^3 + \atop + p^2x^2$ g^2x^4 seyn soll, so mache man $b = 2fp$ oder $p = \frac{b}{2f}$, und weil alsdann nicht nur die ersten und letzten Glieder, sondern auch die zweyten sich einander aufheben, so geben die übrigen, durch x^2 dividirt, die Gleichung: $c + dx = 2fg + p^2 + 2gpx$, woraus $x = \frac{c - 2fg - p^2}{2gp - d}$, oder $x = \frac{p^2 + 2fg - c}{d - 2gp}$ gefunden wird. Hier ist vorzüglich zu merken, daß, da in der Formel nur das Quadrat g^2 vorkömmt, die Wurzel davon g sowohl negativ als positiv genommen werden kann; woraus man noch einen andern Werth für x erhält, nemlich $x = \frac{c + 2fg - p^2}{-2gp - d}$, oder $x = \frac{p^2 - 2fg - c}{2gp + d}$.

§. 135.

Es giebt auch noch einen andern Weg, diese Formel aufzulösen; man setzt nemlich, wie vorher, die Wurzel $= f + px + gx^2$, bestimmt aber p dergestalt, daß die vierten Glieder sich einander aufheben, nemlich man setzt in der obigen Gleichung $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, und weil auch das erste Glied mit dem letzten wegfällt, so geben die übrigen, durch x dividirt, die einfache Gleichung: $b + cx = 2fp + 2fgx + p^2x$, woraus man $x = \frac{b - 2fp}{2fg + p^2 - c}$ findet; wobey noch zu bemerken ist, daß, weil in der Formel nur das Quadrat f^2 vorkömmt, die Wurzel davon auch $-f$ gesetzt werden könne, so daß x

auch

auch $= \frac{b + 2fp}{p^2 - 2fg - c}$ seyn wird; also daß auch hieraus zwey neue Werthe für x gefunden werden und folglich durch die bisher erklärte Art zu verfahren, in allem sechs neue Werthe heraus gebracht worden sind.

§. 136.

Hier ereignet sich aber auch wieder der unangenehme Umstand, daß, wenn das zweyte und vierte Glied mangelt, oder $b = 0$ und $d = 0$ alsdann kein tüchtiger Werth für x herausgebracht werden kann, und also die Auflösung der Formel $f^2 + cx^2 + g^2x^4$ dadurch nicht erhalten werden kann. Denn weil $b = 0$ und $d = 0$, so hat man für die beyden Arten $p = 0$, und daher giebt die erste $x = \frac{c - 2fg}{0}$, die andere Art aber $x = 0$, aus welchen beyden nichts weiter gefunden werden kann.

§. 137.

Dieses sind nun die drey Formeln, auf welche die bisher erklärten Methoden angewendet werden können; wenn aber in der gegebenen Formel weder das erste noch das letzte Glied ein Quadrat ist, so ist nichts auszurichten, bis man einen solchen Werth für x gefunden hat, durch welchen die Formel ein Quadrat wird. Wir wollen daher annehmen, man hätte schon gefunden, daß unsere Formel ein Quadrat werde, wenn man $x = h$ setzt, so daß $a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4 = k^2$, so darf man nur $x = h + y$ annehmen, so bekömmt man eine neue Formel, in welcher das erste Glied k^2 und also ein Quadrat seyn wird, daher der erste Fall hier gebraucht werden kann. Diese Verwandlung kann auch gebraucht werden, wenn man in den vorhergehenden Fällen schon

schon einen Werth für x, als z. B. $x = h$ gefunden hat, denn da darf man nur $x = h + y$ setzen, so erhält man eine neue Gleichung, auf welche die obige Gleichung angewendet werden kann; da man denn aus den schon gefundenen Werthen für x andere neue heraus bringen kann, und mit diesen neuen kann man wieder auf gleiche Weise verfahren und so immer mehrere neue Werthe für x auffinden.

§. 138.

Vorzüglich aber ist von den schon oft gemeldeten Formeln, wo das zweyte und vierte Glied fehlt, zu merken, daß keine Auflösung derselben zu finden ist, wofern man nicht schon eine gleichsam errathen hat; wie aber dann zu verfahren sey, wollen wir bey der Formel $a + ex^4$ zeigen, welche nemlich sehr oft vorzukommen pflegt.

Wir wollen also annehmen, man habe schon einen Werth $x = h$ errathen, so daß $a + eh^4 = k^2$ sey; um nun daraus noch andere zu finden, setze man $x = h + y$, so wird die folgende Formel ein Quadrat seyn müssen: $a + eh^4 + 4eh^3y + 6eh^2y^2 + 4eh^3 + ey^4$, das ist $k^2 + 4eh^3y + 6eh^2y^2 + 4ehy^3 + ey^4$, welche zu der ersten Art gehört; man setze daher die Quadratwurzel davon $k + py + qy^2$ und folglich unsere Formel gleich diesem Quadrat: $k^2 + 2kpy + 2kqy^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$, wo zuerst
$+ p^2y^2$
p und q so bestimmt werden müssen, daß auch die zweyten Glieder wegfallen, deswegen muß $4eh^3 = 2kp$ und also $p = \frac{2eh^3}{k}$ seyn; ferner $6eh^2 = 2kq + p^2$, daher $q = \frac{6eh^2 - p^2}{2k}$, oder $q = \frac{3eh^2k^2 - 2e^2h^6}{k^3}$,

oder

oder $q = \frac{eh^2(3k^2 - 2eh^4)}{k^3}$; folglich, da $eh^4 = k^2 - a$, so wird $q = \frac{eh^2(k^2 + 2a)}{k^3}$; hernach geben die folgenden Glieder, durch y^3 dividirt, $4eh + ey = 2pq + q^2y$, woraus $y = \frac{4eh - 2pq}{q^2 - e}$ gefunden wird, wovon der Zähler in die Form $\frac{4ehk^4 - 4e^2h^5(k^2 + 2a)}{k^4}$ gebracht wird, welche ferner, da $eh^4 = k^2 - a$ ist, in folgende verwandelt wird:
$\frac{4ehk^4 - 4eh(k^2 - a)(k^2 + 2a)}{k^4}$, oder $\frac{4eh(-ak^2 + 2a^2)}{k^4}$, oder $\frac{4aeh(2a - k^2)}{k^4}$. Der Nenner aber $q^2 - e$ wird $= \frac{e(k^2 - a)(k^2 + 2a)^2 - ek^5}{k^6}$, und dieses wird $= \frac{e(3ak^4 - 4a^3)}{k^6} = \frac{ea(3k^4 - 4a^2)}{k^6}$, woraus der gesuchte Werth seyn wird $y = \frac{2aeh(2a - k^2)}{k^4} \cdot \frac{k^6}{ae(3k^4 - 4a^2)}$, das ist $y = \frac{4hk^2(2a - k^2)}{3k^4 - 4a^2}$, und daher $x = \frac{h(8ak^2 - k^4 - 4a^2)}{3k^4 - 4a^2}$, oder $x = \frac{h(k^4 - 8ak^2 + 4a^2)}{4a^2 - 3k^4}$.
Setzt man nun diesen Werth für x, so wird unsere Formel, nemlich $a + ex^4$, ein Quadrat, von welchem die Wurzel seyn wird: $k + py + qy^2$, welches auf folgende Form gebracht wird: $k + \frac{8k(k^2 - a)(2a - k^2)}{3k^4 - 4a^2} + \frac{16k(k^2 - a)(k^2 + 2a)(2a - k^2)^2}{(3k^4 - 4a^2)^2}$, weil aus dem obigen $p = \frac{2eh^3}{k}$, und $q = \frac{eh^2(k^2 + 2a)}{k^3}$, und $y = \frac{4hk^2(2a - k^2)}{3k^4 - 4a^2}$ ist.

§. 139.

§. 139.

Wir wollen bey der Formel $a+ex^4$ noch stehen bleiben und weil der Fall $a+eh^4=k^2$ bekannt ist, so können wir denselben als zwey Fälle ansehen, weil sowohl $x=-h$, als $x=+h$ ist, und deswegen können wir diese Formel in eine andere von der dritten Art verwandeln, wo das erste und letzte Glied Quadrate werden. Dieses geschieht, wenn wir $x=\frac{h(1+y)}{1-y}$ annehmen, welcher Kunstgriff oft gute Dienste thut, also wird unsere Formel:

$$\frac{a(1-y)^4+eh^4(1+y)^4}{(1-y)^4}, \text{ oder}$$

$$\frac{k^2+4(k^2-2a)y+6k^2y^2+4(k^2-2a)y^3+k^2y^4}{(1-y)^4};$$

hiervon setze man die Quadratwurzel nach dem dritten Fall $\frac{k+py-ky^2}{(1-y)^2}$, so daß der Zähler unserer Formel dem Quadrate $k^2+2kpy-2k^2y^2+p^2y^2-2kpy^3+k^2y^4$ gleich seyn muß. Man mache, daß die zweyten Glieder wegfallen, welches geschieht, wenn $4k^2-8a=2kp$, oder $p=\frac{2k^2-4a}{k}$; die übrigen Glieder, durch y^2 dividirt, geben $6k^2+4(k^2-2a)y=-2k^2+p^2-2kpy$, oder $y(4k^2-8a+2kp)=p^2-8k^2$; da nun $p=\frac{2k^2-4a}{k}$, und $pk=2k^2-4a$, so wird $y(8k^2-16a)=\frac{-4k^4-16ak^2+16a^2}{k^2}$; folglich $y=\frac{-k^4-4ak^2+4a^2}{k^2(2k^2-4a)}$; um nun daraus x zu finden, so ist zuerst

$$1+y=\frac{k^4-8ak^2+4a^2}{k^2(2k^2-4a)}, \text{ und dann zweytens}$$

$$1-y=\frac{3k^4-4a^2}{k^2(2k^2-4a)}; \text{ also}$$

$\frac{1+y}{1-y} = \frac{k^4 - 8ak^2 + 4a^2}{3k^4 - 4a^2}$; folglich bekommen wir $x = \frac{k^4 - 8ak^2 + 4a^2}{3k^4 - 4a^2} \cdot h$, welches aber der nemliche Ausdruck ist, den wir schon vorher gefunden haben.

§. 140.

Um dieses mit einem Beyspiel zu erläutern, so sey die Formel $2x^4 - 1$ gegeben, welche ein Quadrat seyn soll. Hier ist nun $a = -1$ und $e = 2$, der bekannte Fall aber, wo diese Formel ein Quadrat wird, wenn $x = 1$; also ist $h = 1$ und $k^2 = 1$, das ist $k = 1$; hieraus erhalten wir also sogleich diesen neuen Werth $x = \frac{1+8+4}{3-4} = -13$, weil aber von x nur die vierte Potenz vorkömmt, so kann man auch $x = +13$ annehmen, und daraus wird $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Nehmen wir nun diesen Fall als bekannt an, so wird $h = 13$ und $k = 239$, woraus wieder ein neuer Werth für x gefunden wird, nemlich
$$x = \frac{815730721 + 228488 + 4}{2447192163 - 4} \cdot 13 = \frac{815959213}{2447192159} \cdot 13,$$
also wird $x = \frac{10607469769}{2447192159}$.

§. 141.

Auf gleiche Art wollen wir die etwas allgemeinere Formel $a + cx^2 + ex^4$ betrachten, und für den bekannten Fall, wo dieselbe ein Quadrat wird, annehmen $x = h$, so daß $a + ch^2 + eh^4 = k^2$. Um nun daraus andere zu finden, so setze man $x = h + y$, da dann unsere Formel folgende Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l} a \\ ch^2 + 2chy + cy^2 \\ eh^4 + 4eh^3y + 6eh^2y^2 + 4ehy^3 + ey^4 \\ \hline k^2 + (2ch + 4eh^3)y + (c + 6eh^2)y^2 + 4ehy^3 + ey^4 \end{array}$$

wo das erste Glied ein Quadrat ist; man setze daher die Quadratwurzel davon $k + py + qy^2$, so daß unsere Formel dem Quadrate $k^2 + 2kpy + 2kqy^2 + p^2y^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$ gleich seyn soll; nun bestimme man p und q, so daß die zweyten und dritten Glieder wegfallen, wozu erfordert wird, erstlich, daß $2ch + 4eh^3 = 2kp$ oder $p = \frac{ch + 2eh^3}{k}$, hernach aber, daß $c + 6eh^2 = 2kq + p^2$, oder $q = \frac{c + 6eh^2 - p^2}{2k}$; alsdann geben die folgenden Glieder, durch y^3 dividirt, die Gleichung $4eh + ey = 2pq + q^2y$, daraus wird $y = \frac{4eh - 2pq}{q^2 - e}$ gefunden, und daraus ferner $x = h + y$; in welchem Falle die Quadratwurzel aus unserer Formel seyn wird: $k + py + qy^2$. Sieht man nun dieses wieder als den anfänglich bekannten Fall an, so findet man daraus wieder einen neuen Fall, und man kann daher auf diese Art so weit fortgehen, als man will.

§. 142.

Um dieses zu erläutern, so sey die gegebene Formel $1 - x^2 + x^4$, wo folglich $a = 1$, $c = -1$ und $e = 1$. Der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, nemlich $x = 1$, so daß $h = 1$ und $k = 1$. Setzt man nun $x = 1 + y$, und die Quadratwurzel unserer Formel $= 1 + py + qy^2$, so muß erstlich $p = 1$ und hernach $q = 2$ seyn; hieraus wird $y = 0$ und $x = 1$ gefunden, welches eben der schon bekannte

Fall ist, und also ist kein neuer gefunden worden. Man kann aber aus andern Gründen beweisen, daß diese Formel kein Quadrat seyn kann, außer in den Fällen, wo $x = 0$ und $x = \pm 1$ ist.

§. 143.

Es sey ferner z. B. die Formel $2 - 3x^2 + 2x^4$ gegeben, wo $a = 2$, $c = -3$ und $e = 2$ ist. Der bekannte Fall giebt sich auch sogleich, nemlich $x = 1$; es sey daher $h = 1$, so wird $k = 1$; setzt man nun $x = 1 + y$ und die Quadratwurzel $1 + py + qy^2$, so wird $p = 1$ und $q = 4$, daraus erhalten wir $y = 0$ und $x = 1$, aus welchem wieder nichts neues gefunden wird.

§. 144.

Noch ein anderes Beyspiel sey die Formel $1 + 8x^2 + x^4$, wo $a = 1$, $c = 8$ und $e = 1$. Nach einer geringen Betrachtung ergiebt sich der Fall $x = 2$; denn nimmt man $h = 2$, so wird $k = 7$; setzt man nun $x = 2 + y$, und die Wurzel $7 + py + qy^2$, so muß $p = \frac{32}{7}$, und $q = \frac{272}{343}$ seyn; hieraus erhalten wir $y = -\frac{5880}{2911}$ und $x = -\frac{58}{2911}$, wo das Zeichen ($-$) weggelassen werden kann. Bey diesem Beyspiel aber ist zu merken, daß, weil das letzte Glied schon für sich ein Quadrat ist, und also auch in der neuen Formel ein Quadrat bleiben muß, die Wurzel auch noch anders, nach dem obigen dritten Fall, angenommen werden kann.

Es sey daher wie vorhin $x = 2 + y$, so bekommen wir:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 32 + 32y + 8y^2 \\ \underline{16 + 32y + 24y^2 + 8y^3 + y^4} \\ 49 + 64y + 32y^2 + 8y^3 + y^4 \end{array}$$

welche

welches jetzt auf mehrere Arten zu einem Quadrate gemacht werden kann; denn erstlich kann man die Wurzel $7 + py + y^2$ annehmen, so daß unsere Formel dem Quadrate $49 + 14py + 14y^2 + 2py^3 + p^2y^2 + y^4$ gleich seyn soll; nun kann man die vorletzten Glieder verschwinden lassen, wenn man $2p = 8$, oder $p = 4$ annimmt; wo denn die übrigen, durch y dividirt, $64 + 32y = 14p + 14y + p^2y = 56 + 30y$ geben, und daher $y = -4$ und $x = -2$, oder $x = +2$, welches der bekannte Fall selbst ist.

Nimmt man aber p so an, daß die zweyten Glieder wegfallen, so wird $14p = 64$ und $p = \frac{32}{7}$; da denn die übrigen Glieder, durch y^2 dividirt, $14 + p^2 + 2py = 32 + 8y$, oder $\frac{1710}{49} + \frac{64}{7}y = 32 + 8y$ geben, und daher $y = -\frac{71}{28}$, folglich $x = -\frac{15}{28}$, oder $x = +\frac{15}{28}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrate macht, von welchem die Wurzel $\frac{144}{784}$ ist. Da auch $-y^2$ die Wurzel des letzten Gliedes ist, so kann man die Quadratwurzel davon $7 + py - y^2$ annehmen, oder die Formel selbst dem Quadrate $49 + 14py - 14y^2 - 2py^3 + y^4 + p^2y^2$ gleich. Um nun die vorletzten Glieder wegzubringen, setze man $8 = -2p$, oder $p = -4$, so geben die übrigen, durch y dividirt, $64 + 32y = 14p - 14y + p^2y = -56 + 2y$, daraus wird $y = -4$, wie oben.

Läßt man aber die zweyten Glieder verschwinden, so wird $64 = 14p$ und $p = \frac{32}{7}$; die übrigen aber durch y^2 dividirt, geben $32 + 8y = -14 + p^2 - 2py$, oder $32 + 8y = \frac{378}{49} - \frac{64}{7}y$, daraus wird $y = -\frac{71}{28}$ und $x = \mp\frac{15}{88}$, welches mit dem obigen einerley ist.

§. 145.

Eben so kann man mit der allgemeinen Formel $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ verfahren, wenn ein Fall, nemlich $x = h$, bekannt ist, da diese ein Quadrat, nemlich k^2, wird; denn alsdann setze man $x = h + y$, so erhält man eine Formel von eben so viel Gliedern, von welchen das erste k^2 seyn wird; wird nun die Wurzel davon $k + py + qy^2$ gesetzt, und man bestimmt p und q dergestalt, daß auch die zweyten und dritten Glieder wegfallen, so geben die beyden letzten, durch y^3 dividirt, eine einfache Gleichung, woraus y und folglich auch x bestimmt werden kann.

Nur fallen hier solche Fälle weg, wo der neu gefundene Werth von x mit dem bekannten $x = h$ einerley ist, weil alsdann nichts neues gefunden wird. In solchen Fällen ist entweder die Formel an sich selbst unmöglich, oder man müßte noch einen andern Fall errathen, wo diese ein Quadrat wird.

§. 146.

Nur so weit ist man bisher in Auflösung der Quadratwurzelzeichen gekommen, da nemlich die höchste Potenz hinter denselben die vierte nicht übersteigt. Sollte daher in einer solchen Formel die fünfte oder eine noch höhere Potenz von x vorkommen, so sind die bisherigen Kunstgriffe nicht hinlänglich, eine Auflösung davon zu geben, wenn auch gleich schon ein Fall bekannt wäre. Um dieses deutlicher zu zeigen, so betrachte man die Formel $k^2 + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$, wo das erste Glied schon ein Quadrat ist; wollte man nun die Wurzel davon wie vorher setzen: $k + px + qx^2$, und p und q so bestimmen, daß die zweyten und dritten Glieder wegfielen, so blieben doch noch drey

übrig,

übrig, welche durch x dividirt, eine quadratische Gleichung geben würden, woraus x durch ein neues Wurzelzeichen bestimmt würde. Wollte man aber die Wurzel $k + px + qx^2 + rx^3$ annehmen, so würde das Quadrat bis zur sechsten Potenz aufsteigen, so daß, wenn gleich p, q und r so bestimmt würden, daß die zweyten, dritten und vierten Glieder wegfielen, dennoch die vierte, fünfte und sechste Potenz übrig bliebe, welche durch x^4 dividirt, wieder auf eine quadratische Gleichung führte, und also nicht ohne Wurzelzeichen aufgelöset werden könnte. Wir müssen daher hier die Formeln, welche ein Quadrat seyn sollen, verlassen, und wollen nun weiter zu den cubischen Wurzelzeichen fortgehen.

X. Capitel.

Von der Art, diese Irrationalformel $\sqrt[3]{(a + bx + cx^2 + dx^3)}$ rational zu machen.

§. 147.

Hier werden also solche Werthe für x erfordert, daß die Formel $a + bx + cx^2 + dx^3$ eine Cubiczahl werde, und daraus also die Cubicwurzel gezogen werden könne. Hierbey ist zu erinnern, daß diese Formel die dritte Potenz nicht überschreiten müsse, weil sonst die Auflösung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweyte Potenz gehen und das Glied dx^3 wegfallen, so würde die Auflösung nicht leichter werden; fielen aber die zwey letzten Glieder weg, so, daß die Formel $a + bx$ zu einem Cubus gemacht werden müßte, so hätte die Sache gar keine Schwierigkeit, indem man nur $a + bx = p^3$ annehmen dürfte, und daraus sogleich $x = \frac{p^3 - a}{b}$ gefunden würde.

§. 148.

Hier ist wieder vor allen Dingen zu merken, daß, wenn weder das erste noch das letzte Glied ein Cubus ist, an keine Auflösung zu denken sey, wofern nicht schon ein Fall, in welchem die Formel ein Cubus wird, bekannt ist, dieser möge nun auch sogleich in die Augen fallen, oder erst durch Probiren gefunden werden müssen.

Das erstere geschieht nun, zuerst wenn das erste Glied ein Cubus und die Formel $f^3 + bx + cx^2 + dx^3$ ist, wo der bekannte Fall $x = 0$ ist; hernach auch, wenn das letzte Glied ein Cubus und die Formel also beschaffen ist: $a + bx + cx^2 + g^3x^3$; aus diesen beyden Fällen entsteht der dritte, wo sowohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist, welche drey Fälle wir hier betrachten wollen.

§. 149.

I. Fall. Es sey die gegebene Formel $f^3 + bx + cx^2 + dx^3$, welche ein Cubus werden soll.

Man setze daher die Wurzel davon $f + px$, so daß unsere Formel dem Cubus $f^3 + 3f^2px + 3fp^2x^2 + p^3x^3$ gleich seyn soll; da nun die ersten Glieder von selbst wegfallen, so bestimme man p dergestalt, daß auch die zweyten wegfallen; dieses geschieht, wenn $b = 3f^2p$, oder $p = \frac{b}{3f^2}$; alsdann geben die übrigen Glieder, durch x^2 dividirt, die Gleichung

$c + dx$

$c+dx=3fp^2+p^3x$, woraus $x=\frac{c-3fp^2}{p^3-d}$ gefunden wird. Wäre das letzte Glied dx^3 nicht vorhanden, so könnte man die Cubicwurzel schlecht weg $=f$ annehmen, da man dann $f^3=f^3+bx+cx^2$, oder $b+cx=0$ bekommen würde, und daraus $x=-\frac{b}{c}$, woraus aber weiter nichts geschlossen werden könnte.

§. 150.

II. Fall. Die gegebene Formel habe nun diese Gestalt: $a+bx+cx^2+g^3x^3$, man setze die Cubikwurzel $p+gx$, von welcher der Cubus $p^3+3gp^2x+3g^2px^2+g^3x^3$ ist, wo sich dann die letzten Glieder aufheben; nun bestimme man p, so daß auch die vorletzten wegfallen, welches geschieht, wenn $c=3g^2p$ oder $p=\frac{c}{3g^2}$; alsdann geben die zwey ersten die Gleichung $a+bx=p^3+3gp^2x$, aus welcher $x=\frac{a-p^3}{3gp^2-b}$ gefunden wird. Wäre das erste Glied a nicht vorhanden gewesen, so hätte man die Cubikwurzel auch schlechtweg $=gx$ annehmen können, da dann $g^3x^3=bx+cx^2+g^3x^3$, oder $0=b+cx$, folglich $x=-\frac{b}{c}$; welches aber gewöhnlich zu nichts dient.

§. 151.

III. Fall. Es sey endlich die gegebene Formel $f^3+bx+cx^2+g^3x^3$, worin sowohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist; daher sie auf beyde vorhergehende Arten behandelt und also zwey Werthe für x heraus gebracht werden können.

Außer diesen aber kann man auch noch die Wurzel $f + gx$ setzen, so daß unsere Formel dem Cubus $f^3 + 3f^2gx + 3fg^2x^2 + g^3x^3$ gleich werden soll, wo dann die ersten und letzten Glieder einander aufheben, die übrigen aber, durch x dividirt, die Gleichung $b + cx = 3f^2g + 3fg^2x$ geben, und daraus $x = \frac{b - 3f^2g}{3fg^2 - c}$.

§. 152.

Fällt aber die gegebene Formel in keine von diesen drey Arten, so ist dabey nichts anders zu thun, als daß man einen Werth zu erhalten suche, wo sie ein Cubus wird. Hat man einen solchen gefunden, welcher $x = h$ sey, so daß $a + bh + ch^2 + dh^3 = k^3$, so setze man $x = h + y$, wo dann unsere Formel folgende Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l} a \\ bh + by \\ ch^2 + 2chy + cy^2 \\ dh^3 + 3dh^2y + 3dhy^2 + dy^3 \\ \hline k^3 + (b + 2ch + 3dh^2)y + (c + 3dh)y^2 + dy^3 \end{array}$$

welche zu der ersten Art gehört, und also für y ein Werth gefunden werden kann, woraus man dann einen neuen Werth für x erhält, aus welchem nachher auf gleiche Weise noch mehrere gefunden werden können.

§. 153.

Wir wollen nun dieses Verfahren durch einige Beyspiele erläutern und zuerst die Formel $1 + x + x^2$ betrachten, welche ein Cubus seyn soll, und zur ersten Art gehört. Man könnte also sogleich die Cubikwurzel $= 1$ setzen, woraus $x + x^2 = 0$ gefunden würde, das ist $x(1 + x) = 0$; folglich entweder

der $x = 0$ oder $x = -1$, woraus aber nichts weiter folgt. Man setze daher die Cubikwurzel $1 + px$, wovon der Cubus $1 + 3px + 3p^2x^2 + p^3x^3$ ist, und mache $1 = 3p$, oder $p = \frac{1}{3}$, so geben die übrigen Glieder, durch x^2 dividirt, $1 = 3p^2 + p^3x$, oder $x = \frac{1 - 3p^2}{p^3}$; da nun $p = \frac{1}{3}$, so wird $x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}} = 18$, und daher unsere Formel $1 + 18 + 324 = 343$, wovon die Cubikwurzel $1 + px = 7$ ist. Wollte man nun weiter $x = 18 + y$ annehmen, so würde unsere Formel folgende Gestalt bekommen: $343 + 37y + y^2$, wovon nach der ersten Regel die Cubikwurzel $7 + py$ anzunehmen wäre, wovon der Cubus $343 + 147py + 21p^2y^2 + p^3y^3$ ist; nun setze man $37 = 147p$, oder $p = \frac{37}{147}$, so geben die übrigen Glieder die Gleichung $1 = 21p^2 + p^3y$, also $y = \frac{1 - 21p^2}{p^3}$, das ist $y = \frac{340 . 121 . 147}{37^3} = -\frac{1040580}{50653}$, woraus noch weiter neue Werthe gefunden werden können.

§. 154.

Es sey ferner die Formel $2 + x^2$ gegeben, welche ein Cubus werden soll. Hier muß nun vor allen Dingen ein Fall errathen werden, in welchem dieses geschieht, dieser ist $x = 5$; man setze daher sogleich $x = 5 + y$, so bekömmt man $27 + 10y + y^2$; davon sey die Cubikwurzel $3 + py$, und also die Formel selbst dem Cubus $27 + 27py + 9p^2y^2 + p^3y^3$ gleich; man mache $10 = 27p$, oder $p = \frac{10}{27}$, so bekömmt man $1 = 9p^2 + p^3y$, und daraus $y = \frac{1 - 9p^2}{p^3}$, das ist $y = -\frac{19 . 9 . 27}{1000}$, oder $y = -\frac{4617}{1000}$, und $x = \frac{383}{1000}$; hieraus wird unsere Formel

Formel $2 + x^2 = \frac{2146689}{1000000}$, wovon die Cubikwurzel $3 + py = \frac{129}{100}$ seyn muß.

§. 155.

Man betrachte ferner die Formel $1 + x^3$, ob diese ein Cubus werden könne, außer den zwey offenbaren Fällen $x = 0$ und $x = -1$. Ob nun gleich diese Formel zum dritten Fall gehört, so hilft uns doch die Wurzel $1 + x$ nichts, weil der Cubus davon $1 + 3x + 3x^2 + x^3$ unserer Formel gleich gesetzt $3x + 3x^2 = 0$ oder $x(1 + x) = 0$ giebt, das ist entweder $x = 0$ oder $x = -1$.

Will man ferner $x = -1 + y$ setzen, so bekommen wir die Formel $3y - 3y^2 + y^3$, welche ein Cubus seyn soll und zum zweyten Fall gehört; setzt man daher die Cubikwurzel $p + y$, wovon der Cubus $p^3 + 3p^2y + 3py^2 + y^3$ ist, und macht $-3 = 3p$, oder $p = -1$, so geben die übrigen $3y = p^3 + 3p^2y = -1 + 3y$, folglich $y = \frac{1}{0}$, das ist unendlich; woraus also nichts gefunden wird. Es ist auch alle Mühe vergeblich, um noch andere Werthe für x zu finden, weil man aus andern Gründen beweisen kann, daß die Formel $1 + x^3$, außer in den angegebenen Fällen, niemals ein Cubus werden kann; denn wir haben gezeigt, daß die Summe von zweyen Cubis, als $t^3 + x^3$, niemals ein Cubus werden kann, daher ist es auch in dem Fall $t = 1$ nicht möglich.

§. 156.

Man behauptet auch, daß $2 + x^3$ kein Cubus werden könne, außer in dem Falle $x = -1$. Diese Formel gehört zwar zu dem zweyten Fall, es wird aber durch die daselbst gebrauchte Regel nichts heraus gebracht, weil die mittlern Glieder fehlen.

Setzt man aber $x = -1 + y$, so bekömmt man die Formel $1 + 3y - 3y^2 + y^3$, welche nach allen drey Fällen behandelt werden kann. Setzt man nach dem ersten die Wurzel $1 + y$, von welcher der Cubus $1 + 3y + 3y^2 + y^3$ ist, so wird $-3y^2 = 3y^2$, welches nur geschieht, wenn $y = 0$ ist. Setzt man nach dem zweyten Falle die Wurzel $-1 + y$, wovon der Cubus $-1 + 3y - 3y^2 + y^3$, so wird $1 + 3y = -1 + 3y$ und $y = \frac{2}{0}$, welches unendlich ist. Nach der dritten Art müßte man die Wurzel $1 + y$ setzen, welches schon geschehen ist.

§. 157.

Es sey die Formel $3 + 3x^3$ gegeben, welche ein Cubus werden soll. Dieses geschieht nun zuerst in dem Falle $x = -1$, woraus aber nichts geschlossen werden kann, hernach aber auch in dem Falle $x = 2$; man setze deswegen $x = 2 + y$, so kömmt die Formel $27 + 36y + 18y^2 + 3y^3$ heraus, welche zum ersten Fall gehört. Daher sey die Wurzel $3 + py$, von welcher der Cubus $27 + 27py + 9p^2y^2 + p^3y^3$ ist. Man mache also $36 = 27p$, oder $p = \frac{4}{3}$, so geben die übrigen Glieder, durch y^2 dividirt, $18 + 3y = 9p^2 + p^3y = 16 + \frac{64}{27}y$, oder $\frac{17}{27}y = -2$, daher $y = -\frac{54}{17}$, folglich $x = -\frac{20}{17}$. Hieraus wird unsere Formel $3 + 3x^3 = -\frac{9261}{4913}$, wovon die Cubikwurzel $3 + py = \frac{21}{17}$ ist; und aus diesem Werthe könnte man noch mehrere finden, wenn man wollte.

§. 158.

Wir wollen zuletzt noch die Formel $4 + x^2$ betrachten, welche in zwey bekannten Fällen ein Cubus wird, nemlich wenn $x = 2$ und $x = 11$ ist. Setzt man nun zuerst $x = 2 + y$, so muß die Formel $8 + 4y + y^2$ ein Cubus seyn. Die Wurzel davon sey $2 + \frac{1}{3}y$, und also die Formel $= 8 + 4y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{27}y^3$; hieraus erhält man $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{27}y$, daher $y = 9$ und $x = 11$, welches der andere bekannte Fall ist.

Setzt man nun ferner $x = 11 + y$, so bekömmt man $125 + 22y + y^2$, welches dem Cubus von $5 + py$, das ist $125 + 75py + 15p^2y^2 + p^3y^3$ gleich gesetzt, und $p = \frac{22}{75}$ genommen, giebt $1 = 15p^2 + p^3y^3$ oder $p^3y^3 = 1 - 15p^2 = -\frac{109}{375}$; daher $y = -\frac{122625}{10648}$, und also $x = -\frac{5497}{10648}$.

Weil x sowohl negativ als positiv seyn kann, so setze man $x = \frac{2+2y}{1-y}$, so wird unsere Formel $\frac{8+8y^3}{(1-y)^3}$, welche ein Cubus seyn soll; man multiplicire also oben und unten mit $1 - y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und dann bekömmt man

$$\frac{8-8y+8y^2-8y^3}{(1-y)^3},$$

wo also nur noch der Zähler $8 - 8y + 8y^2 - 8y^3$, oder eben derselbe, durch 8 dividirt, nemlich $1 - y + y^2 - y^3$ zu einem Cubus gemacht werden muß, welche Formel zu allen drey Arten gehört.

Setzt man nun nach der ersten Art die Wurzel $= 1 - \frac{1}{3}y$, von welcher der Cubus $1 - y + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{27}y^3$ ist, so wird $1 - y = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}y$, oder $27 - 27y = 9 - y$, daher $y = \frac{9}{13}$, folglich $1 + y = \frac{22}{13}$ und $1 - y = \frac{4}{13}$, folglich $x = 11$, wie vorher.

Nach der andern Art, wenn man die Wurzel $= \frac{1}{3} - y$ annehmen wollte, so findet man eben dasselbe.

Nach der dritten Art, wenn man die Wurzel $1 - y$ annimmt, von welcher der Cubus $1 - 3y + 3y^2 - y^3$ ist, so bekömmt man $-1 + y = -3 + 3y$, und also $y = 1$, folglich $x = \frac{4}{0}$, d. i. unendlich;

endlich; daher wird auf diese Art nichts neues gefunden.

§. 159.

Weil wir aber schon die zwey Fälle $x = 2$ und $x = 11$ kennen, so kann man $x = \frac{2 + 11y}{1 \pm y}$ annehmen, denn ist $y = 0$, so wird $x = 2$, ist aber y unendlich groß, so wird $x = \pm 11$.

Es sey daher zuerst $x = \frac{2 + 11y}{1 + y}$, so wird unsere Formel $4 + \frac{4 + 44y + 121y^2}{1 + 2y + y^2}$ oder $\frac{8 + 52y + 125y^2}{(1 + y)^2}$; man multiplicire oben und unten mit $1 + y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und nur noch der Zähler, welcher $8 + 60y + 177y^2 + 125y^3$ seyn wird, zu einem Cubus gemacht werden soll.

Man setze daher zuerst die Wurzel $= 2 + 5y$, hierdurch würden nicht nur die zwey ersten Glieder, sondern auch die letzten wegfallen, und also nichts gefunden werden.

Man setze also nach der zweyten Art die Wurzel $p + 5y$, wovon der Cubus $p^3 + 15p^2y + 75py^2 + 125y^3$ ist, und mache $177 = 75p$, oder $p = \frac{59}{25}$, so wird $8 + 60y = p^3 + 15p^2y$, daher $-\frac{2043}{125}y = \frac{80379}{15625}$ und $y = \frac{80379}{367875}$, woraus x gefunden werden könnte.

Man kann aber auch $x = \frac{2 + 11y}{1 - y}$ setzen, und dann wird unsere Formel $1 + \frac{4 + 44y + 121y^2}{1 - 2y + y^2} = \frac{8 + 36y + 125y^2}{(1 - y)^2}$, wovon der Zähler, mit $1 - y$ multiplicirt, ein Cubus wird. Also muß auch $8 + 28y + 89y^2 - 125y^3$ ein Cubus werden.

Setzen

Setzen wir hier nach der ersten Art die Wurzel $= 2 + \frac{7}{3}y$, von welcher der Cubus $8 + 28y + \frac{98}{3}y^2 + \frac{343}{27}y^4$ ist, so wird $89 - 125y = \frac{98}{3} + \frac{343}{27}y$, oder $\frac{3718}{27}y = \frac{169}{3}$, und also $y = \frac{1521}{3718} = \frac{9}{22}$; folglich $x = 11$, welches der schon bekannte Fall ist.

Setzt man ferner nach der dritten Art die Wurzel $2 - 5y$, deren Cubus $8 - 60y + 150y^2 - 125y^3$ ist, so erhalten wir $28 + 89y = -60 + 150y$, folglich $y = \frac{88}{61}$, woraus $x = -\frac{1090}{27}$ gefunden wird, und unsere Formel wird $\frac{1191016}{729}$, welches der Cubus von $\frac{106}{9}$ ist.

§. 160.

Dieses sind nun die bisher bekannten Verfahrungsarten, wodurch eine solche Formel entweder zu einem Quadrat oder zu einem Cubus gemacht werden kann, wenn nur in jenem Falle die höchste Potenz der unbestimmten Zahl den vierten Grad, in dem letztern Falle aber den dritten nicht übersteigt.

Man könnte noch den Fall hinzufügen, wo eine gegebene Formel zu einem Biquadrat gemacht werden soll, in welchem die höchste Potenz die zweyte nicht übersteigen muß. Wenn aber eine solche Formel, wie $a + bx + cx^2$, ein Biquadrat seyn soll, so muß sie vor allen Dingen zu einem Quadrate gemacht werden, wo alsdaun nur noch übrig ist, daß die Wurzel von diesem Quadrate noch ferner zu einem Quadrate gemacht werde, wozu die Regel schon oben gegeben worden. Also wenn z. B. $x^2 + 7$ ein Biquadrat seyn soll, so mache man dieselbe zuerst zu einem Quadrate, welches geschieht, wenn $x = \frac{7p^2 - q^2}{2pq}$, oder auch $x = \frac{q^2 - 7p^2}{2pq}$; alsdann wird unsere Formel gleich dem Quadrate $\frac{q^4 - 14q^2p^2 - 49p^4}{4p^2q^2}$,

$+ 7 = \frac{q^4 + 14q^2p^2 + 49p^4}{4p^2q^2}$, von welchem die Wurzel $\frac{7p^2 + q^2}{2pq}$ ist, welche noch zu einem Quadrate gemacht werden muß; man multiplicire daher oben und unten mit $2pq$, damit der Nenner ein Quadrat werde, und alsdann wird der Zähler $2pq(7p^2+q^2)$ ein Quadrat seyn müssen, welches nicht anders geschehen kann, als nachdem man schon einen Fall errathen hat. Man kann zu dem Ende $q = pz$ annehmen, damit die Formel $2p^2z(7p^2 + p^2z^2) = 2p^4z(7 + z^2)$ und also auch durch p^4 dividirt, nemlich diese $2z(7 + z^2)$ ein Quadrat werden soll. Hier ist nun der bekannte Fall $z = 1$, daher setze man $z = 1 + y$, so bekommen wir $(2 + 2y)(8 + 2y + y^2) = 16 + 20y + 6y^2 + 2y^3$, wovon die Wurzel $4 + \frac{5}{2}y$ sey, davon das Quadrat $16 + 20y + \frac{25}{4}y^2$, und unserer Formel gleich gesetzt, giebt $6 + 2y = \frac{25}{4}$, $y = \frac{1}{8}$ und $z = \frac{9}{8}$; da nun $z = \frac{q}{p}$, so wird $q = 9$ und $p = 8$, daher $x = \frac{367}{144}$, daraus wird unsere Formel $7 + x^2 = \frac{270841}{20735}$, davon ist zuerst die Quadratwurzel $\frac{520}{144}$, und hiervon nochmals die Quadratwurzel $\frac{13}{12}$, wovon also unsere Formel das Biquadrat ist.

§. 161.

Endlich ist bey diesem Capitel noch zu erinnern, daß es einige Formeln giebt, welche auf eine allgemeine Art zu einem Cubus gemacht werden können; denn wenn z. B. cx^2 ein Cubus seyn soll, so setze man die Wurzel davon $= px$, und dann wird $cx^2 = p^3x^3$ oder $c = p^3x$, daher $x = \frac{c}{p^3}$; man schreibe $\frac{1}{q}$ statt p, so wird $x = cq^3$.

Der Grund hiervon ist offenbar, weil die Formel ein Quadrat enthält, daher auch alle dergleichen Formeln $a(b+cx)^2$ oder $ab^2 + 2abcx + ac^2x^2$ ganz leicht zu einem Cubus gemacht werden können; denn man setze die Cubicwurzel davon $= \frac{b+cx}{q}$, so wird $a(b+cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b+cx)^2$ dividirt, $a = \frac{b+cx}{q^3}$ giebt, daraus $x = \frac{aq^3-b}{c}$, wo man q nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellt, wie höchst nützlich es sey, die gegebene Formel in ihre Factoren aufzulösen, so oft als es geschehen kann. Wir wollen von dieser Materie umständlicher in dem folgenden Capitel handeln.

XI. Capitel.

Von der Auflösung der Formel $ax^2 + bxy + cy^2$ in Factoren.

§. 162.

Es bedeuten hier die Buchstaben x und y nur allein ganze Zahlen, und wir haben auch aus dem bisher vorgetragenen, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte, gesehen, wie die Frage immer auf ganze Zahlen gebracht werden kann. Denn wenn z. B. die gesuchte Zahl x ein Bruch ist, so darf man nur $x = \frac{t}{u}$ setzen, wo dann für t und u immer ganze

Zahlen

Zahlen angegeben werden können, und weil dieser Bruch in der kleinsten Form ausgedrückt werden kann, so können die beyden Buchstaben t und u als solche angesehen werden, die unter sich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

In der gegenwärtigen Formel sind also x und y nur ganze Zahlen, und ehe wir zeigen können, wie sie zu einem Quadrate, oder Cubus, oder einer noch höhern Potenz gemacht werden soll, so ist noch nöthig zu untersuchen, welche Werthe man den Buchstaben x und y geben soll, so daß diese Formel zwey oder mehrere Factoren erhalte.

§. 163.

Hier kommen nun drey Fälle in Betrachtung, zuerst der, wenn sich diese Formel wirklich in zwey rationale Factoren auflösen läßt; dieses geschieht, wie wir schon oben gezeigt haben, wenn $b^2 - 4ac$ eine Quadratzahl wird.

Der zweyte Fall ist, wenn diese beyden Factoren einander gleich werden, in welchem Falle die Formel selbst ein wirkliches Quadrat enthält.

Der dritte Fall ist, wenn sich diese Formel nicht anders, als in irrationale Factoren auflösen läßt, sie mögen schlechtweg irrational oder gar imaginär seyn; jenes geschieht, wenn $b^2 - 4ac$ eine positive Zahl, aber kein Quadrat ist, dieses aber, wenn $b^2 - 4ac$ negativ wird. Dieses sind nun die drey Fälle, welche wir hier zu betrachten haben.

§. 164.

Läßt sich unsere Formel in zwey rationale Factoren auflösen, so läßt sie sich auf folgende Art vorstellen: $(fx + gy)(hx + ky)$, welche also schon ihrer Natur nach zwey Factoren in sich schließt. Will man aber, daß sie auf eine allgemeine Art mehrere Factoren in sich schließe, so darf man nur $fx + gy = pq$ und $hx + ky = rs$ setzen, da dann unsere Formel dem Producte $pqrs$ gleich wird, und also vier Factoren in sich enthält, deren Anzahl nach Belieben vermehrt werden könnte. Hieraus aber erhalten wir für x einen doppelten Werth, nemlich $x = \frac{pq - gy}{f}$ und $x = \frac{rs - ky}{h}$, woraus $hpq - hgy = frs - fky$ gefunden wird, und also $y = \frac{frs - hqp}{fk - hg}$ und $x = \frac{kpq - grs}{fk - hg}$. Damit nun x und y in ganzen Zahlen ausgedrückt werde, so müssen die Buchstaben p, q, r, s so angenommen werden, daß sich der Zähler durch den Nenner wirklich theilen lasse; dieses geschieht, wenn sich entweder p und r oder q und s dadurch theilen lassen.

§. 165.

Um dieses zu erläutern, so sey die Formel $x^2 - y^2$ gegeben, welche aus folgenden Factoren besteht: $(x + y)(x - y)$; soll diese nun noch mehrere Factoren haben, so setze man $x + y = pq$ und $x - y = rs$, so bekömmt man $x = \frac{pq + rs}{2}$ und $y = \frac{pq - rs}{2}$. Damit nun dieses ganze Zahlen werden, so müssen die beyden Zahlen pq und rs zugleich entweder gerade oder beyde ungerade seyn.

Es sey z. B. $p = 7$, $q = 5$, $r = 3$ und $s = 1$, so wird $pq = 35$ und $rs = 3$, folglich $x = 19$ und $y = 16$; daher entspringt $x^2 - y^2 = 105$, welche Zahl wirklich aus den Factoren $7. 5. 3. 1.$ besteht; also hat dieser Fall nicht die geringste Schwierigkeit.

§. 166.

Noch weniger Schwierigkeit hat der zweyte Fall, wo die Formel zwey gleiche Factoren in sich schließt und daher auf folgende Art vorgestellt werden kann: $(fx + gy)^2$, welches Quadrat keine andere Factoren haben kann, als die aus der Wurzel $fx + gy$ entstehen. Nimmt man also $fx + gy = pqr$ an, so wird unsere Formel $p^2q^2r^2$, und kann also so viel Factoren haben, als man will. Hier wird von den zwey Zahlen x und y nur eine bestimmt, und die andere unserm Belieben frey gestellt. Denn man bekömmt $x = \frac{pqr - gy}{f}$, wo y leicht so angenommen werden kann, daß der Bruch wegfällt. Die leichteste Formel von dieser Art ist x^2, nimmt man $x = pqr$, so schließt das Quadrat x^2 drey quadratische Factoren in sich, nemlich p^2, q^2 und r^2.

§. 167.

Aber mit weit größern Schwierigkeiten ist der dritte Fall verknüpft, wo sich unsere Formel nicht in zwey rationale Factoren auflösen läßt, und hier erfordert es besondere Kunstgriffe, für x und y solche Werthe zu finden, aus welchen die Formel zwey oder mehr Factoren in sich enthält. Um diese Untersuchung zu erleichtern, so merke man, daß unsere Formel leicht in eine andere verwandelt werden kann, wo das mittlere Glied fehlt; man darf nemlich nur $x = \frac{z - by}{2a}$ setzen, wo denn die folgende Formel heraus gebracht wird:

$$\frac{z^2 - 2byz + b^2y^2}{4a} + \frac{byz - b^2y^2}{2a} + cy^2 = \frac{z^2 + (4ac - b^2)y^2}{4a}$$

Wir wollen daher sogleich das mittlere Glied weglassen und die Formel $ax^2 + cy^2$ betrachten, wobey es darauf ankömmt, welche Werthe man den Buchstaben x und y beylegen soll, damit diese Formel Factoren erhalte. Es ist leicht einzusehen, daß dieses von der Natur der Zahlen a und c abhänge, und deswegen wollen wir mit einigen bestimmten Formeln dieser Art den Anfang machen.

§. 168.

Es sey also zuerst die Formel $x^2 + y^2$ gegeben, welche alle Zahlen in sich begreift, die eine Summe zweyer Quadrate sind, und von welchen wir die kleinsten bis 50 hier vorstellen wollen:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

unter welchen sich einige Primzahlen befinden, die keine Theiler haben, als: 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41. Die übrigen aber haben Theiler, woraus die Frage deutlicher wird, welche Werthe man den Buchstaben x und y geben müsse, daß die Formel $x^2 + y^2$ Theiler oder Factoren habe und zwar so viel man ihrer will, wobey wir vor allen Dingen die Fälle ausschließen, wo x und y einen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben, weil alsdann $x^2 + y^2$ sich auch durch denselben Theiler, und zwar durch das Quadrat desselben würde theilen lassen. Denn wäre z. B. $x = 7p$ und $y = 7q$, so würde die Summe ihrer Quadrate $49p^2 + 49q^2 = 49(p^2 + q^2)$ sich gar durch 49 theilen lassen. Daher geht die Frage nur auf solche Formeln, wo x und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben oder unter sich untheilbar sind. Die Schwierigkeit fällt hier bald in die Augen; denn wenn man gleich einsieht, daß, wenn die beyden Zahlen x und y ungerade

rade sind, alsdann die Formel $x^2 + y^2$ eine gerade Zahl und also durch 2 theilbar werde; ungerade hingegen, wenn die eine Zahl gerade, die andere ungerade ist, so ist doch nicht leicht einzusehen, ob sie Theiler habe oder nicht? Beyde Zahlen x und y können aber nicht gerade seyn, weil sie keinen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben müssen.

§. 169.

Es seyen daher die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbar, und dennoch soll die Formel $x^2 + y^2$ zwey oder mehrere Factoren in sich enthalten. Hier kann nun die obige Methode nicht statt finden, weil sich diese Formel nicht in zwey rationale Factoren auflösen läßt; allein die irrationalen Factoren, in welche diese Formel aufgelöset wird und durch folgendes Product vorgestellt werden können: $(x + y\sqrt{-1}).(x - y\sqrt{-1})$ können uns eben denselben Dienst leisten; denn wenn die Formel $x^2 + y^2$ wirkliche Factoren hat, so müssen die irrationalen Factoren wiederum Factoren haben, indem, wenn diese Factoren keine weitern Theiler hätten, auch ihr Product keine haben könnte. Da aber diese Factoren irrational, ja sogar imaginär sind, und auch die Zahlen x und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen, so können sie keine rationale Factoren haben, sondern sie müssen irrational und sogar imaginär von gleicher Art seyn.

§. 170.

Will man also, daß die Formel $x^2 + y^2$ zwey rationale Factoren bekomme, so gebe man beyden irrationalen Factoren auch zwey Factoren, und nehme $x + y\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})(r + s\sqrt{-1})$, und dann wird, weil $\sqrt{-1}$ sowohl negativ als

 positiv

positiv genommen werden kann, von selbst $x - y\sqrt{-1} = (p - q\sqrt{-1})(r - s\sqrt{-1})$ seyn, so daß das Product davon, das ist unsere Formel, seyn wird: $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2)$, und diese folglich zwey rationale Factoren enthält, nemlich $p^2 + q^2$ und $r^2 + s^2$. Hier ist aber noch übrig die Werthe von x und y zu bestimmen, welche nemlich auch rational seyn müssen.

Wenn man nun jene irrationale Factoren mit einander multiplicirt, so bekömmt man $x + y\sqrt{-1} = pr - qs + ps\sqrt{-1} + qr\sqrt{-1}$, und $x - y\sqrt{-1} = pr - qs - qr\sqrt{-1} - ps\sqrt{-1}$. Addirt man diese Formeln, so wird $x = pr - qs$; subtrahirt man sie aber von einander, so wird $2y\sqrt{-1} = 2ps\sqrt{-1} + 2qr\sqrt{-1}$, oder $y = ps + qr$.

Nimmt man also $x = pr - qs$ und $y = ps + qr$, so erhält unsere Formel $x^2 + y^2$ gewiß zwey Factoren, indem $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2)$ herauskömmt. Verlangte man mehr Factoren, so dürfte man nur auf eben diese Art p und q so annehmen, daß $p^2 + q^2$ zwey Factoren hätte, und alsdann hätte man in allem drey Factoren, deren Zahl auf gleiche Art nach Belieben noch vermehrt werden kann.

§. 171.

Da hier nur die Quadrate von p, q, r und s vorkommen, so können diese Buchstaben auch negativ genommen werden; nimmt man z. B. q negativ, so wird $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$, von welchen die Summe der Quadrate eben dieselbe ist als vorher; daraus ersehen wir, daß, wenn eine Zahl einem solchen Producte, wie $(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)$ gleich ist, diese auf eine doppelte Art in zwey Quadrate zerlegt werden könne, indem man zuerst $x = pr - qs$

und

und $y = ps + qr$, und hernach auch $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$ gefunden hat.

Es sey z. B. $p = 3$, $q = 2$, $r = 2$ und $s = 1$, so daß folgendes Product heraus käme: $13 . 5 = 65 = x^2 + y^2$, wo dann entweder $x = 4$ und $y = 7$, oder $x = 8$ und $y = 1$ seyn wird; in beyden Fällen aber ist $x^2 + y^2 = 65$. Multiplicirt man mehrere dergleichen Zahlen mit einander, so wird auch das Product noch auf mehrere Arten eine Summe zweyer Quadratzahlen seyn. Man multiplicire z. B. $2^2 + 1^2 = 5$, $3^2 + 2^2 = 13$, und $4^2 + 1^2 = 17$ mit einander, so kömmt 1105, welche Zahl auf folgende Arten in zwey Quadrate zerlegt werden kann: I.) $33^2 + 4^2$, II.) $32^2 + 9^2$, III.) $31^2 + 12^2$, IV.) $24^2 + 23^2$.

§. 172.

Unter den Zahlen, die in der Form $x^2 + y^2$ enthalten sind, befinden sich also zuerst solche, die aus zwey oder mehreren dergleichen Zahlen durch die Multiplication zusammen gesetzt sind; hernach aber auch solche, welche nicht auf diese Art zusammen gesetzt sind; diese wollen wir einfache Zahlen von der Form $x^2 + y^2$ nennen, jene aber zusammengesetzte. Daher werden die einfachen Zahlen dieser Art seyn:

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49 u. s. f.

in welcher Reihe zweyerley Zahlen vorkommen, nemlich Primzahlen, oder solche, welche gar keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, und welche alle, außer 2, so beschaffen sind, daß, wenn man 1 davon wegnimmt, das übrige durch 4 theilbar werde, oder welche alle in der Form $4n + 1$ enthalten sind. Hernach sind auch Quadratzahlen vorhanden 9, 49 u. s. f., deren Wurzeln aber

3, 7 u. s. f. nicht vorkommen; wobey zu merken ist, daß diese Wurzeln 3, 7 u. s. f. in der Form $4n-1$ enthalten sind. Es ist aber auch offenbar, daß keine Zahl von der Form $4n-1$ eine Summe zweyer Quadrate seyn könne. Denn da diese Zahlen ungerade sind, so müßte das eine der beyden Quadrate gerade, das andere aber ungerade seyn. Wir haben aber gesehen, daß alle gerade Quadrate durch 4 theilbar, die ungeraden aber in der Form $4n+1$ enthalten sind. Wenn man daher ein gerades und ein ungerades Quadrat zusammen addirt, so bekömmt die Summe immer die Form $4n+1$, nie aber die Form $4n-1$. Daß aber alle Primzahlen von der Form $4n+1$ Summen von zweyen Quadraten sind, ist zwar gewiß, aber nicht so leicht zu beweisen.

§. 173.

Wir wollen weiter gehen, und die Formel x^2+2y^2 betrachten, um zu sehen, welche Werthe x und y haben müssen, damit dieselbe Factoren erhalte. Da nun diese Formel durch folgende imaginären Factoren vorgestellt wird: $(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2})$, so ersieht man, wie vorher, daß, wenn unsere Formel Factoren hat, auch ihre imaginären Factoren dergleichen haben müssen. Man setze daher erst $x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2})$, so folgt von selbst, daß auch $x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2})$ seyn müsse, und hieraus wird unsere Formel $x^2+2y^2=(p^2+2q^2)(r^2+2s^2)$, und hat also zwey Factoren, von welchen so gar ein jeder von eben derselben Art ist. Damit dieses aber geschehe, so müssen gehörige Werthe für x und y gefunden werden, welches auf folgende Art geschehen kann:

Denn da $x + y\sqrt{-2} = pr - 2qs + qr\sqrt{-2} + ps\sqrt{-2}$ und $x - y\sqrt{-2} = pr - 2qs - qr\sqrt{-2} - ps\sqrt{-2}$, so ist die Summe $2x = 2pr - 4qs$; folglich $x = pr - 2ps$. Hernach giebt die Differenz $2y\sqrt{-2} = 2qr\sqrt{-2} + 2ps\sqrt{-2}$, daher $y = qr + ps$. Wenn also unsere Formel $x^2 + 2y^2$ Factoren haben soll, so sind sie immer so beschaffen, daß der eine $p^2 + 2q^2$ und der andere $r^2 + 2s^2$ seyn wird, oder sie sind beyde Zahlen von eben der Art, als $x^2 + 2y^2$; und damit dieses geschehe, so können x und y wieder auf zweyerley Arten bestimmt werden, weil q sowohl negativ als positiv genommen werden kann. Man hat nemlich zuerst $x = pr - 2qs$ und $y = ps + qr$, und hernach auch $x = pr + 2qs$ und $y = ps - qr$.

§. 174.

Die Formel $x^2 + 2y^2$ enthält also alle diejenigen Zahlen in sich, welche aus einem Quadrate und einem doppelten Quadrate bestehen, und welche wir hier bis auf 50 anführen wollen, als: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 49, 50. Diese lassen sich wieder, wie vorher, in einfache und zusammengesetzte abtheilen, und dann werden die einfachen, welche nicht aus den vorhergehenden zusammengesetzt sind, folgende seyn: 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, welche alle, außer den Quadraten 25 und 49 Primzahlen sind. Von allen denen aber, die hier nicht stehen, kommen die Quadrate vor. Man kann hier auch bemerken, daß alle Primzahlen, die in unserer Formel enthalten sind, entweder zu der Form $8n + 1$ oder zu der $8n + 3$ gehören, da hingegen die übrigen, welche entweder zu der Form $8n + 5$ oder zu der $8n + 7$ gehö-

gehören, niemals aus einem Quadrate und einem doppelten Quadrate bestehen können. Es ist aber auch gewiß, daß alle Primzahlen, die in einer von den ersten beyden Formeln $8n + 1$ und $8n + 3$ enthalten sind, sich jedesmal in ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat auflösen lassen.

§ 175.

Wir wollen nun auf gleiche Weise zu der allgemeinen Formel $x^2 + cy^2$ fortgehen, und sehen, welche Werthe man x und y geben muß, damit diese Formel Factoren erhalte.

Da nun diese durch das Product $(x + y\sqrt{-c})$ $(x - y\sqrt{-c}$ vorgestellt wird, so gebe man einem jeden dieser Factoren wiederum zwey Factoren von gleicher Art; man setze nemlich $x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-c})$, und $x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-c})$. Nunmehr wird unsere Formel: $x^2 + cy^2 = (p^2 + cq^2)(r^2 + cs^2)$ werden, woraus erhellt, daß die Factoren wieder von eben der Art, als die Formel selbst, seyn werden. Die Werthe aber von x und y werden sich folgender maaßen verhalten: $x = pr + cqs$ und $y = qr + ps$, oder $y = ps - qr$, und hieraus läßt sich leicht ersehen, wie unsere Formel noch mehrere Factoren erhalten könne.

§. 176.

Nun ist es auch leicht, der Formel $x^2 - cy^2$ Factoren zu verschaffen, weil man nur $-c$ statt $+c$ schreiben darf. Indessen lassen sich diese auch unmittelbar auf folgende Art finden: da unsere Formel dem Producte $(x + y\sqrt{c})(x - y\sqrt{c})$ gleich ist, so setze man $x + y\sqrt{c} = (p + q\sqrt{c})$

(r + s

$(r + s\sqrt{c})$ und $x - y\sqrt{c}(p - q\sqrt{c})$ $(r - s\sqrt{c})$, woraus sogleich die Factoren $x^2 - cy^2 = (p^2 - cq^2)(r^2 - cs^2)$ entstehen, welche wieder von eben der Art, als unsere Formel selbst sind. Die Werthe aber von x und y lassen sich auch wieder auf eine doppelte Art bestimmen, nemlich zuerst $x = pr + cqs$, $y = qr + ps$, und hernach auch $x = pr - cqs$ und $y = ps - qr$. Will man die Probe machen, ob so das gefundene Product herauskomme, so probire man die ersten Werthe, wo dann $x^2 = p^2r^2 + 2cpqrs + c^2q^2s^2$ und $y = p^2s^2 + 2pqrs + q^2r^2$ seyn wird, also $cy^2 = cp^2s^2 + 2cpqrs + cq^2r^2$, woraus man $x^2 - cy^2 = p^2r^2 - cp^2s^2 + c^2q^2s^2 - cq^2r^2$ erhält, welches mit dem gefundenen Producte $(p^2 - cq^2)(r^2 - cs^2)$ übereinkömmt.

§. 177.

Bis hieher haben wir das erste Glied ohne Coefficienten betrachtet; nun wollen wir annehmen, daß dasselbe auch mit einem Buchstaben multiplicirt sey, und suchen, was die Formel $ax^2 + cy^2$ für Factoren erhalten könne.

Hier ist nun klar, daß unsere Formel dem Producte $(x\sqrt{a} + y\sqrt{-c})(x\sqrt{a} - y\sqrt{-c})$ gleich sey, welchen beyden Factoren daher wieder Factoren gegeben werden müssen. Hierbey aber zeigt sich eine Schwierigkeit. Denn wenn man nach der obigen Art $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} + s\sqrt{-c}) = apr - cqs + ps\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} - s\sqrt{-c}) = apr - cqs - ps\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac}$ annehmen wollte, woraus man $2x\sqrt{a} = 2apr - 2cqs$, und $2y\sqrt{-c} = 2ps\sqrt{-ac} + 2qr\sqrt{-ac}$ erhielte, so würde man sowohl für x als y irrationale

Werthe finden, welche hier gar nicht Statt finden.

§. 178.

Dieser Schwierigkeit aber kann man abhelfen, wenn man $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} + qr\sqrt{-c} + aps\sqrt{-c}$ und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} - qr\sqrt{-c} - aps\sqrt{-c}$ annimmt; woraus nun für x und y die rationalen Werthe $x = pr - cqs$ und $y = qr + aps$ gefunden werden, alsdann aber wird unsere Formel die Factoren $ax^2 + cy^2 = (ap^2 + cq^2)(r^2 + acs^2)$ bekommen, von welchen nur einer eben dieselbe Form hat, als unsere Formel, der andere aber von einer ganz verschiedenen Art ist.

§. 179.

Aber es stehen doch diese zwey Formeln in einer sehr genauen Verwandschaft mit einander, indem alle Zahlen, welche in der ersten Form enthalten sind, wenn sie mit einer Zahl von der zweyten Form multiplicirt werden, wieder in die erste Form fallen. Wir haben auch schon gesehen, daß zwey Zahlen von der zweyten Form $x^2 + acy^2$, welche nemlich mit der obigen $x^2 + cy^2$ übereinkömmt, mit einander multiplicirt, wieder eine Zahl von der zweyten Form geben.

Es ist also nur noch zu untersuchen, wenn zwey Zahlen von der ersten Form $ax^2 + cy^2$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Product alsdann gehöre.

Wir wollen daher folgende zwey Formeln von der ersten Art $(ap^2 + cq^2)(ar^2 + cs^2)$ mit einander multipliciren, und da ist leicht einzusehen, daß

daß ihr Product auf folgende Art vorgestellt werden könne: $(apr + cqs)^2 + ac(ps - qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr + cqs = x$ und $ps - qr = y$, so bekommen wir die Formel $x^2 + acy^2$, welche von der letzten Art ist; daher denn zwey Zahlen von der erstern Art $ax^2 + cy^2$ mit einander multiplicirt, eine Zahl von der zweyten Art geben, welches man kurz so vorstellen kann; die Zahlen von der ersten Art wollen wir durch I, die von der zweyten Art aber durch II andeuten. Nemlich I. I giebt II; I. II giebt I; II. II giebt II, woraus auch ferner erhellt, was heraus kommen müsse, wenn man mehrere solche Zahlen mit einander multiplicirt, als I. I. I giebt I; I. I. II giebt II; I. II. II giebt I; II. II. II giebt II.

§. 180.

Um dieses zu erläutern, so sey $a = 2$ und $c = 3$, woraus folgende zwey Arten von Zahlen entstehen, die erste ist in der Form $2x^2 + 3y^2$, die andere aber in der Form $x^2 + 6y^2$ enthalten. Nun aber sind die Zahlen der erstern bis auf 50 folgende:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

In der zweyten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten:

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Nehmen wir nun eine Zahl von der ersten Art, z. B. 35, und multipliciren sie mit einer von der zweyten Art 31, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2x^2 + 3y^2$ enthalten ist; oder man kann für y eine solche Zahl finden, daß $1085 - 3y^2$ ein doppeltes Quadrat, nemlich $2x^2$ werde. Dieses geschieht nun erstlich, wenn $y = 3$, denn alsdann wird $x = 23$; hernach auch, wenn

$y = 11$,

$y = 11$, denn alsdann wird $x = 19$; drittens auch noch, wenn $y = 13$, denn da wird $x = 17$, und endlich viertens, wenn $y = 19$, denn alsdann wird $x = 1$. Man kann diese beyden Arten von Zahlen wieder in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind, welche aus zwey oder mehreren kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen. Es werden also von der ersten Art folgende einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29; zusammengesetzt hingegen sind folgende: 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50, u. s. f. Von der zweyten Art aber sind folgende einfach: 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt, nemlich: 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

XII. Capitel.

Von der Verwandlung der Formel $ax^2 + cy^2$ in Quadrate oder auch in höhere Potenzen.

§. 181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von der Form $ax^2 + cy^2$ oft durchaus nicht zu Quadraten gemacht werden können; so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden, in welcher $a = 1$ ist. Z. B. die Form $2p^2 - q^2$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch auf folgende Art vorstellen: $(2p + q)^2 - 2(p + q)^2$. Nimmt man nun $2p + q = x$ und $p + q = y$ an, so kömmt die Formel $x^2 - 2y^2$ heraus, wo $a = 1$ und $c = -2$ ist. Eben eine solche

solche Verwandlung findet auch jedesmal Statt, so oft es nemlich möglich ist, dergleichen Formeln zu einem Quadrate zu machen.

Wenn daher die Formel $ax^2 + cy^2$ zu einem Quadrate oder einer andern höhern geraden Potenz gemacht werden soll, so können wir sicher $a = 1$ annehmen, und die übrigen Fälle als unmöglich ansehen.

§. 182.

Es sey daher die Formel $x^2 + cy^2$ vorgelegt, welche zu einem Quadrate gemacht werden soll. Da diese nun aus den Factoren $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$ besteht, so müssen diese entweder Quadrate, oder mit einerley Zahlen multiplicirte Quadrate seyn. Denn wenn das Product zweyer Zahlen ein Quadrat seyn soll, als z. B. pq, so wird erfordert, daß entweder $p = r^2$ und $q = s^2$, das ist, daß ein jeder Factor für sich ein Quadrat sey, oder daß $p = mr^2$ und $q = ms^2$ sey, das ist, daß die Factoren Quadrate mit einerley Zahl multiplicirt seyen; deswegen nehme man $x + y\sqrt{-c} = m(p + q\sqrt{-c})^2$ an, so wird von selbst $x - y\sqrt{-c} = m(p - q\sqrt{-c})^2$, daher bekommen wir $x^2 + cy^2 = m^2(p^2 + cq^2)^2$, und wird also ein Quadrat. Um aber x und y zu bestimmen, so haben wir die Gleichungen $x + y\sqrt{-c} = mp^2 + 2mpq\sqrt{-c} - mcq^2$ und $x - y\sqrt{-c} = mp^2 - 2mpq\sqrt{-c} - mcq^2$, wo sich deutlich zeigt, daß x dem rationalen Theile, $y\sqrt{-c}$ aber dem irrationalen Theile gleich seyn muß; daher wird $x = mp^2 - mcq^2$, und $y\sqrt{-c} = 2mpq\sqrt{-c}$ oder $y = 2mpq$.

Nimmt man also $x = mp^2 - mcq^2$ und $y = 2mpq$ an, so wird unsere Formel $x^2 + cy^2$ ein

Quadrat, nemlich $m^2 (p^2 + cq^2)^2$, von welchem die Wurzel $mp^2 + mcq^2$ ist.

§. 183.

Sollen die zwey Zahlen x und y unter sich untheilbar seyn, oder keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muß $m = 1$ gesetzt werden. Wenn daher $x^2 + cy^2$ ein Quadrat seyn soll, so nimmt man nur $x = p^2 - cq^2$ und $y = 2pq$, wo denn diese Formel dem Quadrate $p^2 + cq^2$ gleich wird. Statt daß man $x = p^2 - cq^2$ annimmt, so kann man auch $x = cq^2 - p$ setzen, weil auf beyden Seiten das Quadrat x^2 einerley wird. Dieses ist nun eben diejenige Formel, die wir schon oben aus ganz andern Gründen gefunden haben, wodurch die Richtigkeit der hier gebrauchten Methode bestätigt wird.

Denn nach der vorigen Methode, wenn $x^2 + cy^2$ ein Quadrat seyn soll, so setzt man die Wurzel $= x + \frac{py}{q}$, und dann bekömmt man $x^2 + cy^2 = x^2 + \frac{2pxy}{q} + \frac{p^2y^2}{q^2}$, wo sich die x^2 aufheben; die übrigen Glieder aber durch y dividirt und mit q^2 multiplicirt, geben $cq^2y = 2pqx + p^2y$, oder $cq^2y - p^2y = 2pqx$; man theile nun durch $2pq$ und durch y, so wird $\frac{x}{y} = \frac{cq^2 - p^2}{2pq}$. Da aber x und y untheilbar seyn sollen, wie auch p und q dergleichen sind, so muß x dem Zähler und y dem Nenner gleich seyn, folglich $x = cq^2 - p^2$ und $y = 2pq$, wie vorher.

§. 184.

Diese Auflösung gilt, die Zahl c mag positiv oder negativ seyn; hat dieselbe aber selbst Factoren, als

als z. B. wenn die gegebene Formel $x^2 + acy^2$ wäre, welche ein Quadrat seyn soll, so findet nicht nur die vorige Auflösung statt, welche $x = acq^2 - p^2$ und $y = 2pq$ giebt, sondern auch noch diese: $x = cq^2 - ap^2$ und $y = 2pq$; denn da wird ebenfalls $x^2 + acy^2 = c^2q^4 + 2acp^2q^2 + a^2p^4 = (cq^2 + ap^2)^2$, welches auch geschieht, wenn man $x = ap^2 - cq^2$ annimmt, weil das Quadrat x^2 in beyden Fällen einerley herauskömmt.

Diese neue Auflösung wird auch durch die hier gebrauchte Methode auf folgende Art gefunden. Man setze $x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2$, und $x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2$, damit herauskomme: $x^2 + acy^2 = (ap^2 + cq^2)^2$, und also gleich einem Quadrat; alsdann aber wird $x + y\sqrt{-ac} = ap^2 + 2pq\sqrt{-ac} - cq^2$ und $x - y\sqrt{-ac} = ap^2 - 2pq\sqrt{-ac} - cq^2$, woraus folgt $x = ap^2 - cq^2$ und $y = 2pq$. Läßt sich also die Zahl ac auf mehrere Arten in zwey Factoren zertheilen, so kann man auch mehrere Auflösungen angeben.

§. 185.

Wir wollen dieses durch einige bestimmte Formeln erläutern, und zuerst die Formel $x^2 + y^2$ betrachten, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier $ac = 1$ ist, so nehme man $x = p^2 - q^2$ und $y = 2pq$, so wird $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^2$.

Soll zweytens die Formel $x^2 - y^2$ ein Quadrat werden, so ist $ac = -1$; man nehme also $x = p^2 + q^2$ und $y = 2pq$, wo dann $x^2 - y^2 = (p^2 - q^2)^2$ wird.

Soll drittens die Formel $x^2 + 2y^2$ ein Quadrat werden, wo $ac = 2$ ist, so nehme man $x = p^2 - 2q^2$, oder $x = 2p^2 - q^2$ und $y = 2pq$, und dann wird $x^2 + 2y^2 = (p^2 + 2q^2)^2$, oder $x^2 + 2y^2 = (2p^2 + q^2)^2$.

Soll viertens die Formel $x^2 - 2y^2$ ein Quadrat werden, wo $ac = -2$ ist, so nehme man $x = p^2 + 2q^2$ und $y = 2pq$, wo man dann $x^2 - 2y^2 = (p^2 - 2q^2)^2$ erhält.

Soll fünftens die Formel $x + 6y^2$ ein Quadrat werden, wo $ac = 6$, und also entweder $a = 1$ und $c = 6$, oder $a = 2$ und $c = 3$ ist; so kann man erstlich $x = p^2 - 6q^2$ und $y = 2pq$ annehmen, wo dann $x^2 + 6y^2 = (p^2 + 6q^2)^2$ ist. Hernach kann man auch $x = 2p^2 - 3q^2$ und $y = 2pq$ setzen, wo dann $x^2 + 6y^2 = (2p^2 + 3q^2)^2$ ist.

§. 186.

Sollte aber die Formel $ax^2 + cy^2$ zu einem Quadrate gemacht werden, so ist schon erinnert worden, daß dieses nicht geschehen könne, wofern nicht schon ein Fall bekannt ist, in welchem diese Formel wirklich ein Quadrat werde. Dieser bekannte Fall sey daher, wenn $x = f$ und $y = g$ ist, so daß $af^2 + cg^2 = h^2$ ist; und alsdann kann unsere Formel in eine andere von dieser Art $t^2 + acu^2$ verwandelt werden, wenn man $t = \frac{afx + cgy}{h}$ und $u = \frac{gx - fy}{h}$ setzt; denn da wird $t^2 = \frac{a^2f^2x^2 + 2acfgxy + c^2g^2y^2}{h^2}$ und $u^2 = \frac{g^2x^2 - 2fgxy + f^2y^2}{h^2}$, woraus folgt, daß $t^2 + acu^2 = \frac{a^2f^2x^2 + c^2g^2y^2 + acg^2x^2 + acf^2y^2}{h^2} = \frac{ax^2(af^2 + cg^2) + cy^2(af^2 + eg^2)}{h^2}$ ist; da nun $af^2 + cg^2 = h^2$, so wird $t^2 + acu^2 = ax^2 + cy^2$, und auf diese Art bekömmt die vorgelegte Formel $ax^2 + cy^2$ die Form $t^2 + acu^2$, welche nach den hier angegebenen Regeln leicht zu einem Quadrate gemacht werden kann.

§. 187.

Nun wollen wir weiter fortgehen und sehen, wie die Formel $ax^2 + cy^2$, wo x und y unter sich untheilbar seyn sollen, zu einem Cubus gemacht werden könne; hierzu sind die vorigen Regeln keineswegeshinlänglich, die hier angegebene Verfahrungsart aber kann mit dem besten Fortgange angewendet werden, wobey noch vorzüglich dieses zu bemerken ist, daß diese Formel allezeit zu einem Cubus gemacht werden könne, die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, welches bey den Quadraten nicht anging, wenn nicht schon ein Fall bekannt war; welches auch von allen andern geraden Potenzen gilt; bey den ungeraden aber, als der dritten, fünften, siebenten Potenz u. s. f. ist die Auflösung immer möglich.

§. 188.

Wenn daher die Formel $ax^2 + cy^2$ zu einem Cubus gemacht werden soll, so setze man auf eine ähnliche Weise als vorher
$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3$ und
$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3$, denn daraus wird das Product $ax^2 + cy^2 = (ap^2 + cq^2)^3$, und also unsere Formel ein Cubus; es kommt aber nur darauf an, ob auch hier x und y auf eine rationale Art bestimmt werden können? welches glücklicher Weise gelingt; denn wenn die angesetzten Cubi wirklich genommen werden, so erhalten wir folgende zwey Gleichungen: $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} + 3ap^2q\sqrt{-c} - 3cpq^2\sqrt{a} - cq^3\sqrt{-c}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} - 3ap^2q\sqrt{-c} - 3cpq^2\sqrt{a} + cq^3\sqrt{-c}$, woraus offenbar folgt, daß $x = ap^3 - 3cpq^2$, und $y = 3ap^2q - cq^3$.

Man suche z. B. zwey Quadrate x^2 und y^2, deren Summe $x^2 + y^2$ einen Cubus ausmache; weil nun hier $a = 1$ und $c = 1$, so bekommen wir $x = p^3 - 3pq^2$ und $y = 3p^2q - q^3$, und alsdann wird $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^3$. Es sey nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 2$ und $y = 11$; hieraus $x^2 + y^2 = 125 = 5^3$.

§. 189.

Wir wollen noch die Formel $x^2 + 3y^2$ betrachten, welche zu einem Cubus gemacht werden soll; weil nun hier $a = 1$ und $c = 3$, so wird $x = p^3 - 9pq^2$ und $y = 3p^2q - 3q^3$, und alsdann $x^2 + 3y^2 = (p^2 + 3q^2)^3$. Weil diese Formel oft vorkömmt, so wollen wir davon die leichtern Fälle hierher setzen:

p	q	x	y	$x^2 + 3y^2$
1	1	8	0	$64 = 4^3$
2	1	10	9	$343 = 7^3$
1	2	35	18	$2197 = 13^3$
3	1	0	24	$1728 = 12^3$
1	3	80	72	$21952 = 28^3$
3	2	81	30	$9261 = 21^3$
2	3	154	45	$29791 = 31^3$

§. 190.

Wäre es nicht zur Bedingung gemacht worden, daß die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbar seyn sollten, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit; denn wenn $ax^2 + cy^2$ ein Cubus seyn soll, so setze man $x = tz$ und $y = uz$, so wird unsere Formel $at^2z^2 + cu^2z^2$, welche dem Cubus $\frac{z^3}{v^3}$ gleich gesetzt werde, woraus sogleich $z = v^3(at^2 + cu^2)$ gefunden wird; folglich sind die gesuchten Werthe für x und

und y, $x = tv^3 (at^2 + cu^2)$ und $y = uv^3 (at^2 + cu^2)$, welche außer dem Cubus v^3 noch $at^2 + cu^2$ zum gemeinschaftlichen Theiler haben: diese Auflösung giebt sogleich $ax^2 + cy^2 = v^6 (at^2 + cu^2)^2 (at^2 + cu^2) = v^6 (at^2 + cu^2)^3$, welches offenbar der Cubus von $v^2 (at^2 + cu^2)$ ist.

§. 191.

Das hier gebrauchte Verfahren ist um so viel merkwürdiger, da wir durch Hülfe irrationaler und so gar imaginärer Formeln solche Auflösungen gefunden haben, wozu nur allein rationale und so gar ganze Zahlen erfordert wurden. Noch merkwürdiger aber ist es, daß in denjenigen Fällen, wo die Irrationalität verschwindet, unser Verfahren nicht mehr statt findet; denn wenn z. B. $x^2 + cy^2$ ein Cubus seyn soll, so kann man sicher schließen, daß auch die beyden irrationalen Factoren davon, nemlich $x + y\sqrt{-c}$ und $x - y\sqrt{-c}$, Cubi seyn müssen; weil sie unter sich untheilbar sind, indem die Zahlen x und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Fiele aber die Irrationalität $\sqrt{-c}$ weg, als z. B. wenn $c = -1$ wäre, so würde dieser Grund nicht mehr statt finden, weil alsdann die beyden Factoren, nemlich $x + y$ und $x - y$ allerdings gemeinschaftliche Theiler haben könnten, ungeachtet x und y dergleichen nicht haben, z. B. wenn beyde ungerade Zahlen wären.

Wenn daher $x^2 - y^2$ ein Cubus seyn soll, so ist nicht nöthig, daß sowohl $x + y$ als $x - y$ für sich ein Cubus sey, sondern man könnte wohl $x + y = 2p^3$ und $x - y = 4q^3$ annehmen, wo dann $x^2 - y^2$ unstreitig ein Cubus würde, nemlich $8p^3q^3$, wovon die Cubicwurzel $2pq$ ist; alsdann aber wird $x = p^3 + 2q^3$, und $y = p^3 - 2q^3$. Wenn aber die Formel $ax^2 + cy^2$ sich nicht in zwey rationale Factoren zertheilen läßt, so finden auch keine andere Auflösungen statt, als die hier gegeben worden sind.

§. 192.

Wir wollen diese Abhandlung noch durch einige merkwürdige Aufgaben erläutern:

I. Aufg. Man verlangt in ganzen Zahlen ein Quadrat x^2, daß, wenn dazu 4 addirt wird, ein Cubus herauskomme; dergleichen sind 4 und 121; ob aber noch mehr dergleichen angegeben werden können, ist hier die Frage?

Da 4 ein Quadrat ist, so suche man zuerst die Fälle auf, in welchen $x^2 + y^2$ ein Cubus wird; dieses geschieht, wie aus dem obigen erhellt, wenn $x = p^3 - 3pq^2$ und $y = 3p^2q - q^3$; da nun hier $y^2 = 4$, so ist $y = \pm 2$, folglich muß $3p^2q - q^3 = + 2$, oder $3p^2q - q^3 = - 2$ seyn; im erstern Falle wird also $q(3p^2 - q^2) = 2$, folglich q ein Theiler von 2. Es sey daher $q = 1$, so wird $3p^2 - 1 = 2$, folglich $p = 1$ und also $x = 2$, und $x^2 = 4$.

Setzt man $q = 2$, so wird $6p^2 - 8 = \pm 2$; gilt das Zeichen $+$, so wird $6p^2 = 10$ und $p^2 = \frac{5}{3}$, woraus der Werth von p irrational würde und hier also nicht statt fände; gilt aber das Zeichen $-$, so wird $6p^2 = 6$ und $p = 1$, folglich $x = 11$. Mehrere Fälle giebt es nicht, und also können nur zwey Quadrate angegeben werden, nemlich 4 und 121, welche Cubi werden, wenn man dazu 4 addirt.

§. 193.

II. Aufg. Man verlangt solche Quadrate in ganzen Zahlen, die, wenn dazu 2 addirt wird, Cubi werden, wie bey dem Quadrate 25 geschieht; ob es nun noch mehr dergleichen giebt, wird hier gefragt?

Da also $x^2 + 2$ ein Cubus seyn soll, und 2 ein doppeltes Quadrat ist, so suche man zuerst die Fälle auf, wo die Formel $x^2 + 2y^2$ ein Cubus wird, welches aus dem oben gezeigten (§. 188), wo $a = 1$ und $c = 2$, geschieht, wenn $x = p^3 - 6qp^2$ und $y = 3p^2q - 2q^3$; da nun hier $y = \pm 1$, so muß $3p^2q - 2q^3 = q(3p^2 - 2q^2) = \pm 1$ seyn, und also q ein Theiler von 1; es sey also $q = 1$, so wird $3p^2 - 2 = \pm 1$; gilt das obere Zeichen, so wird $3p^2 = 3$ und $p = 1$, folglich $x = 5$; das untere Zeichen aber giebt für p einen irrationalen Werth, welcher hier nicht statt findet; hieraus folgt, daß nur das einzige Quadrat 25 in ganzen Zahlen die verlangte Eigenschaft habe.

§. 194.

III. Aufg. Man verlangt solche fünffache Quadrate; wenn dazu 7 addirt wird, daß ein Cubus herauskomme: oder daß $5x^2 + 7$ ein Cubus sey.

Man suche zuerst diejenigen Fälle auf, in welchen $5x^2 + 7y^2$ ein Cubus wird, welches nach dem (§. 188), wo $a = 5$ und $c = 7$ ist, geschieht, wenn $x = 5p^3 - 21pq^2$ und $y = 15p^2q - 7q^3$; weil nun hier $y = \pm 1$ seyn soll, so wird $15p^2q - 7q^3 = q(15p^2 - 7q^2) = \pm 1$, wo dann q ein Theiler von 1 seyn muß, folglich $q = 1$; daher wird $15p^2 - 7 = \pm 1$, wo beyde Fälle für p etwas irrationales geben, woraus aber doch nicht geschlossen werden kann, daß diese Frage gar nicht möglich sey, weil p und q solche Brüche seyn könnten, da $y = 1$ und x doch eine ganze Zahl würde; dieses geschieht wirklich, wenn $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$ ist, denn alsdann wird $y = 1$ und $x = 2$; mit andern Brüchen aber ist dieses nicht möglich.

§. 195.

IV. Aufg. **Man suche solche Quadrate in ganzen Zahlen, so daß ein Cubus herauskomme, wenn man die Zahlen doppelt nimmt und davon 5 subtrahirt; oder $2x^2 - 5$ soll ein Cubus seyn.**

Man suche zuerst diejenigen Fälle auf, in welchen $2x^2 - 5y^2$ ein Cubus wird, welches nach dem 188ten §, wo $a = 2$ und $c = -5$ geschieht, wenn $x = 2p^3 + 15pq^2$ und $y = 6p^2q + 5q^3$. Hier aber muß $y = \pm 1$ seyn, und folglich $6p^2q + 5q^3 = q(6p^2 + 5q^2) = \pm 1$, welches weder in ganzen Zahlen, noch in Brüchen geschehen kann; daher ist dieser Fall sehr merkwürdig, weil gleichwohl eine Auflösung statt findet, wenn nemlich $x=4$, denn alsdann wird $2x^2 - 5 = 27$, welches der Cubus von 3 ist; und es ist von der größten Wichtigkeit, hiervon den Grund zu untersuchen.

§. 196.

Es ist also möglich, daß $2x^2 - 5y^2$ ein Cubus seyn könnte, dessen Wurzel sogar die Form $2p^2 - 5q^2$ hat, wenn nemlich $x = 4$, $y = 1$ und $p = 2$, $q = 1$, und also haben wir einen Fall, wo $2x^2 - 5y^2 = (2p^2 - 5q^2)^3$, ungeachtet es die beyden Factoren von $2x^2 - 5y^2$, nemlich $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ und $x\sqrt{2} - y\sqrt{5}$, keine Cubi sind, da sie doch nach dieser Methode die Cubi von $p\sqrt{2} +$

$q\sqrt{5}$ und $p\sqrt{2} - q\sqrt{5}$ seyn sollten, indem in unserm Falle $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$, hingegen $(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^3 = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^3 = 46\sqrt{2} + 29\sqrt{5}$, welches keinesweges mit $4\sqrt{3} + \sqrt{5}$ überein kömmt.

Es ist aber zu bemerken, daß die Formel $r^2 - 10s^2$ in unendlich vielen Fällen 1 oder -1 werden kann, wenn nemlich $r = 3$ und $s = 1$, ferner wenn $r = 19$ und $s = 6$, welche mit der Formel $2p^2 - 5q^2$ multiplicirt, wieder eine Zahl von der letztern Form giebt.

Es sey daher $f^2 - 10g^2 = 1$, und statt, daß wir oben $2x^2 - 5y^2 = (2p^2 - 5q^2)^3$ gesetzt haben, so können wir jetzt auch auf eine allgemeinere Art $2x^2 - 5y^2 = (f^2 - 10g^2).(2p^2 - 5q^2)^3$ annehmen, und die Factoren davon genommen, geben $x\sqrt{2} \pm y\sqrt{5} = (f \pm g\sqrt{10})(p\sqrt{2} \pm q\sqrt{5})^3$. Es ist aber $(p\sqrt{2} \pm q\sqrt{5})^3 = (2p^3 + 15pq^2)\sqrt{2} \pm (6p^2q + 5q^3)\sqrt{5}$, wofür wir der Kürze wegen $A\sqrt{2} + B\sqrt{5}$ schreiben wollen, welches mit $f + g\sqrt{10}$ multiplicirt, $Af\sqrt{2} + Bf\sqrt{5} + 2Ag\sqrt{5} + 5Bg\sqrt{2}$ giebt, und dem $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ gleich seyn muß; hieraus entsteht $x = Af + 5Bg$ und $y = Bf + 2Ag$; da nun $y = \pm 1$ seyn muß, so ist es nicht durchaus nöthig, daß $6p^2q + 5q^3 = 1$ werde, sondern es ist genug, wenn nur die Formel $Bf + 2Ag$, das ist $f(6p^2q + 5q^3) + 2g(2p^3 + 15pq^2)$ dem ± 1 gleich werde, wo f und g mehrere Werthe haben können. Es sey z. B. $f = 3$ und $g = 1$, so muß die Formel $18p^2q + 15q^3 + 4p^3 + 30pq^2$ dem ± 1 gleich werden, und es muß $4p^3 + 18p^2q + 30pq^2 + 15q^3 = \pm 1$ seyn.

§. 197.

Diese Schwierigkeit, alle dergleichen mögliche Fälle heraus zu bringen, findet sich aber nur alsdann, wenn in der Formel $ax^2 + cy^2$ die Zahl c negativ ist, weil alsdann die Formel $ax^2 + cy^2$ oder $x^2 - acy^2$, welche mit ihr in einer genauen Verwandschaft steht, 1 werden kann; dieses kann aber niemals geschehen, wenn c eine positive Zahl ist, weil $ax^2 + cy^2$ oder $x^2 + acy^2$ immer größere Zahlen giebt, je größer x und y genommen werden. Daher kann die hier vorgetragene Methode nur in solchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden, wo die beyden Zahlen a und c positiv genommen werden.

§. 198.

Wir kommen nun zur vierten Potenz und bemerken zuerst, daß, wenn die Formel $ax^2 + cy^2$ ein Biquadrat werden soll, die Zahl $a = 1$ seyn müsse; denn wenn sie kein Quadrat wäre, so wäre es entweder nicht möglich diese Formel nur zu einem Quadrate zu machen, oder wenn es auch möglich wäre, so könnte sie auch in die Form $t^2 + acu^2$ verwandelt werden, daher wir die Frage nur auf diese letztere Form einschränken, mit welcher die obige $x^2 + cy^2$, wenn $a = 1$, übereinstimmt. Nun kommt es also darauf an, wie die Werthe von x und y beschaffen seyn müssen, damit die Formel $x^2 + cy^2$ ein Biquadrat werde. Da nun diese aus den beyden Factoren $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$ besteht, so muß ein jeder auch ein Biquadrat von gleicher Art seyn, daher muß $x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})^4$ und $x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})^4$ angenommen werden, woraus unsere Formel dem Biquadrate $(p^2 + cq^2)^4$ gleich wird; die Buchstaben x

und

und y selbst aber werden aus der Entwickelung dieser Formel leicht bestimmt, wie folgt:

$$x + y\sqrt{-c} = p^4 + 4p^3q\sqrt{-c} - 6cp^2q^2$$
$$- 4cpq^3\sqrt{-c} + c^2q^4$$
$$x - y\sqrt{-c} = p^4 - 4p^3q\sqrt{-c} - 6cp^2q^2$$
$$+ 4cpq^3\sqrt{-c} + c^2q^4$$

folglich $x = p^4 - 6cp^2q^2 + c^2q^4$ und
$$y = 4p^3q - 4cpq^3.$$

§. 199.

Wenn also $x^2 + y^2$ ein Biquadrat werden soll, weil hier $c = 1$, so haben wir die Werthe $x = p^4 - 6p^2q^2 + q^4$ und $y = 4p^3q - 4pq^3$, und alsdann wird $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^4$ seyn.

Nehmen wir z. B. $p = 2$ und $q = 1$ an, so bekommen wir $x = 7$ und $y = 24$; hieraus wird $x^2 + y^2 = 625 = 5^4$.

Nimmt man ferner $p = 3$ und $q = 2$, so bekömmt man $x = 119$ und $y = 120$, daraus wird $x^2 + y^2 = 13^4$.

§. 200.

Bey allen geraden Potenzen, wozu die Formel $ax^2 + cy^2$ gemacht werden soll, ist ebenfalls durchaus nothwendig, daß diese Formel zu einem Quadrat gemacht werden könne, zu welchem Ende es hinlänglich ist, daß man nur einen einzigen Fall wisse, in welchem dieses geschieht; und alsdann kann diese Formel, wie wir oben gesehen haben, in folgende verwandelt werden: $t^2 + acu^2$, wo das erste Glied nur mit 1 multiplicirt ist, und also als in der Form $x^2 + cy^2$ enthalten, angesehen werden kann, welche hierauf auf eine ähnliche Weise, so wohl zur sechsten Potenz als zu einer jeden andern noch höhern geraden Potenz gemacht werden kann.

§. 201.

Bei den ungeraden Potenzen aber ist diese Bedingung nicht nothwendig, sondern die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, so kann die Formel $ax^2 + cy^2$ allezeit zu einer jeden ungeraden Potenz gemacht werden. Denn verlangt man z. B. die fünfte Potenz, so darf man nur $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^5$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^5$ annehmen, wo dann offenbar $ax^2 + cy^2 = (ap^2 + cq^2)^5$ wird. Die fünfte Potenz von $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}$ ist nun $a^2p^5\sqrt{a} + 5a^2p^4q\sqrt{-c} - 10acp^3q^2\sqrt{a} - 10acp^2q^3\sqrt{-c} + 5c^2pq^4\sqrt{a} + c^2q^5\sqrt{-c}$, woraus sogleich $x = a^2p^5 - 10acp^3q^2 + 5c^2pq^4$ und $y = 5a^2p^4q - 10acp^2q^3 + c^2q^5$ geschlossen wird.

Verlangt man also eine Summe zweyer Quadrate $x^2 + y^2$, die zugleich eine fünfte Potenz sey, so $a = 1$ und $c = 1$; folglich $x = p^5 - 10p^3q^2 + 5pq^4$ und $y = 5p^4q - 10p^2q^3 + q^5$. Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$ und $q = 41$, und $x^2 + y^2 = 3125 = 5^5$.

XIII. Capitel.

Von einigen Formeln der Art $ax^4 + bx^4$, welche sich nicht zu einem Quadrate machen lassen.

§. 202.

Man hat sich alle Mühe gegeben zwey Biquadrate zu finden, deren Summe oder Differenz eine Quadratdratzahl würde; allein alle Mühe war vergeblich, und endlich fand man so gar einen Beweis, daß weder die Formel $x^4 + y^4$ noch diese $x^4 - y^4$ jemals ein Quadrat werden könne, nur zwey Fälle ausgenommen, wo nemlich bey der erstern entweder $x = 0$ oder $y = 0$, bey der andern aber entweder $y = 0$ oder $y = x$, in welchen Fällen die Sache offenbar vor Augen liegt. Daß es aber in allen übrigen Fällen unmöglich seyn soll, ist um so viel merkwürdiger, weil unendlich viele Auflösungen statt finden, wenn nur von schlechten Quadraten die Rede ist.

§ 203.

Um diesen Beweis gehörig vorzutragen, ist vorzüglich noch zu bemerken, daß die beyden Zahlen x und y unter sich als untheilbar angesehen werden können; denn sollten sie einen gemeinschaftlichen Theiler, z. B. d haben, so daß man $x = dp$ und $y = dq$ annehmen könnte, so würden unsere Formeln $d^4p^4 + d^4q^4$ und $d^4p^4 - d^4q^4$, die, wenn sie Quadrate wären, auch durch das Quadrat d^4 dividirt, Quadrate bleiben müßten, so daß auch die Formeln $p^4 + q^4$ und $p^4 - q^4$ Quadrate wären, wo nun die Zahlen p und q keinen weitern gemeinschaftlichen Theiler haben; es ist daher hinlänglich zu beweisen, daß diese Formeln in dem Fall, wo x und y unter sich untheilbar sind, keine Quadrate werden können, und alsdann erstreckt sich der Beweis von selbst auf alle Fälle, in welchen auch x und y gemeinschaftliche Theiler haben.

§. 204.

Wir wollen daher von der Summe zweyer Biquadrate, nemlich der Formel $x^4 + y^4$ den Anfang machen, wo wir x und y als unter sich untheilbare

Zahlen

Zahlen ansehen können. Um nun zu zeigen, daß $x^4 + y^4$ außer den oben angezeigten Fällen kein Quadrat seyn könne, so wird der Beweis auf folgende Art geführt:

Wenn jemand den Satz läugnen wollte, so müßte er behaupten, daß solche Werthe für x und y möglich wären, wodurch $x^4 + y^4$ ein Quadrat würde, sie möchten auch so groß seyn, als sie wollten, weil in kleinen gewiß keine vorhanden sind.

Man kann aber deutlich zeigen, daß, wenn auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen eben dergleichen Werthe geschlossen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleinern u. s. f. Da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Werthe vorhanden sind, außer den zwey angezeigten, welche aber nicht auf andere führen, so kann man sicher schließen, daß auch in größern, ja so gar den allergrößten Zahlen, keine solche Werthe für x und y vorhanden seyn können. Und auf eben solche Art wird auch der Satz von der Differenz zweyer Biquadrate $x^4 - y^4$ bewiesen, wie wir dieses so gleich zeigen wollen.

§. 205.

Um also zu zeigen, daß $x^4 + y^4$ kein Quadrat sein könne, außer in den beyden Fällen, die für sich deutlich sind, so sind folgende Sätze wohl zu bemerken.

I. Nehmen wir an, daß die Zahlen x und y unter sich untheilbar sind oder keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; so sind sie entweder beyde ungerade, oder die eine ist gerade und die andere ungerade.

II. Beyde

II. Beyde aber können nicht ungerade seyn, weil die Summe zweyer ungeraden Quadrate nie ein Quadrat seyn kann; denn ein ungerades Quadrat ist jedesmal in der Form $4n + 1$ enthalten, und also würde die Summe zweyer ungeraden Quadrate die Form $4n + 2$ haben, welche sich durch 2, nicht aber durch 4 theilen läßt, und also kein Quadrat seyn kann. Dieses gilt aber auch von zwey ungeraden Biquadraten.

III. Wenn daher $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte das eine gerade, das andere aber ungerade seyn. Wir haben aber oben gesehen, daß, wenn die Summe zweyer Quadrate ein Quadrat seyn soll, die Wurzel des einen durch $p^2 - q^2$, des andern aber durch $2pq$ ausgedrückt werde, woraus folgt, daß $x^2 = p^2 - q^2$ und $y^2 = 2pq$ seyn müßte, und dann würde $x^4 + y^4 = (p^2 + q^2)^2$ seyn.

IV. Hier also würde y gerade, x aber ungerade seyn; da nun $x^2 = p^2 - q^2$, so muß auch von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade seyn; die erstere p aber kann nicht gerade seyn, weil sonst $p^2 - q^2$ als eine Zahl von der Form $4n - 1$ oder $4n + 3$, niemals ein Quadrat werden kann. Folglich müßte p ungerade, q aber gerade seyn, wo sich von selbst versteht, daß sie unter sich untheilbar seyn müssen.

V. Da nun $p^2 - q^2$ ein Quadrat, nemlich x^2 gleich seyn soll, so geschieht dieses, wie wir oben gesehen haben, wenn $p = r^2 + s^2$ und $q = 2rs$; denn alsdann wird $x^2 = (r^2 - s^2)^2$, und also $x = r^2 - s^2$.

VI. Allein y^2 muß auch ein Quadrat seyn; da wir nun $y^2 = 2pq$ haben, so wird jetzt $y^2 = 4rs(r^2 + s^2)$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß: folglich muß auch $rs(r^2 + s^2)$ ein Quadrat seyn, wo r und s unter sich untheilbare Zahlen sind, so daß auch die hier befindlichen drey Factoren, r, s, und $r^2 + s^2$, keinen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben können.

VII. Wenn aber ein Product aus mehreren Factoren, die unter sich untheilbar sind, ein Quadrat seyn soll, so muß ein jeder Factor für sich ein Quadrat seyn, also setze man $r = t^2$ und $s = u^2$, so muß auch $t^4 + u^4$ ein Quadrat seyn. Wenn daher $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so würde auch hier $t^4 + u^4$, das ist ebenfalls eine Summe zweyer Biquadrate, ein Quadrat seyn. Wobey zu merken ist, daß, weil hier $x^2 = (t^4 - u^4)^2$ und $y^2 = 4t^2u^2(t^4 + u^4)$, die Zahlen t und u offenbar weit kleiner seyn würden, als x und y, indem x und y so gar durch die vierten Potenzen von t und u bestimmt werden und also unstreitig weit größer seyn müssen.

VIII. Wenn daher zwey Biquadrate, als x^4 und y^4 auch in den größten Zahlen vorhanden seyn sollten, deren Summe ein Quadrat wäre, so könnte man daraus eine Summe zweyer weit kleinerer Biquadrate ableiten, welche ebenfalls ein Quadrat wäre; und aus diesen könnte nachher noch eine kleinere dergleichen Summe geschlossen werden und so weiter, bis man endlich auf sehr kleine Zahlen käme; da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Summe möglich ist, so folgt daraus offenbar, daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht geben könne.

IX. Man könnte hier zwar einwenden, daß es in den kleinen Zahlen wirklich dergleichen gebe, wie schon anfänglich bemerkt worden, nemlich wenn das eine Biquadrat o wird; allein auf diesen Fall kommt man gewiß nicht, wenn man auf solche Weise von den größten Zahlen immer zu kleinern zurückgeht. Denn wäre bey der kleinern Summe $t^4 + u^4$, entweder $t = 0$ und $u = 0$, so würde auch bey der größern Summe nothwendig $y^2 = 0$ seyn; welcher Fall hier in keine Betrachtung kömmt.

§. 206.

Nun kommen wir zu dem zweyten Hauptsatze, daß auch die Differenz zweyer Biquadrate, als $x^4 - y^4$, niemals ein Quadrat werden könne, außer in den Fällen, wo $y = 0$ und $y = x$; zu welchem Beweise folgendes zu merken ist.

I. Sind die Zahlen x und y als unter sich untheilbar anzusehen, und also entweder beyde ungerade, oder die eine gerade und die andere ungerade. Da nun in beyden Fällen die Differenz zweyer Quadrate wieder ein Quadrat werden kann, so müssen diese zwey Fälle besonders betrachtet werden.

II. Es seyen also zuerst die beyden Zahlen x und y ungerade, und man setze $x = p + q$ und $y = p - q$, so muß nothwendig eine dieser Zahlen p und q ungerade, die andere aber gerade seyn. Nun wird $x^2 - y^2 = 4pq$ und $x^2 + y^2 = 2p^2 + 2q^2$, folglich unsere Formel $x^4 - y^4 = 4pq(2p^2 + 2q^2)$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch der vierte Theil davon $pq\,(2p^2 + 2q^2) = 2pq\,(p^2 + q^2)$, deren Factoren unter sich untheilbar sind; folglich muß ein jeder dieser Factoren $2p$, q, und $p^2 + q^2$ für sich ein Quadrat seyn, weil nemlich die eine Zahl p gerade, die andere q aber ungerade ist. Man setze daher, um die beyden ersten zu Quadraten zu machen, $2p = 4r^2$ oder $p = 2r^2$, und $q = s^2$, wo s ungerade seyn muß, so wird der dritte Factor $4r^4 + s^4$ auch ein Quadrat seyn müssen.

III. Da nun $s^4 + 4r^4$ eine Summme zweyer Quadrate ist, von welchen s^4 ungerade, $4r^4$ aber gerade ist, so setze man die Wurzel des erstern $s^2 = t^2 - u^2$, wo t ungerade und u gerade ist; die Wurzel des letztern aber $2r^2 = 2tu$ oder $r^2 = tu$, wo t und u unter sich untheilbar sind.

IV. Weil nun $tu = r^2$ ein Quadrat seyn muß, so muß sowohl t als u ein Quadrat seyn; man setze daher $t = m^2$ und $u = n^2$, wo m ungerade und n gerade ist, so wird $s^2 = m^4 - n^4$, so daß wieder eine Differenz zweyer Biquadrate, nemlich $m^4 - n^4$ ein Quadrat seyn müßte. Es ist aber klar, daß diese Zahlen weit kleiner seyn würden, als x und y, weil r und s offenbar kleiner sind als x und y, und eben so m und n kleiner als r und s; wenn es also in den größten Zahlen möglich und $x^4 - y_4$ ein Quadrat wäre, so würde es in weit kleinern Zahlen auch noch möglich seyn, und so immer fort, bis man endlich auf die kleinsten Zahlen käme, wo die Sache möglich ist.

V. Die kleinsten Zahlen aber, wo dieses möglich ist, sind, wenn das eine Biquadrat gleich 0 oder dem andern gleich ist; wäre das erstere, so müßte $n = 0$ seyn, folglich $u = 0$, ferner

$r = 0$

$r = 0$ und $p = 0$ und $x^4 - y^4 = 0$, oder $x^4 = y^4$; von einem solchen Fall ist aber hier nicht die Rede. Wäre aber $n = m$, so würde $t = u$, weiter $s = 0$, $q = 0$ und endlich auch $x = y$, welcher Fall hier nicht statt findet.

§. 207.

Man könnte hier einwenden, daß, da m ungerade und n gerade ist, die letztere Differenz der erstern nicht mehr ähnlich sey, und man also daraus nicht weiter auf kleinere Zahlen der Schluß machen könnte. Es ist aber hinlänglich, daß man von der erstern Differenz auf die andere gekommen ist, und wir werden jetzt zeigen, daß auch $x^4 - y^4$ kein Quadrat seyn könne, wenn das eine Biquadrat gerade und das andere ungerade ist.

I. Wäre das erstere x^4 gerade und y^4 ungerade, so wäre die Sache an sich nicht möglich, weil eine Zahl von der Form $4n + 3$ herauskäme, die kein Quadrat seyn kann. Es sey daher x ungerade und y gerade, so muß $x^2 = p^2 + q^2$ und $y = 2pq$ seyn, denn so wird $x^4 - y^4 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 = (p^2 - q^2)^2$, wo von p und q das eine gerade, das andere aber ungerade seyn muß.

II. Da nun $p^2 + q^2 = x^2$ ein Quadrat seyn muß, so wird $p = r^2 - s^2$ und $q = 2rs$; folglich $x = r^2 + s^2$. Hieraus aber wird $y^2 = 2(r^2 - s^2) \cdot 2rs$ oder $y^2 = 4rs(r^2 - s^2)$, welches ein Quadrat seyn muß, und also auch der vierte Theil davon, nemlich $rs(r^2 - s^2)$, wovon die Factoren unter sich untheilbar sind.

III. Man setze daher $r = t^2$ und $s = u^2$, so wird der dritte Factor $r^2 - s^2 = t^4 - u^4$, welcher ebenfalls ein Quadrat seyn muß; da nun dieser auch eine Differenz zweyer Biquadrate ist, welche viel kleiner sind, als die ersten, so erhält hierdurch der vorige Beweis seine völlige Stärke, so daß, wenn auch in den größten Zahlen die Differenz zweyer Biquadrate ein Quadrat wäre, daraus immer kleinere dergleichen Differenzen gefunden werden könnten, ohne gleichwohl auf die zwey offenbaren Fälle zu kommen; daher dieses gewiß auch in den größten Zahlen nicht möglich ist.

§. 208.

Der erste Theil dieses Beweises, wo die Zahlen x und y beyde ungerade genommen werden, kann folgendermaaßen abgekürzt werden. Wenn $x^4 - y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte $x^2 = p^2 + q^2$ und $y^2 = p^2 - q^2$ seyn, wo von den Buchstaben p und q der eine gerade, der andere aber ungerade wäre; alsdann aber würde $x^2 y^2 = p^4 - q^4$, folglich müßte $p^4 - q^4$ auch ein Quadrat seyn, welches eine Differenz zweyer solcher Biquadrate ist, von welchen das eine gerade, das andere aber ungerade ist; daß dieses aber unmöglich sey, ist in dem zweyten Theile des Beweises gezeigt worden.

§. 209.

Wir haben also diese zwey Hauptsätze bewiesen, daß weder die Summe, noch die Differenz zweyer Biquadrate jemals eine Quadratzahl werden könne, außer in einigen wenigen offenbaren Fällen.

Wenn daher auch andere Formeln, die zu Quadraten gemacht werden sollen, so beschaffen sind, daß entweder eine Summe oder eine Differenz zweyer Biquadrate ein Quadrat werden müßte, so sind diese Formeln ebenfalls nicht möglich. Dieses findet nun

in

in den folgenden Formeln statt, welche wir hier anführen wollen.

I. Ist es nicht möglich, daß die Formel $x^4 + 4y^4$ ein Quadrat werde; denn weil diese Formel eine Summe zweyer Quadrate ist, so müßte $x^2 = p^2 - q^2$ und $2y^2 = 2pq$ oder $y^2 = pq$ seyn; da nun p und q unter sich untheilbar sind, so müßte ein jedes ein Quadrat seyn. Setzt man daher $p = r^2$ und $q = s^2$, so wird $x^2 = r^4 - s^4$; also müßte eine Differenz zweyer Biquadrate ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

II. Ist es auch nicht möglich, daß die Formel $x^4 - 4y^4$ ein Quadrat werde; denn alsdann müßte $x^2 = p^2 + q^2$ und $2y^2 = 2pq$ seyn, weil alsdann $x^4 - 4y^4 = (p^2 - q^2)^2$ herauskäme; da nun $y^2 = pq$, so müßte p und q jedes ein Quadrat seyn; setzt man nun $p = r^2$ und $q = s^2$, so wird $x^2 = r^4 + s^4$; folglich müßte eine Summe zweyer Biquadrate ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

III. Es ist auch nicht möglich, daß die Form $4x^4 - y^4$ ein Quadrat werde, weil alsdann y nothwendig eine gerade Zahl seyn müßte. Nimmt man nun $y = 2z$ an, so würde $4x^4 - 16z^4$ und folglich auch der vierte Theil davon $x^4 - 4z^4$ ein Quadrat seyn müssen, welches nach dem vorigen Fall unmöglich ist.

IV. Es ist auch nicht möglich, daß die Formel $2x^4 + 2y^4$ ein Quadrat werde; denn da dasselbe gerade seyn müßte, und folglich $2x^4 + 2y^4 = 4z^2$ wäre, so würde $x^4 + y^4 = 2z^2$ seyn, und daher $2z^2 + 2x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ und also ein Quadrat. Eben so würde $2z^2 - 2x^2y^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ und also auch ein

Quadrat seyn. Da nun sowohl $2z^2 + 2x^2y^2$ als $2z^2 - 2x^2y^2$ ein Quadrat seyn würde, so müßte auch ihr Product $4z^4 - 4x^4y^4$, und also auch der vierte Theil davon ein Quadrat seyn. Dieser vierte Theil aber ist $z^4 - x^4y^4$ und also eine Differenz zweyer Biquadrate, welches nicht möglich ist.

V. Endlich kann auch die Formel $2x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn; denn da beyde Zahlen x und y nicht gerade sind, weil sie sonst einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, und auch nicht die eine gerade und die andere ungerade, weil sonst der eine Theil durch 4, der andere aber nur durch 2, und also auch die Formel selbst nur durch 2 theilbar seyn würde, so müssen beyde ungerade seyn. Setzt man nun $x = p + q$ und $y = p - q$, so ist die eine von den Zahlen p und q gerade, die andere aber ungerade, und da $2x^4 - 2y^4 = 2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$, so bekömmt man $x^2 + y^2 = 2p^2 + 2q^2 = 2(p^2 + q^2)$ und $x^2 - y^2 = 4pq$; also unsere Formel $16pq(p^2 + q^2)$, deren sechzehnter Theil, nemlich $pq(p^2 + q^2)$, folglich auch ein Quadrat seyn müßte. Da nun die Factoren unter sich untheilbar sind, so müßte ein jeder für sich ein Quadrat seyn. Setzt man nun für die beyden erstern $p = r^2$ und $q = s^2$, so wird der dritte $r^4 + s^4$, welcher auch ein Quadrat seyn müßte; dieses ist aber nicht möglich.

§. 210.

Auf gleiche Weise läßt sich auch beweisen, daß die Formel $x^4 + 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen besteht:

I. Kann

I. Kann x nicht gerade seyn, weil dann y ungerade seyn müßte, und die Formel sich nur durch 2, nicht aber durch 4 würde theilen lassen; daher muß x ungerade seyn.

II. Man setze daher die Quadratwurzel unserer Formel $= x^2 + \frac{2py^2}{q}$, damit diese ungerade werde; so wird $x^4 + 2y^4 = x^4 + \frac{4px^2y^2}{q} + \frac{4p^2y^4}{q^2}$, wo sich die x^4 aufheben, die übrigen Glieder aber durch y^2 dividirt und mit q^2 multiplicirt, geben $4pqx^2 + 4p^2y^2 = 2q^2y^2$, oder $4pqx^2 = 2q^2y^2 - 4p^2y^2$, daraus wird $\frac{x^2}{y^2} = \frac{q^2 - 2p^2}{2pq}$; woraus $x^2 = q^2 - 2p^2$ und $y^2 = 2pq$ folgt, welches eben die Formeln sind, die wir schon oben angegeben haben.

III. Es müßte also $q^2 - 2p^2$ wieder ein Quadrat seyn, welches nicht anders geschehen kann, als wenn $q = r^2 + 2s^2$ und $p = 2rs$ ist; denn da würde $x^2 = (r^2 - 2s^2)^2$; hernach aber würde $4rs(r^2 + 2s^2) = y^2$, und also müßte auch der vierte Theil $rs(r^2 + 2s^2)$ ein Quadrat seyn, und folglich r und s jedes besonders. Setzt man nun $r = t^2$ und $s = u^2$, so wird der dritte Factor $r^2 + 2s^2 = t^4 + 2u^4$, welches auch ein Quadrat seyn müßte.

IV. Wäre daher $x^4 + 2y^4$ ein Quadrat, so würde auch $t^4 + 2u^4$ ein Quadrat seyn, wo die Zahlen t und u weit kleiner wären als x und y; und auf diese Weise würde man immer auf kleinere Zahlen kommen können. Da nun in kleinen Zahlen diese Formel kein Quadrat seyn kann, wie man leicht versuchen kann, so kann dieselbe auch in den größten Zahlen kein Quadrat seyn.

§. 211.

Was hingegen die Formel $x^4 - 2y^4$ betrifft, so kann von derselben nicht bewiesen werden, daß sie kein Quadrat werden könne, und wenn man auf eine ähnliche Art die Rechnung anstellt, so können so gar unendlich viele Fälle gefunden werden, in welchen dieselbe wirklich ein Quadrat wird.

Denn wenn $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat seyn soll, so ist oben gezeigt worden, daß $x^2 = p^2 + 2q^2$ und $y^2 = 2pq$ seyn werde, weil man alsdann $x^4 - 2y^4 = (p^2 - 2q^2)^2$ bekömmt. Da nun auch $p^2 + 2q^2$ ein Quadrat seyn muß, so geschieht dieses, wenn $p = r^2 - 2s^2$ und $q = 2rs$; denn da wird $x^2 = (r^2 + 2s^2)^2$. Allein hier ist wohl zu merken, daß dieses auch geschehen würde, wenn man annähme, daß $p = 2s^2 - r^2$ und $q = 2rs$ sey, daher zwey Fälle hier in Betrachtung kommen.

I. Es sey zuerst $p = r^2 - 2s^2$ und $q = 2rs$, so wird $x = r^2 + 2s^2$; und weil $y^2 = 2pq$, so wird nun $y^2 = 4rs\,(r^2 - 2s^2)$ seyn; und müßten also r und s Quadrate seyn. Man setze deswegen $r = t^2$ und $s = u^2$, so wird $y^2 = 4t^2u^2 (t^4 - 2u^4)$; also $y = 2tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; wenn daher $t^4 - 2u^4$ ein Quadrat ist, so wird auch $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat; ob aber gleich t und u kleinere Zahlen sind als x und y, so kann man doch nicht, wie vorher, schließen, daß $x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, und zwar deswegen, weil man daher auf eine ähnliche Formel in kleinern Zahlen gelangt; denn $x^4 - 2y^4$ kann ein Quadrat seyn, ohne auf die Formel $t^4 - 2u^4$

zu

zu kommen, weil dieses noch auf eine andere Art geschehen kann, nemlich in dem andern Fall, den wir noch zu betrachten haben.

II. Es sey also $p = 2s^2 - r^2$ und $q = 2rs$, so wird zwar, wie vorher, $x^2 = r^2 + 2s^2$, allein für y bekömmt man $y^2 = 2pq = 4rs(2s^2 - r^2)$. Setzt man nun $r = t^2$ und $s = u^2$, so bekömmt man $y^2 = 4t^2u^2(2u^4 - t^4)$, folglich $y = 2tu \sqrt{(2u^4 - t^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; woraus sich ergiebt, daß unsere Formel $x^4 - 2y^4$ auch ein Quadrat werden könne, wenn die Formel $2u^4 - t^4$ ein Quadrat wird. Dieses geschiehet aber offenbar, wenn $t = 1$ und $u = 1$; und daher bekommen wir $x = 3$ und $y = 2$, woraus unsere Formel $x^4 - 2y^4$ wird $81 - 2.16 = 49$.

III. Wir haben auch oben gesehen, daß $2u^4 - t^4$ ein Quadrat werde, wenn $u = 13$ und $t = 1$ ist, weil alsdann $\sqrt{(2u^4 - t^4)} = 239$ ist. Setzt man nun diese Werthe für t und u, so erhalten wir einen neuen Fall für unsere Formel, nemlich $x = 1 + 2.13^4 = 57123$ und $y = 2.13.239 = 6214$.

IV. Sobald man aber Werthe für x und y gefunden hat, so kann man dieselben in den Formeln No. I. für t und u schreiben, wo man dann wieder neue Werthe für x und y erhalten wird.

Weil wir nun $x = 3$ und $y = 2$ gefunden haben, so wollen wir in den No. I. gegebenen Formeln $t = 3$ und $u = 2$ setzen, da dann $\sqrt{(t^4 - 2u^4)} = 7$ wird, so bekommen wir folgende neue Werthe: $x = 81 + 2.16 = 113$ und $y = 2.3.2.7 = 84$. Hieraus erhalten wir $x^2 = 12769$, und $x^4 = 163047361$; ferner $y^2 = 7056$ und $y^4 = 49787136$, daher wird

$x^4 -$

$x^4 - 2y^4 = 63473089$, wovon die Quadratwurzel 7967 ist, welche auch mit der anfänglich angegebenen $p^2 - 2q^2$ völlig übereinstimmt. Denn da $t = 3$ und $u = 2$, so wird $r = 9$ und $s = 4$, daher $p = 81 - 32 = 49$ und $q = 72$, woraus $p^2 - 2q^2 = 2401 - 10368 = -7967$.

XIV. Capitel.

Auflösung einiger Aufgaben, die zu diesem Theile der Analytik gehören.

§. 212.

Wir haben bisher die Kunstgriffe erklärt, welche in diesem Theile der Analytik vorkommen und nöthig sind, um alle diejenigen Aufgaben, welche hieher gehören, aufzulösen; wir wollen daher hier noch einige dergleichen Aufgaben folgen lassen, um dieses in ein desto größeres Licht zu setzen, und auch die Auflösung derselben zugleich hinzufügen.

§. 213.

I. **Man suche eine Zahl, daß, wenn man 1 sowohl dazu addirt, als auch davon subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.**

Setzt man die gesuchte Zahl $= x$, so muß sowohl $x + 1$ als auch $x - 1$ ein Quadrat seyn. Für das erstere setze man $x + 1 = p^2$, so wird $x = p^2 - 1$ und $x - 1 = p^2 - 2$, welches auch ein Quadrat seyn muß. Man nehme an, die Wurzel davon sey $p - q$, so wird $p^2 - 2 = p^2 - 2pq + q^2$, wo sich

die

die p^2 aufheben und daraus $p = \frac{q^2+2}{2q}$ gefunden wird; daraus erhält man ferner $x = \frac{q^4+4}{4q^2}$, wo man q nach Belieben und auch in Brüchen annehmen kann.

Man setze daher $q = \frac{r}{s}$, so erhalten wir $x = \frac{r^4+4s^4}{4r^2s^2}$, wovon wir einige kleinere Werthe anzeigen wollen:

wenn $r =$	1	2	1	3
und $s =$	1	1	2	1
so wird $x =$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$

§. 214.

II. Aufg. Man suche eine Zahl x, daß wenn man dazu 2 beliebige Zahlen, als z. B. 4 und 7 addirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Es müssen also die zwey Formeln $x + 4$ und $x + 7$ Quadrate werden; man setze daher für die erstere $x + 4 = p^2$, so wird $x = p^2 - 4$, die andere Formel aber wird $x + 7 = p^2 + 3$, welche auch ein Quadrat seyn muß. Man setze daher die Wurzel, davon $= p + q$, so wird $p^2 + 3 = p^2 + 2pq + q^2$, woraus $p = \frac{3-q^2}{2q}$, folglich $x = \frac{9-22q^2+q^4}{4q^2}$ gefunden wird. Setzen wir für q einen Bruch, als $\frac{r}{s}$, so bekommen wir $x = \frac{9s^4-22r^2s^2+r^4}{4r^2s^2}$, wo man für r und s alle beliebige ganze Zahlen annehmen kann.

Nimmt man $r = 1$ und $s = 1$, so wird $x = -3$, und daraus wird $x + 4 = 1$ und $x + 7 = 4$. Will

man

man aber eine positive Zahl für x haben, so setze man $s = 2$ und $r = 1$, so bekömmt man $x = \frac{57}{16}$; woraus $x + 4 = \frac{121}{16}$ und $x + 7 = \frac{169}{16}$ wird; will man ferner $s = 3$ und $r = 1$ annehmen, so bekömmt man $x = \frac{133}{9}$, und daraus $x + 4 = \frac{169}{9}$ und $x + 7 = \frac{196}{9}$. Soll das letzte Glied größer seyn als das mittlere, so setze man $r = 5$ und $s = 1$, dann wird $x = \frac{21}{25}$, und daraus $x + 4 = \frac{121}{25}$ und $x + 7 = \frac{196}{25}$.

§. 215.

III. Aufg. Man suche einen solchen Bruch x, daß, wenn man denselben entweder zu 1 addirt oder von 1 subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Da die beyden Formeln $1 + x$ und $1 - x$ Quadrate seyn sollen, so setze man für die erstere $1 + x = p^2$, dann wird $x = p^2 - 1$ und die andere Formel $1 - x = 2 - p^2$, welche ein Quadrat seyn soll. Da nun weder das erste, noch das letzte Glied ein Quadrat ist, so muß man sehen, ob man einen Fall errathen kann, in welchem dieses geschieht; ein solcher fällt aber gleich in die Augen, nemlich $p = 1$, deswegen setze man $p = 1 - q$, so daß $x = q^2 - 2q$, so wird unsere Formel $2 - p^2 = 1 + 2q - q^2$, davon setze man die Wurzel $= 1 - qr$, so bekömmt man $1 + 2q - q^2 = 1 - 2qr + q^2r^2$; hieraus $2 - q = -2r + qr^2$ und $q = \frac{2r + 2}{r^2 + 1}$; hieraus wird $x = \frac{4r - 4r^3}{(r^2+1)^2}$, weil r ein Bruch ist, so setze man $r = \frac{t}{u}$, so wird $x = \frac{4tu^3 - 4t^3u}{(t^2 + u^2)^2} = \frac{4tu(u^2 - t^2)}{(t^2 + u^2)^2}$; also muß u größer seyn als t.

Man setze daher $u = 2$ und $t = 1$, so wird $x = \frac{24}{25}$; setzt man $u = 3$ und $t = 2$, so wird $x = \frac{120}{169}$, und daraus $1 + x = \frac{289}{169}$ und $1 - x = \frac{49}{169}$, welches beydes Quadrate sind.

§. 216.

IV. Aufg. Man suche solche Zahlen x, welche sowohl zu 10 addirt, als von 10 subtrahirt, Quadrate hervorbringen.

Es müssen also die Formeln $10 + x$ und $10 - x$ Quadrate seyn, welches nach der vorigen Methode geschehen könnte. Um aber einen andern Weg zu zeigen, so bedenke man, daß auch das Product dieser Formel ein Quadrat seyn müsse, nemlich $100 - x^2$. Da nun hier das erste Glied schon ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $= 10 - px$, so wird $100 - x^2 = 100 - 20px + p^2x^2$ und also $x = \frac{20p}{p^2+1}$; hieraus aber folgt, daß nur das Product ein Quadrat werde, nicht aber eine jede besonders. Wenn aber nur die eine ein Quadrat wird, so muß die andere nothwendig auch eins seyn; nun aber wird die erste $10 + x = \frac{10p^2 + 20p + 10}{p^2+1} = \frac{10(p^2+2p+1)}{p^2+1}$; und weil $p^2 + 2p + 1$ schon ein Quadrat ist, so muß noch der Bruch $\frac{10}{p^2+1}$ ein Quadrat seyn, folglich auch dieser: $\frac{10p^2+10}{(p^2+1)^2}$. Es ist also nur nöthig, daß die Zahl $10p^2 + 10$ ein Quadrat werde, wo man wieder einen Fall, in welchem es geschieht, errathen muß. Dieser ist, wenn $p = 3$ ist, und deswegen setze man $p = 3 + q$, so bekömmt man $100 + 60q + 10q^2$; davon setze man

man die Wurzel $10 + qt$, so wird $100 + 60q + 10q^2 = 100 + 20qt + q^2t^2$, daraus $q = \frac{60 - 20t}{t^2 - 10}$, daraus $p = 3 + q$, und $x = \frac{20p}{p^2 + 1}$.

Nimmt man $t = 3$, so wird $q = 0$ und $p = 3$, folglich $x = 6$, daher wird $10 + x = 16$ und $10 - x = 4$. Es sey aber $t = 1$, so wird $q = -\frac{49}{9}$ und $p = -\frac{13}{9}$ und $x = -\frac{234}{25}$; es ist aber gleich viel $x = + \frac{234}{25}$ anzunehmen, und dann wird $10 + x = \frac{484}{25}$ und $10 - x = \frac{16}{25}$, welches beydes Quadrate sind.

§. 217.

Anmerkung. Wollte man diese Aufgabe allgemein machen und für eine jede gegebene Zahl a solche Zahlen x verlangen, so, daß sowohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werden sollte, so würde die Auflösung oft unmöglich werden, nemlich in allen Fällen, wo die Zahl a keine Summe zweyer Quadrate ist. Aber wir haben oben gesehen, daß von 1 bis 50 nur die folgenden Zahlen Summen zweyer Quadrate, oder in der Form $x^2 + y^2$ enthalten sind.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

und daß also die übrigen Zahlen, welche gleichfalls bis 50 sind:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, nicht in zwey Quadrate zerlegt werden können; so oft also a eine von diesen letztern Zahlen wäre, so oft würde auch die Aufgabe unmöglich seyn.

Um dieses zu zeigen, so wollen wir annehmen, daß $a + x = p^2$ und $a - x = q^2$ sey, und dann giebt

giebt die Addition $2a = p^2 + q^2$, so daß $2a$ eine Summe zweyer Quadrate seyn muß; ist aber $2a$ eine solche Summe, so muß auch a eine solche seyn; wenn daher a keine Summe zweyer Quadrate ist, so ist es auch nicht möglich, daß $a + x$ und $a - x$ zugleich Quadrate seyn können.

§. 218.

Wäre daher $a = 3$, so würde die Frage unmöglich seyn, und zwar darum, weil 3 keine Summe zweyer Quadrate ist; man könnte zwar einwenden, daß es vielleicht zwey Quadrate in Brüchen gebe, deren Summe 3 ausmachte, allein dieses ist auch nicht möglich, denn wäre $3 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{s^2}$ und man multiplicire mit q^2s^2, so würde $3q^2s^2 = p^2s^2 + q^2r^2$, wo $p^2s^2 + q^2r^2$ eine Summe zweyer Quadrate ist, welche sich durch 3 theilen ließe; wir haben aber oben gesehen, daß eine Summe zweyer Quadrate keine andere Theiler haben könne, als die selbst solche Summen sind.

Es lassen sich zwar die Zahlen 9 und 45 durch 3 theilen, allein sie sind auch durch 9 theibar und so gar ein jedes der beyden Quadrate, aus welchen sie bestehen, weil nemlich $9 = 3^2 + 0^2$, und $45 = 6^2 + 3^2$, welches hier nicht statt findet; daher ist dieser Schluß richtig, daß, wenn eine Zahl a in ganzen Zahlen keine Summe zweyer Quadrate ist, dieses auch nicht in Brüchen statt finden könne; ist aber die Zahl a in ganzen Zahlen eine Summe zweyer Quadrate, so kann sie auch in Brüchen auf unendlich viele Arten eine Summe zweyer Quadrate seyn, welches wir nun noch zeigen wollen.

§. 219.

V. Aufg. Eine Zahl, die eine Summe zweyer Quadrate ist, auf unendlich viele Arten in eine Summe von zweyen andern Quadraten zu zerlegen.

Die gegebene Zahl sey daher $f^2 + g^2$ und man soll zwey andere Quadrate, als x^2 und y^2 suchen, deren Summe $x^2 + y^2$ der Zahl $f^2 + g^2$ gleich sey, so daß $x^2 + y^2 = f^2 + g^2$ sey. Hier zeigt sich nun so gleich, daß, wenn x größer oder kleiner ist als f, y umgekehrt kleiner oder größer seyn müsse als g. Man setze daher $x = f + pz$ und $y = g - qz$, so wird $f^2 + 2fpz + p^2z^2 + g^2 - 2gqz + q^2z^2 = f^2 + g^2$, wo sich die f^2 und g^2 aufheben, die übrigen Glieder aber durch z theilen lassen. Daher wird $2fp + p^2z - 2gq + q^2z = 0$ oder $p^2z + q^2z = 2gq - 2fp$, und also $z = \frac{2gq - 2fp}{p^2 + q^2}$, woraus für x und y folgende Werthe gefunden werden: $x = \frac{2gp + f(q^2 - p^2)}{p^2 + q^2}$ und $y = \frac{2fpq + g(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}$, wo man für p und q alle mögliche Zahlen nach Belieben annehmen kann.

Es sey die gegebene Zahl 2, so daß $f = 1$ und $g = 1$, so wird $x^2 + y^2 = 2$, wenn $x = \frac{2pq + q^2 - p^2}{p^2 + q^2}$ und $y = \frac{2pq + p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$; setzt man $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{7}{5}$.

§. 220.

VI. Aufg. Wenn die Zahl a eine Summe zweyer Quadrate ist, solche Zahlen x zu finden, daß sowohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werde.

Es sey die Zahl $a = 13 = 9 + 4$, und man setze $13 + x = p^2$ und $13 - x = q^2$, so giebt zuerst die Addition $26 = p^2 + q^2$, die Subtraction aber $2x = p^2 - q^2$; also müssen p und q so beschaffen seyn, daß $p^2 + q^2$ der Zahl 26 gleich werde, die auch eine Summe zweyer Quadrate ist, nemlich $25 + 1$, folglich muß diese Zahl 26 in zwey Quadrate zerlegt werden, von welchen das größere für p^2, das kleinere aber für q^2 genommen wird. Hieraus bekömmt man zuerst $p = 5$ und $q = 1$, und daraus wird $x = 12$; hernach aber kann aus dem obigen die Zahl 26 noch auf unendlich verschiedene Arten in zwey Quadrate aufgelöset werden. Denn weil $f = 5$ und $g = 1$, und wenn wir in den obigen Formeln statt der Buchstaben p und q, t und u setzen, für x und y aber die Buchstaben p und q, so finden wir $p = \frac{2tu + 5(u^2 - t^2)}{t^2 + u^2}$ und $q = \frac{10tu + t^2 - u^2}{t^2 + u^2}$. Nimmt man nun für t und u Zahlen nach Belieben an, und bestimmt daraus die Buchstaben p und q, so erhält man die gesuchte Zahl $x \frac{p^2 - q^2}{2}$.

Es sey z. B. $t = 2$ und $u = 1$, so wird $p = \frac{11}{5}$ und $q = \frac{23}{5}$; und daher $p^2 - q^2 = \frac{408}{25}$ und $x = \frac{204}{25}$.

§. 221.

Um aber diese Frage allgemein aufzulösen, so sey die gegebene Zahl $a = c^2 + d^2$, die gesuchte aber $= z$, so daß die Formeln $a + z$ und $a - z$ Quadrate werden sollen.

Nun setze man $a + z = x^2$ und $a - z = y^2$, so wird zuerst $2a = 2(c^2 + d^2) = x^2 + y^2$, und hernach $2z = x^2 - y^2$. Es müssen also die Quadrate x^2 und y^2 so beschaffen seyn, daß $x^2 + y^2 = 2(c^2 + d^2)$, wo $2(c^2 + d^2)$ auch eine Summe zweyer Quadrate ist, nemlich $(c+d)^2 + (c-d)^2$. Man setze der Kürze wegen $c+d = f$ und $c-d = g$, so daß $x^2 + y^2 = f^2 + g^2$ seyn muß; dieses geschieht aber aus dem obigen, wenn man $x = \frac{2gpq + f(q^2 - p^2)}{p^2 + q^2}$ und $y = \frac{2fpq + g(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}$ annimmt; hieraus bekömmt man die leichteste Auflösung, wenn man $p = 1$ und $q = 1$ setzt, denn hieraus wird $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$ und $y = f = c + d$, und hieraus folglich $z = 2cd$. Hieraus wird nun offenbar $c^2 + d^2 + 2cd = (c+d)^2$ und $c^2 + d^2 - 2cd = (c-d)^2$. Um eine andere Auflösung zu finden, so sey $p = 2$ und $q = 1$, da wird $x = \frac{7c + 8d}{5}$ und $y = \frac{c - 7d}{5}$, wo sowohl c und d, als x und y negativ genommen werden können, weil nur ihre Quadrate vorkommen. Da nun x größer seyn soll als y, so nehme man d negativ, und dann wird $x = \frac{c + 7d}{5}$ und $y = \frac{7c - d}{5}$. Hieraus folgt $z = \frac{24d^2 + 14cd - 24c^2}{25}$, welcher Werth zu $a = c^2 + d^2$ addirt, $\frac{c^2 + 14cd + 49d^2}{25}$ giebt, wovon die Quadratwurzel $\frac{c + 7d}{5}$ ist. Subtrahirt man aber z von a, so bleibt $\frac{49c^2 - 14cd + d^2}{25}$, wovon die Quadratwurzel $\frac{7c - d}{5}$ ist; jene ist nemlich x, diese aber y.

§. 222.

VII. Aufg. Man suche eine Zahl x, daß, wenn sowohl zu derselben selbst als zu zu ihrem Quadrate x^2, eins addirt wird, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme.

Es müssen also die beyden Formeln $x + 1$ und $x^2 + 1$ zu Quadraten gemacht werden. Man setze daher für die erste $x + 1 = p^2$, so wird $x = p^2 - 1$, und die zweyte Formel $x^2 + 1 = p^4 - 2p^2 + 2$, welche Formel ein Quadrat seyn soll: diese ist aber von der Art, daß man keine Auflösung finden kann, wenn nicht schon ein Fall bekannt ist; ein solcher Fall aber fällt sogleich in die Augen, nemlich wenn $p = 1$. Man setze daher $p = 1 + q$, so wird $x^2 + 1 = 1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4$, welches auf vielen Arten zu einem Quadrate gemacht werden kann.

I. Man setze zuerst die Wurzel davon $1 + q^2$, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 + 2q^2 + q^4$, daraus wird $4q + 4q^2 = 2q$ oder $4 + 4q = 2$ und $q = -\frac{1}{2}$, folglich $p = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{3}{4}$.

II. Nimmt man die Wurzel $1 - q^2$ an, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 - 2q^2 + q^4$, und daher $q = -\frac{3}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$, hieraus $x = -\frac{3}{4}$ wie vorher.

III. Setzt man die Wurzel $1 + 2q + q^2$, damit sich die ersten und die zwey letzten Glieder aufheben, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q + 6q^2 + 4q^3 + q^4$, daraus wird $q = -2$ und $p = -1$, daher $x = 0$.

IV. Man kann aber auch die Wurzel $1 - 2q - q^2$ setzen, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 - 4q + 2q^2 + 4q^3 + q^4$, daraus wird $q = -2$ wie vorher.

V. Damit die zwey ersten Glieder einander aufheben, so sey die Wurzel $1 + 2q^2$, dann wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q^2 + 4q^4$, und daraus $q = \frac{4}{3}$ und $p = \frac{7}{3}$; folglich $x = \frac{40}{9}$, woraus $x + 1 = \frac{49}{9} = (\frac{7}{3})^2$ und $x^2 + 1 = \frac{1681}{81} = (\frac{41}{9})^2$ folgt.

Wollte man noch mehrere Werthe für q finden, so müßte man einen von diesen hier gefundenen, z. B. $-\frac{1}{2}$ nehmen, und ferner $q = -\frac{1}{2} + 1$ annehmen; daraus aber würde $p = \frac{1}{2} + r$; $p^2 = \frac{1}{4} + r + r^2$ und $p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}r^2 + 2r^3 + r^4$, folglich unsere Formel $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}r^2 + 2r^3 + r^4$, welche ein Quadrat seyn soll, und daher auch mit 16 multiplicirt, nemlich $25 - 24r - 8r^2 + 32r^3 + 16r^4$. Davon setze man nun:

I. Die Wurzel $= 5 + fr \pm 4r^2$, so daß $25 - 24r - 8r^2 + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40r^2 \pm 8fr^3 + 16r^4 + f^2r^2$. Da nun die ersten und letzten Glieder wegfallen, so bestimme man f so, daß auch die zweyten wegfallen; dieses geschieht, wenn $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$ ist; alsdann geben die übrigen Glieder durch r^2 dividirt $-8 + 32r = \pm 40 + f^2 \pm 8fr$. Für das obere Zeichen hat man $-8 + 32r = 40 + f^2 + 8fr$, und daraus $r = \frac{48 + f^2}{32 - 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = \frac{21}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$ und $x = \frac{561}{400}$, daraus wird $x + 1 = (\frac{31}{20})^2$, und $x^2 + 1 = (\frac{689}{400})^2$.

II. Gilt aber das untere Zeichen, so wird $-8 + 32r = -40 + f^2 - 8fr$, und daraus $r = \frac{f^2 - 32}{32 + 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = -\frac{41}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$, woraus die vorige Gleichung entsteht.

III. Es sey die Wurzel $4r^2 + 4r \pm 5$, so daß $16r^4 + 32r^3 - 8r^2 - 24r + 25 = 16r^4 +$

$32r^3$

$32r^3 \underset{+\,16r^2}{\pm 40r^2} \pm 40r + 25$: wo die zwey ersten und die ganz letzten Glieder wegfallen, die übrigen aber durch r dividirt, geben $-8r - 24 = \pm 40r + 16r \pm 40$, oder $-24r - 24 = \pm 40r \pm 40$. Wenn das obere Zeichen gilt, so wird $-24r - 24 = 40r + 40$, oder $0 = 64r + 64$, oder $0 = r + 1$, das ist $r = -1$ und $p = -\frac{1}{2}$, welchen Fall wir schon gehabt haben; und eben derselbe folgt auch aus dem untern Zeichen.

IV. Man setze die Wurzel $5 + fr + gr^2$ und bestimme f und g so, daß die drey ersten Glieder wegfallen. Da nun $25 - 24r - 8r^2 + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr + \underset{+\,f^2r^2}{10gr^2} + 2fgr^3 + g^2r^4$, so wird zuerst $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$, ferner $-8 = 10g + f^2$, und also $g = \frac{-8-f^2}{10}$, oder $g = -\frac{344}{250} = -\frac{172}{125}$; die beyden letzten Glieder aber durch r^3 dividirt, geben $32 + 16r = 2fg + g^2r$ und daraus $r = \frac{2fg-32}{16-g^2}$. Hier wird der Zähler $2fg - 32 = \frac{+24.172-32.625}{5.125} = \frac{-32.496}{625}$, oder dieser Zähler $= \frac{-16.32.31}{625}$; der Nenner aber giebt $16 - g^2 = (4-g)(4+g) = \frac{328}{125}.\frac{672}{125}$, oder $16 - g^2 = \frac{8.32.41.21}{25.625}$; daraus wird $r = -\frac{1550}{861}$, hieraus $p = -\frac{2730}{1722}$, und hieraus wird ein neuer Werth für x, nemlich $x = p^2 - 1$, gefunden.

§. 223.

VIII. Aufg. Zu drey gegebenen Zahlen a, b und c eine solche Zahl x zu finnen, welche zu einer jeden derselben addirt, ein Quadrat hervorbringe.

Es müssen also folgende drey Formeln zu Quadraten gemacht werden, nemlich $x + a$, $x + b$, und $x + c$.

Man setze für die erstere $x + a = z^2$, so daß $x = z^2 - a$, so werden die beyden andern Formeln $z^2 + b - a$ und $z^2 + c - a$, wovon eine jede ein Quadrat seyn soll. Hiervon aber läßt sich keine allgemeine Auflösung geben, weil solches sehr oft unmöglich ist, und die Möglichkeit beruht einzig und allein auf der Beschaffenheit der beyden Zahlen $b - a$ und $c - a$. Denn wäre z. B. $b - a = 1$ und $c - a = - 1$, das ist $b = a + 1$ und $c = a - 1$, so müßten $z^2 + 1$ und $z^2 - 1$ Quadrate werden, und z ohne Zweifel ein Bruch seyn. Man setze daher $z = \frac{p}{q}$, so würden folgende zwey Formeln Quadrate seyn müssen: $p^2 + q^2$ und $p^2 - q^2$, folglich müßte auch ihr Product $p^4 - q^4$ ein Quadrat seyn, daß aber dieses nicht möglich sey, ist schon oben gezeigt worden.

Wäre ferner $b - a = 2$, und $c - a = - 2$, das ist $b = a + 2$ und $c = a - 2$, so müßten, wenn man wiederum $z = \frac{p}{q}$ annähme, die zwey Formeln $p^2 + 2q^2$ und $p^2 - 2q^2$ Quadrate werden, folglich auch ihr Prnduct $p^4 - 4q^4$, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Man setze überhaupt $b - a = m$ und $c - a = n$, ferner auch $z = \frac{p}{q}$, so müssen die Formeln $p^2 + mq^2$ und

und $p^2 + nq^2$ Quadrate seyn, welches, wie wir eben gesehen haben, unmöglich ist, wenn entweder $m = +1$ und $n = -1$, oder wenn $m = +2$ und $n = -2$ ist.

Es ist auch ferner nicht möglich, wenn $m = f^2$ und $n = -f^2$ ist. Denn alsdann würde das Product derselben $p^4 - f^4q^4$ eine Differenz zweyer Biquadrate seyn, welche niemals ein Quadrat werden kann.

Eben so, wenn $m = 2f^2$ und $n = -2f^2$, so können auch die Formeln $p^2 + 2f^2q^2$ und $p^2 - 2f^2q^2$ nicht beyde Quadrate werden, weil ihr Product $p^4 - 4f^4q^4$ auch ein Quadrat seyn müßte; folglich, wenn man $fq = r$ annähme, die Formel $p^4 - 4r^4$, wovon die Unmöglichkeit auch oben gezeigt worden.

Wäre ferner $m = 1$ und $n = 2$, so daß die Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 2q^2$ Quadrate seyn müßten, so setze man $p^2 + q^2 = r^2$ und $p^2 + 2q^2 = s^2$; dann wird aus der erstern $p^2 = r^2 - q^2$, und also die andere $r^2 + q^2 = s^2$; daher müßte sowohl $r^2 - q^2$ als $r^2 + q^2$ ein Quadrat seyn; und auch ihr Product $r^4 - q^4$ müßte ein Quadrat seyn, welches unmöglich ist.

Hieraus zeigt sich nun hinlänglich, daß es nicht leicht sey, solche Zahlen für m und n zu wählen, daß die Auflösung möglich werde. Das einzige Mittel, solche Werthe für m und n zu finden, ist, daß man dergleichen Fälle errathe, oder auf solche Weise aufzufinden suche.

Nimmt man $f^2 + mg^2 = h^2$ und $f^2 + ng^2 = k^2$ an, so bekömmt man aus der erstern $m = \frac{h^2 - f^2}{g^2}$, und aus der andern $n = \frac{k^2 - f^2}{g^2}$. Nimmt man nun für f, g, h und k Zahlen nach Belieben an, so bekömmt man für m und n solche Werthe, in welchen die Auflösung möglich ist.

Es sey z. B. $h = 3$, $k = 5$, $f = 1$ und $g = 2$; so wird $m = 2$ und $n = 6$. Jetzt sind wir versichert, daß es möglich sey, die zwey Formeln $p^2 + 2q^2$ und $p^2 + 6q^2$ zu Quadraten zu machen, weil solches geschieht, wenn $p = 1$ und $q = 2$ ist. Die erste aber wird auf eine allgemeine Art ein Quadrat, wenn $p = r^2 - 2s^2$ und $q = 2rs$; denn alsdann wird $p^2 + 2q^2 = (r^2 + 2s^2)^2$. Die andere Formel aber wird alsdann $p^2 + 6q^2 = r^4 + 20r^2s^2 + 4s^4$, wovon ein Fall bekannt ist, in welchem dieselbe ein Quadrat wird, nemlich wenn $p = 1$ und $q = 2$, und dieses geschieht, wenn $r = 1$ und $s = 1$, oder wenn überhaupt $r = s$; denn alsdann wird unsere Formel $25s^4$. Da wir nun diesen Fall wissen, so setzen wir $r = s + t$, so wird $r^2 = s^2 + 2st + t^2$ und $r^4 = s^4 + 4s^3t + 6s^2t^2 + 4st^3 + t^4$; daher unsere Formel seyn wird: $25s^4 + 44s^3t + 26s^2t^2 + 4st^3 + t^4$; von dieser sey die Wurzel $5s^2 + fst + t^2$, wovon das Quadrat $25s^4 + 10fs^3t + 10s^2t^2 + 2fst^3 + f^2s^2t^2 + t^4$ ist, wo sich die ersten und letzten Glieder von selbst aufheben. Man nehme nun f so an, daß sich auch die letzten ohne eins aufheben, welches geschieht, wenn $4 = 2f$ und $f = 2$; alsdann geben die übrigen, durch s^2t dividirt, die Gleichung $44s + 26t = 10fs + 10t + f^2t = 20s + 14t$, oder $2s = -t$ und $\frac{s}{t} = -\frac{1}{2}$, daher wird $s = -1$ und $t = 2$, oder $t = -2s$, folglich $r = -s$ und $r^2 = s^2$, welches der bekannte Fall selbst ist.

Man nehme f so an, daß sich die zweyten Glieder aufheben; dieses geschieht, wenn $44 = 10f$, oder $f = \frac{22}{5}$, wo dann die übrigen Glieder, durch

st^2 dividirt, $26s + 4t = 10s + f^2s + 2ft$ geben, das ist $-\frac{84}{25}s = \frac{24}{5}t$, folglich $t = -\frac{7}{10}s$ und also $r = s + t = \frac{3}{10}s$, oder $\frac{r}{s} = \frac{3}{10}$; daher $r = 3$, und $s = 10$; hieraus bekommen wir $p = 2s^2 - r^2 = 191$ und $q = 2rs = 60$, woraus unsere Formeln $p^2 + 2q^2 = 43681 = 209^2$, und $p^2 + 6q^2 = 58081 = 241^2$ werden.

§. 224.

Anmerkung. Dergleichen Zahlen für m und n, wo sich unsere Formeln zu Quadraten machen lassen, können nach der obigen Art noch mehrere gefunden werden. Es ist aber zu merken, daß das Verhältniß dieser Zahlen m und n nach Belieben angenommen werden kann. Es sey dieses Verhältniß wie a zu b, und man setze $m = az$ und $n = bz$, so kömmt es nun darauf an, wie man z bestimmen soll, damit die beyden Formeln $p^2 + azq^2$ und $p^2 + bzq^2$ zu Quadraten gemacht werden können? Wir wollen dieses in der folgenden Aufgabe zeigen.

§. 225.

IX. Aufg. **Wenn a und b gegebene Zahlen sind, die Zahl z zu finden, daß sich die beyden Formeln $p^2 + azq^2$ und $p^2 + bzq^2$ zu Quadraten machen lassen, und zugleich die kleinsten Werthe für p und q zu bestimmen.**

Man nehme $p^2 + azq^2 = r^2$ und $p^2 + bzq^2 = s^2$, und multiplicire die erstere mit b, die andere aber mit a, so giebt die Differenz derselben die Gleichung $(b - a)p^2 = br^2 - as^2$ und also $p^2 = \frac{br^2 - as^2}{b - a}$, welche Formel daher ein Quadrat seyn muß. Da

nun

nun dieses geschieht, wenn $r = s$, so setze man, um die Brüche wegzubringen, $r = s + (b - a)t$, so wird $p^2 = \frac{br^2 - as^2}{b - a} = \frac{bs^2 + 2b(b - a)st + b(b - a)^2t^2 - as^2}{b - a}$ $= \frac{(b - a)s^2 + 2b(b - a)st + b(b - a)^2t^2}{b - a} = s^2 + 2bst + b(b - a)t^2$. Nun setze man $p = s + \frac{x}{y}t$, so wird $p^2 = s^2 + \frac{2x}{y} \cdot st + \frac{x^2}{y^2}t^2 = s^2 + 2bst + b(b - a)t^2$, wo sich die s^2 aufheben, die übrigen Glieder aber durch t dividirt und mit y^2 multiplicirt, geben: $2bsy^2 + b(b - a)ty^2 = 2sxy + tx^2$, daraus $t = \frac{2sxy - 2bsy^2}{b(b - a)y^2 - x^2}$, daher $\frac{t}{s} = \frac{2xy - 2by^2}{b(b - d)y^2 - x^2}$. Hieraus bekömmt man $t = 2xy - 2by^2$ und $s = b(b - a)y^2 - x^2$; ferner $r = 2(b - a)xy - b(b - a)y^2 - x^2$, und daraus $p = s + \frac{x}{y} \cdot t = b(b - a)y^2 + x^2 - 2bxy = (x - by)^2 - aby^2$. Da wir nun p nebst r und s gefunden haben, so ist nur noch übrig z zu suchen. Man subtrahire zu dem Ende die erste Gleichung $p^2 + azq^2 = r^2$ von der andern $p^2 + bzq^2 = s^2$, so giebt der Rest $zq^2(b - a) = s^2 - r^2 = (s + r) \cdot (s - r)$. Da nun $s + r = 2(b - a)xy - 2x^2$ und $s - r = 2b(b - a)y^2 - 2(b - a)xy$; oder $s + r = 2x((b - a)y - x)$ und $s - r = 2(b - a)y(by - x)$, so wird

$(b - a)zq^2 = 2x((b - a)y - x) \cdot 2(b - a)y(by - x)$ oder

$zq^2 = 2x((b - a)y - x) \cdot 2y(by - x)$ oder

$zq^2 = 4xy((b - a)y - x)(by - x)$; folglich

$$z = \frac{4xy((b - a)y - x)(by - x)}{q^2}.$$

Daher für q^2 das größte Quadrat genommen werden muß, durch welches sich der Zähler theilen läßt; für

für p aber haben wir schon $p = b(b - a)y^2 + x^2 - 2bxy = (x - by)^2 - aqy^2$ gefunden, woraus man sieht, daß diese Formeln leichter und einfacher werden, wenn man $x = y + by$ oder $x - by = y$ annimmt; denn alsdann wird $p = v^2 - aby^2$, und $z = \frac{4(v+by).y.v(v+ay}{q^2}$ oder $z = \frac{4vy(v+by)(v+ay)}{q^2}$, wo die Zahlen v und y nach Belieben angenommen werden können, und alsdann findet man zuerst q^2, indem dafür das größte Quadrat genommen wird, welches in dem Zähler enthalten ist, woraus sich sodann z ergiebt; wo dann $m = az$ und $n = bz$, endlich aber $p = v^2 - aby^2$ wird; und hieraus bekömmt man die gesuchten Formeln.

I. $p^2 + azq^2 = (v^2 - aby^2)^2 + 4avy(v + ay)(v + by)$, welche ein Quadrat ist, von welchen die Wurzel $r = - v^2 - 2avy - aby^2$ ist.

II. Die zweyte Formel aber wird $p^2 + bzq^2 = (v^2 - aby^2)^2 + 4bvy(v + ay)(v + by)$, welches auch ein Quadrat ist, wovon die Wurzel $s = - v^2 - 2bvy - aby^2$, wo die Werthe von r und s auch positiv genommen werden können; es wird gut seyn dieses noch mit einigen Beyspielen zu erläutern.

§. 226.

I. Beyspiel: Es sey $a = -1$ und $b = +1$, und man suche Zahlen für z, so daß die beyden Formeln $p^2 - zq^2$ und $p^2 + zq^2$ Quadrate werden können; die erstere nemlich $= r^2$, und die andere $= s^2$.

Hier wird $p = v^2 + y^2$ und man hat also, um z zu finden, die Formel $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{q^2}$ zu betrachten, wo wir dann für v und y verschiedene Zahlen annehmen und daraus für z die Werthe suchen wollen, wie hier folgt:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
$v-y$	1	1	3	1	7	7
$v+y$	3	5	5	9	25	9
zq^2	4.6	4.30	16.15	9.16.5	36.25.16.7	16.9.14
q^2	4	4	16	9.16	36.25.16	16.9
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

woraus folgende Formeln aufgelöset und zu Quadraten gemacht werden können.

I. Können die zwey Formeln $p^2 - 6q^2$ und $p^2 + 6q^2$ zu Quadraten gemacht werden; dieses geschieht, wenn $p = 5$ und $q = 2$. Denn alsdann wird die erste $= 25 - 24 = 1$; und die andere $= 25 + 24 = 49$.

II. Können auch folgende zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden: $p^2 - 30q^2$ und $p^2 + 30q^2$, welches geschieht, wenn $p = 13$ und $q = 2$; denn alsdann wird die erste $= 169 - 120 = 49$, die andere aber $= 169 + 120 = 289$.

III. Kann man auch die beyden Formeln $p^2 - 15q^2$ und $p^2 + 15q^2$ zu Quadraten machen, welches geschieht, wenn $p = 17$ und $q = 4$; denn alsdann wird die erste $= 289 - 240 = 49$, und die andere $289 + 240 = 529$.

IV. Können auch folgende zwey Formeln Quadrate werden: $p^2 - 5q^2$ und $p^2 + 5q^2$; dieses geschieht, wenn $p = 41$ und $q = 12$, denn alsdann wird die erste $1681 - 720 = 961 = 31^2$, die andere aber $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. Kann man auch die beyden Formeln $p^2 - 7q^2$ und $p^2 + 7q^2$ zu Quadraten machen; dieses geschieht, wenn $p = 337$ und $q = 120$; denn dann wird die erste $113569 - 100800 = 12769 = 113^2$, und die andere $113569 + 100800 = 214369 = 463^2$.

VI. Können auch die zwey Formeln $p^2 - 14q^2$ und $p^2 + 14q^2$ zu Quadraten gemacht werden; welches geschieht, wenn $p = 65$ und $q = 12$; denn alsdann wird die erste $4225 - 2016 = 2209 = 47^2$, und die andere $4225 + 2016 = 6241 = 79^2$.

§. 227.

II. Beyspiel: Wenn die beyden Zahlen m und n sich verhalten wie 1 : 2, das ist, wenn $a = 1$ und $b = 2$, also $m = z$ und $n = 2z$, so sollen die Werthe für z gefunden werden, so daß die Formeln $p^2 + zq^2$ und $p^2 + 2zq^2$ zu Quadraten gemacht werden können.

Man hat nicht nöthig hier die obigen allgemeinen Formeln zu gebrauchen, sondern dieses Beyspiel kann sogleich auf das vorige gebracht werden. Denn nimmt man $p^2 + zq^2 = r^2$ und $p^2 + 2zq^2 = s^2$ an, so bekömmt man aus der ersten $p^2 = r^2 - zq^2$, welcher Werth für p^2 in der zweyten gesetzt, $r^2 + zq^2 = s^2$ giebt; folglich müssen die zwey Formeln $r^2 - zq^2$ und $r^2 + zq^2$ zu Quadraten gemacht werden können, welches der Fall des vorigen Beyspiels ist. Also hat man auch hier für z folgende Werthe: 6, 30, 15, 5, 7, 14, u. s. f.

Eine solche Verwandlung kann auch allgemein angestellt werden. Wenn wir annehmen, daß die beyden Formeln $p^2 + mq^2$ und $p^2 + nq^2$ zu Quadraten gemacht werden können, so wollen wir setzen $p^2 + mq^2 = r^2$ und $p^2 + nq^2 = s^2$; dann giebt die erstere $p^2 = r^2 - mq^2$, und also die zweyte $s^2 = r^2 - mq^2 + nq^2$ oder $r^2 + (n - m)q^2 = s^2$;

wenn

wenn daher die erstern Formeln möglich sind, so sind auch diese $r^2 - mq^2$ und $r^2 + (n - m)q^2$ möglich; und da wir m und n unter sich verwechseln können, so sind auch die Formeln $r^2 - nq^2$ und $r^2 + (m - n)q^2$ möglich, sind aber jene Formeln unmöglich, so sind auch diese unmöglich.

§. 228.

III. Beyspiel. Es seyen die Zahlen m und n wie 1 : 3, oder $a = 1$ und $b = 3$, also $m = z$ und $n = 3z$, so daß die Formeln $p^2 + zq^2$ und $p^2 + 3zq^2$ zu Quadraten gemacht werden sollen.

Weil hier $a = 1$ und $b = 3$ ist, so wird die Sache möglich, so oft $zq^2 = 4vy(v + y)(v + 3y)$, und $p = v^2 - 3y^2$ ist. Man nehme daher für v und y folgende Werthe an:

	I.	II.	III	IV.	V.
v	1	8	4	1	16
y	1	2	1	8	9
v + y	2	5	5	9	25
v + 3y	4	9	7	25	43
zq^2	16.2	4.9.30	4.4.35.	4.9.25.4.2	4.9.16.25.43
q^2	16	4.9	4.4	4.4.9.25	4.9.16.25
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Hier haben wir nun zwey Fälle für $z = 2$, aus welchen wir auf zweyerley Art die Formeln $p^2 + 2q^2$ und $p^2 + 6q^2$ zu Quadraten machen können; zuerst geschieht es, wenn $p = 2$ und $q = 4$ ist, folglich auch, wenn $p = 1$ und $q = 2$; denn alsdann wird $p^2 + 2q^2 = 9$ und $p^2 + 6q^2 = 25$. Hernach geschieht es auch, wenn $p = 191$ und $q = 60$, denn alsdann wird $p^2 + 2q^2 = (209)^2$ und $p^2 + 6q^2 = (241)^2$. Ob aber nicht auch $z = 1$ seyn könnte, welches geschehen würde, wenn für zq^2 ein Quadrat

heraus

heraus käme, ist schwer zu entscheiden. Wollte man nun die Frage erörtern, ob die zwey Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? so könnte man die Untersuchung auf folgende Art anstellen.

§. 229.

Man soll also untersuchen, ob die zwey Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? Man setze $p^2 + q^2 = r^2$ und $p^2 + 3q^2 = s^2$, so sind folgende Puncte zu bemerken.

I. Können die Zahlen p und q als untheilbar unter sich angesehen werden; denn wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, so würden die Formeln noch Quadrate bleiben, wenn p und q dadurch getheilt würde.

II. Kann p keine gerade Zahl seyn; denn dann würde q ungerade, und also die zweyte Formel eine Zahl von dieser Art: $4n + 3$ seyn, welche kein Quadrat werden kann; daher ist p nothwendig ungerade, und p^2 eine Zahl von dieser Art: $8n + 1$.

III. Da nun p ungerade ist, so muß aus der ersten Form q nicht nur gerade, sondern sogar durch 4 theilbar seyn, damit q^2 eine Zahl von der Art $16n$ werde; und $p^2 + q^2$ von dieser Art $8n + 1$.

IV. Ferner kann p nicht durch 3 theilbar seyn; denn da würde p^2 sich durch 9 theilen lassen, q^2 aber nicht, folglich $3q^2$ nur durch 3, nicht aber durch 9, und also auch $p^2 + 3q^2$ durch 3, nicht aber durch 9, und daher kein Quadrat seyn; folglich kann die Zahl p nicht durch 3 theilbar seyn, daher p^2 von der Art $3n + 1$ seyn wird.

V. Da sich p nicht durch 3 theilen läßt, so muß sich q durch 3 theilen lassen: denn wäre q nicht durch 3 theilbar, so wäre q^2 eine Zahl von der Art $3n + 1$, und daher $p^2 + q^2$ von dieser Art $3n + 2$, welche kein Quadrat seyn kann: folglich muß q durch 3 theilbar seyn.

VI. Auch kann p nicht durch 5 theilbar seyn; denn wäre dieses der Fall, so wäre q nicht durch 5 theilbar und q^2 eine Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$, also $3q^2$ eine Zahl von der Art $5n + 3$ oder $5n + 2$, und von welcher Art auch $p^2 + 3q^2$ seyn würde, so könnte diese Formel doch kein Quadrat seyn; daher denn p nothwendig nicht durch 5 theilbar seyn kann, und also p^2 eine Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$ seyn muß.

VII. Da nun p nicht durch 5 theilbar ist, so wollen wir sehen, ob sich q durch 5 theilen lasse oder nicht? Wäre q nicht durch 5 theilbar, so wäre q^2 von dieser Art $5n + 2$ oder $5n + 3$, wie wir gesehen haben, und da p^2 entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$, so würde $p^2 + 3q^2$ entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$ eben wie p^2 seyn; es sey $p^2 = 5n + 1$, so müßte $q^2 = 5n + 4$ seyn, weil sonst $p^2 + q^2$ kein Quadrat seyn könnte; alsdann aber wäre $3q^2 = 5n + 2$, und $p^2 + 3q^2 = 5n + 3$, welches kein Quadrat seyn kann; wäre aber $p^2 = 5n + 4$, so müßte $q^2 = 5n + 1$ und $3q^2 = 5n + 3$ seyn, folglich $p^2 + 3q^2 = 5n + 2$, welches auch kein Quadrat seyn kann; woraus denn folgt, daß q^2 durch 5 theilbar seyn müsse.

VIII. Da nun q zuerst durch 4, hernach durch 3, und drittens auch durch 5 theilbar seyn muß, so muß q eine solche Zahl seyn: $4 \cdot 3 \cdot 5m$, oder $q = 60m$; daher unsere Formeln seyn würden: $p^2 + 3600m^2 = r^2$ und $p^2 + 10800m^2 = s^2$; wo denn die erste von der zweyten subtrahirt, giebt $7200m^2 = s^2 - r^2 = (s+r)(s-r)$; so daß $s+r$ und $s-r$ Factoren von $7200m^2$ seyn müssen; wobey zu bemerken ist, daß sowohl s als r ungerade Zahlen, und dabey unter sich untheilbar seyn müssen.

IX. Es sey daher $7200m^2 = 4fg$ oder die Factoren davon $2f$ und $2g$, und man setze $s + r = 2f$ und $s - r = 2g$, so wird $s = f + g$, und $r = f - g$; wo dann f und g unter sich untheilbar seyn müssen, und die eine gerade und die andere ungerade. Da nun $fg = 1800m^2$, so muß man $1800m^2$ in zwey Factoren zerlegen, deren einer gerade, der andere aber ungerade sey, beyde aber unter sich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

X. Ferner ist auch noch zu bemerken, daß, da $r^2 = p^2 + q^2$ und also r ein Theiler von $p^2 + q^2$ ist, die Zahl $r = f - g$ auch eine Summe von zweyen Quadraten seyn, und weil dieselbe ungerade ist, in der Form $4n + 1$ enthalten seyn müsse.

XI. Nehmen wir erstlich $m = 1$ an, so wird $fg = 1800 = 8 . 9 . 25$, woraus folgende Zerlegungen entstehen: $f = 1800$ und $g = 1$, oder $f = 200$ und $g = 9$, oder $f = 72$ und $g = 25$, oder $f = 225$ und $g = 8$; aus dem ersten wird $r = f - g = 1779 = 4n + 3$; nach der andern würde $r = f - g = 191 = 4n + 3$; nach der dritten würde $r = f - g = 47 = 4n + 3$; nach der vierten aber $r = f - g = 217 = 4n + 1$; daher die drey ersten wegfallen, und nur die vierte übrig bleibt; woraus man überhaupt

 schließen

schließen kann, daß der größere Factor ungerade, der kleinere aber gerade seyn müsse; aber hier kann auch der Werth $r = 217$ nicht statt finden, weil sich diese Zahl durch 7 theilen läßt, die keine Summe von zwey Quadraten ist.

XII. Nimmt man $m = 2$, so wird $fg = 7200 = 32 . 225$, daher nimmt man $t = 225$ und $g = 32$, so daß $r = f - g = 193$, welche Zahl wohl eine Summe von zwey Quadraten ist und also verdient versucht zu werden. Da nun $q = 120$ und $r = 193$, so wird, weil $p^2 = r^2 - q^2 = (r + q) . (r - q)$, also $r + q = 313$ und $r - q = 73$, also sieht man wohl, daß für p^2 kein Quadrat herauskomme, weil diese Factoren keine Quadrate sind. Wollte man sich die Mühe geben für m noch andere Zahlen zu nehmen, so würde doch alle Arbeit vergeblich seyn, wie wir noch zeigen wollen.

§. 230.

Lehrsatz. Es ist nicht möglich, daß die zwey Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ zugleich Quadrate werden; oder in den Fällen, da die eine ein Quadrat wird, ist die andere niemals eines.

Dieses läßt sich auf folgende Art beweisen:

Da p ungerade und q gerade ist, wie wir gesehen haben, so kann $p^2 + q^2$ nicht anders ein Quadrat seyn, als wenn $q = 2rs$ und $p = r^2 - s^2$ ist; die andere aber $p^2 + 3q^2$ kann nicht anders ein Quadrat seyn, als wenn $q = 2tu$ und $p = t^2 - 3u^2$ oder $p = 3u^2 - t^2$ ist. Weil nun in beyden Fällen q ein doppeltes Product seyn muß, so setze man für beyde $q = 2abcd$ und nehme für die erste $r = ab$ und $s = cd$; für die andere aber $t = ac$ und $u = bd$,

so

so wird für die erstere $p = a^2b^2 - c^2d^2$, für die andere aber $p = a^2c^2 - 3b^2d^2$, oder $p = 3b^2d^2 - a^2c^2$, welche beyde Werthe einerley seyn müssen; daher bekommen wir entweder $a^2b^2 - c^2d^2 = a^2c^2 - 3b^2d^2$, oder $a^2b^2 - c^2d^2 = 3b^2d^2 - a^2c^2$; wobey zu bemerken ist, daß die Zahlen a, b, c und d überhaupt kleiner sind als p und q. Wir müssen also einen jeden dieser beyden Fälle besonders betrachten; aus dem ersten erhalten wir $a^2b^2 + 3b^2d^2 = a^2c^2 + c^2d^2$ oder $b^2(a^2 + 3d^2) = c^2(a^2 + d^2)$, daraus wird $\frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+d^2}{a^2+3d^2}$, welcher Bruch ein Quadrat seyn muß. Hier kann aber der Zähler und Nenner keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben als 2, weil die Differenz zwischen beyden $2d^2$ ist. Sollte daher 2 ein gemeinschaftlicher Theiler seyn, so müßte sowohl $\frac{a^2+d^2}{2}$ als auch $\frac{a^2+3d^2}{2}$ ein Quadrat seyn, beyde Zahlen aber a und d sind in diesem Fall ungerade und also ihre Quadrate von der Form $8n + 1$, daher die letztere Formel $\frac{a^2+3d^2}{2}$ die Form $4n + 2$ haben wird und kein Quadrat seyn kann. Folglich kann 2 kein gemeinschaftlicher Theiler seyn, sondern der Zähler $a^2 + d^2$ und der Nenner $a^2 + 3d^2$ sind unter sich untheilbar; daher ein jeder für sich ein Quadrat seyn muß. Weil nun diese Formeln den ersten ähnlich sind, so folgt, daß, wenn die ersten Quadrate wären, auch in kleinern Zahlen ähnliche Formeln Quadrate seyn würden; also kann man hinwiederum schließen, daß, da man in kleinern Zahlen keine Quadrate gefunden hat, es auch nicht in den größten Zahlen dergleichen geben kann.

Dieser Schluß ist aber nur in so fern richtig, als auch der obige zweyte Fall $a^2b^2 - c^2d^2 = 3b^2d^2 - a^2c^2$

— a^2c^2 auf dergleichen führt; hieraus aber wird $a^2b^2 + a^2c^2 = 3b^2d^2 + c^2d^2$, oder $a^2(b^2+c^2) = d^2(3b^2+c^2)$, und daher $\frac{a^2}{d^2} = \frac{b^2+c^2}{3b^2+c^2} = \frac{c^2+b^2}{c^2+3b^2}$, welcher Bruch ein Quadrat seyn muß, so daß dadurch der vorige Schluß vollkommen bestätiget wird; denn wenn es in den größten Zahlen solche Fälle gäbe, in welchen $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ Quadrate wären, auch dergleichen in den kleinsten Zahlen vorhanden seyn müßten, welches doch nicht statt findet.

§. 231.

XII. Aufg. **Man soll drey solche Zahlen finden x, y und z, so daß, wenn je zwey mit einander multiplicirt werden und zum Product 1 addirt wird, ein Quadrat herauskomme.**

Es müssen also folgende drey Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy + 1$; II. $xz + 1$; III. $yz + 1$.

Man setze für die beyden letztern $xz + 1 = p^2$ und $yz + 1 = q^2$, so findet man daraus $x = \frac{p^2-1}{z}$ und $y = \frac{q^2-1}{z}$, woraus die erste Formel wird $\frac{(p^2-1)(q^2-1)}{z^2} + 1$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch mit z^2 multiplicirt, das ist $(p^2-1)(q^2-1) + z^2$, welche leicht dazu gemacht werden kann. Denn setzt man die Wurzel davon $= z + r$, so bekömmt man $(p^2-1)(q^2-1) = 2rz + r^2$, und daher $z = \frac{(p^2-1)(q^2-1) - r^2}{2r}$, wo für p, q und r beliebige Zahlen angenommen werden können.

Es

Es sey z. B. $r = -pq - 1$, so wird $r^2 = p^2q^2 + 2pq + 1$ und $z = \frac{-2pq - p^2 - q^2}{-2pq - 2} = \frac{p^2 + 2pq + q^2}{2pq + 2}$, folglich $x = \frac{(p^2 - 1)(2pq + 2)}{pq + 2pq + q^2} = \frac{2(pq + 1)(p^2 - 1)}{(p + q)^2}$, und $y = \frac{2(pq + 1)(q^2 - 1)}{(p + q)^2}$.

Will man aber ganze Zahlen haben, so setze man für die erste Formel $xy + 1 = p^2$ und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweyte Formel $x^2 + xy + xq + 1 = x^2 + qx + p^2$; die dritte aber wird $xy + y^2 + qy + 1 = y^2 + qy + p^2$, welche offenbar Quadrate werden, wenn man $q = \pm 2p$ annimmt, denn da wird die zweyte $x^2 \pm 2px + p^2$, von welcher die Wurzel $x \pm p$ ist, die dritte aber wird $y^2 \pm 2py + p^2$, davon die Wurzel $y \pm p$ ist; daher haben wir folgende sehr schöne Auflösung: $xy + 1 = p^2$ oder $xy = p^2 - 1$, welches für eine jede Zahl, die nur immer für p angenommen werden mag, leicht geschehen kann; und hernach ist die dritte Zahl auf eine doppelte Art entweder $z = x + y + 2p$ oder $z = x + y - 2p$, welches wir durch folgende Beyspiele erläutern wollen:

I. Man nehme $p = 3$, so wird $p^2 - 1 = 8$: nun setze man $x = 2$ und $y = 4$, so wird entweder $z = 12$ oder $z = 0$; und also sind die drey gesuchten Zahlen 2, 4 und 12.

II. Es sey $p = 4$, so wird $p^2 - 1 = 15$; nun nehme man $x = 5$ und $y = 3$, so wird $z = 16$ oder $z = 0$; und sind die drey gesuchten Zahlen 3, 5 und 16.

III. Es sey $p = 5$, so wird $p^2 - 1 = 24$; nun nehme man $x = 3$ und $y = 8$, so wird $z = 21$, oder auch $z = 1$; woraus folgende Zahlen entstehen, als: entweder 1, 3 und 8, oder 3, 8 und 21.

§. 232.

XIII. Aufg. Man suche drey ganze Zahlen x, y und z, so daß, wenn zu dem Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmal ein Quadrat herauskomme.

Es müssen also folgende drey Formeln Quadrate werden: I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$. Nun setze man für die erste $xy + a = p^2$, und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweyte $x^2 + xy + xq + a = x^2 + xq + p^2$ und die dritte $xy + y^2 + yq + a = y^2 + qy + p^2$, welche beyde Quadrate werden, wenn $q = \pm 2p$ ist; so daß $z = x + y \pm 2p$, und daher für z zwey Werthe gefunden werden können.

§. 233.

XIV. Aufg. Man verlangt vier ganze Zahlen x, y, z und v, so daß, wenn zu dem Producte aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmal ein Quadrat herauskomme.

Es müssen also folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$; IV. $xv + a$; V. $yv + a$; VI. $zv + a$. Nun setze man für die erste $xy + a = p^2$ und nehme $z = x + y + 2p$, so wird die zweyte und dritte Formel ein Quadrat. Ferner nehme man $v = x + y - 2p$, so wird auch die vierte und die fünfte ein Quadrat, und es bleibt also nur noch die sechste übrig, welche $x^2 + 2xy + y^2 - 4p^2 + a$ seyn wird und ein Quadrat seyn muß. Da nun $p^2 = xy + a$ ist, so wird die letzte Formel $x^2 - 2xy + y^2$

— 3a,

$-3a$, folglich müssen noch folgende zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy + a = p^2$ und II. $(x-y)^2 - 3a$. Von der letztern sey die Wurzel $(x-y) - q$, so wird $(x-y)^2 - 3a = (x-y)^2 - 2q(x-y) + q^2$, und dann wird $-3a = -2q(x-y) + q^2$ und folglich $x - y = \frac{q^2+3a}{2q}$ oder $x = y + \frac{q^2+3a}{2q}$; hieraus wird $p^2 = y^2 + \frac{q^2+3a}{2q}y + a$. Man nehme $p = y + r$, so wird $2ry + r^2 = \frac{q^2+3a}{2q}y + a$, oder $4qry + 2qr^2 = (q^2+3a)y + 2aq$, oder $2qr^2 - 2aq = (q^2+3a)y - 4qry$ und $y = \frac{2qr^2 - 2aq}{q^2+3a-4qr}$, wo q und r nach Belieben angenommen werden können, und es also nur noch darauf ankömmt, daß für x und y ganze Zahlen herauskommen. Denn weil $p = y + r$ ist, so werden auch z und v ganze Zahlen seyn. Hier kömmt es aber hauptsächlich auf die Beschaffenheit der gegebenen Zahl a an, wo es mit den ganzen Zahlen noch einige Schwierigkeit haben könnte; allein es ist zu bemerken, daß diese Auflösung schon dadurch sehr eingeschränkt ist, daß den Buchstaben z und v die Werthe $x + y \pm 2p$ gegeben worden, indem diese nothwendig noch viele andere haben könnten. Wir wollen zu dem Ende über diese Frage noch folgende Betrachtungen anstellen, die auch in andern Fällen ihren Nutzen haben können.

I. Wenn $xy + a$ ein Quadrat seyn soll und also $xy = p^2 - a$ ist, so müssen die Zahlen x und y immer in der ähnlichen Form $r^2 - as^2$ enthalten seyn; wenn wir daher $x = b^2 - ac$ und $y = d^2 - ae^2$ annehmen, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Ist nun be —

$ed = \pm 1$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a$, und also $xy + a = (bd - ace)^2$.

II. Nehmen wir nun ferner $z = f^2 - ag^2$ und die Zahlen f und g so an, daß $bg - cf = \pm 1$ und auch $dg - ef = \pm 1$, so werden auch die Formeln $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Es kömmt also nur darauf an, solche Zahlen für b, c und d, e und auch für f und g zu finden, daß die obige Eigenschaft erfüllt werde.

III. Wir wollen diese drey Paar Buchstaben durch folgende Brüche vorstellen: $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, welche daher so beschaffen seyn müssen, daß die Differenz zwischen je zweyen durch einen Bruch ausgedrückt werde, dessen Zähler $= 1$ ist. Denn da $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be - dc}{ce}$ ist, so muß dessen Zähler, wie wir gesehen haben, allerdings ± 1 seyn. Man kann hier einen von diesen Brüchen nach Belieben annehmen, und leicht einen andern dazu finden, so daß die angezeigte Bedingung statt finde.

Es sey z. B. der erste $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, so muß der zweyte $\frac{d}{e}$ diesem beynahe gleich seyn. Es sey $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, so wird die Differenz $z = \frac{1}{6}$. Man kann auch diesen zweyten Bruch aus dem ersten auf eine allgemeine Art bestimmen; denn da $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e}$, so muß $3e - 2d = 1$, also $2d = 3e - 1$ und $d = e + \frac{e - 1}{2}$ seyn. Man nehme daher $\frac{e - 1}{2} = m$ oder $e = 2m + 1$, so bekommen wir $d = 3m + 1$ und unser

unser zweyter Bruch wird seyn: $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. Eben so kann auch zu einem jeglichen ersten Bruche der zweyte gefunden werden, wovon wir folgende Beyspiele hinzufügen wollen.

$\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Hat man zwey solche Brüche für $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{e}$ gefunden, so ist es ganz leicht, dazu einen dritten $\frac{f}{g}$ zu finden, welcher mit den beyden ersten in gleichem Verhältnisse steht. Man darf nur $f = b + d$ und $g = c + e$ annehmen, so daß $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, denn da aus den zwey ersten $be - cd = \pm 1$ ist, so wird $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\mp 1}{c^2+ce}$. Eben so wird auch der zweyte weniger den dritten $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be-cd}{c^2+ce} = \frac{\pm 1}{ce+e^2}$.

V. Hat man nun drey solche Brüche gefunden $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, so kann man daraus sogleich unsere Frage für drey Zahlen x, y und z auflösen, so daß die drey Formeln $xy + a$, $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Denn man darf nur $x = b^2 - ac^2$, $y = d^2 - ae^2$ und $z = f^2 - ag^2$ annehmen. Man nehme z. B. aus der obigen Tafel $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$ und $\frac{d}{e} = \frac{7}{4}$, so

wird

wird $\frac{f}{c} = \frac{12}{7}$; hieraus erhält man $x = 25 - 9a$, $y = 49 - 16a$ und $z = 144 - 49a$; denn alsdann wird $xy + a = 1225 - 840a + 144a^2 = (35 - 12a)^2$; ferner wird $xz + a = 3600 - 2520a + 441a^2 = (60 - 21a)^2$ und $yz + a = 7056 - 4704a + 784a^2 = (64 - 28a)^2$.

§. 234.

Sollen aber nach dem Inhalt der Frage vier dergleichen Zahlen, x, y, z und v gefunden werden, so muß man zu den drey obigen Brüchen noch einen vierten hinzufügen. Es seyen daher die drey erstern $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, und man setze den vierten Bruch $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$, so daß er mit dem zweyten und dritten in dem gehörigen Verhältnisse stehe; wenn man nun annimmt, daß $x = b^2 - a^2c^2$; $y = d^2 - ae^2$; $z = f^2 - ag^2$ und $v = h^2 - ak^2$ sey, so werden schon folgende Bedingungen erfüllt: I. $xy + a = \square$ *); II. $xz + a = \square$; III. $yz + a = \square$; IV. $yv + a = \square$; V. $zv + a = \square$; es ist also nur noch übrig, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde, welches von selbst nicht geschieht, weil der erste Bruch mit dem vierten nicht in dem gehörigen Verhältnisse steht. Es ist daher nöthig in den drey ersten Brüchen noch die unbestimmte Zahl m beyzubehalten, und diese so zu bestimmen, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde.

VI. Man nehme daher aus der obigen Tabelle den ersten Fall und setze $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, und $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$, so

*) $\square$ deutet hier jedesmal eine Quadratzahl an.

so wird $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$ und $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$. Hieraus wird $x = 9 - 4a$ und $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$, also $xv + a = 9(6m+5)^2 - 4a(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2 + 4a^2(4m+4)^2$ oder $xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288m^2 + 538m + 243) + 4a^2(4m+4)^2$, welche leicht zu einem Quadrate gemacht werden kann, weil m^2 mit einem Quadrate multiplicirt ist; wobey wir uns aber nicht aufhalten wollen.

VII. Man kann auch solche Brüche als dergleichen nöthig sind auf eine allgemeinere Art anzeigen; denn es sey $\frac{b}{c} = \frac{1}{1}$, $\frac{d}{e} = \frac{nl-1}{n}$, so wird $\frac{f}{g} = \frac{nl+l-1}{n+1}$ und $\frac{g}{k} = \frac{2nl+l-2}{2n+1}$; man setze für den letzten $2n+1 = m$, so wird derselbe $\frac{lm-2}{m}$, folglich aus dem ersten $x = l.$ $- a$ und aus dem letzten $v = (lm-2)^2 - am^2$. Also ist nur noch übrig, daß $vx + a$ ein Quadrat werde. Da nun $v = (ll-a)m^2 - 4lm + 4$ und also $xv + a = (ll-a)^2 m^2 - 4(ll-a)lm + 4ll - 3a$, welches ein Quadrat seyn muß; von diesem setze man nun die Wurzel $(ll-a)m - p$, wovon das Quadrat $(ll-a)^2 m^2 - 2(ll-a)mp + p^2$, woraus wir $-4(ll-a)lm + 4ll - 3a = -2(ll-a)mp + p^2$ und $m = \frac{p^2 - 4ll + 3a}{(ll-a)(2p-4l)}$ erhalten. Man nehme $p = 2l + q$, so wird $m = \frac{4lq + q^2 + 3a}{2q(ll-a)}$, wo für l und q beliebige Zahlen angenommen werden können.

Wäre

Wäre z. B. $a = 1$, so nehme man $l = 2$, dann wird $m = \frac{4q + q^2 + 3}{6q}$; setzt man $q = 1$, so wird $m = \frac{4}{3}$ und $m = 2n + 1$; wir wollen aber hierbey nicht weiter stehen bleiben, sondern zur folgenden Frage fortgehen.

§. 235.

XV. Aufg. Man verlangt drey solche Zahlen x, y und z, daß sowohl die Summe als die Differenz von je zweyen ein Quadrat werde.

Es müssen also die folgenden sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $x + y$; II. $x + z$; III. $y + z$; IV. $x - y$; V. $x - z$; VI. $y - z$. Man fange bey den drey letzten an, und nehme $x - y = p^2$, $x - z = q^2$ und $y - z = r^2$ an, so bekommen wir aus den beyden letzten $x = q^2 + z$ und $y = r^2 + z$, daher die erstere $x - y = q^2 - r^2 = p^2$, oder $q^2 = p^2 + r^2$ giebt, so daß die Summe der Quadrate $p^2 + r^2$ ein Quadrat seyn muß, nemlich q^2; dieses geschieht, wenn $p = 2ab$ und $r = a^2 - b^2$ ist, denn alsdann wird $q = a^2 + b^2$. Wir wollen aber indessen die Buchstaben p, q und r beybehalten und die drey erstern Formeln betrachten, wo dann zuerst $x + y = q^2 + r^2 + 2z$; zweytens $x + z = q^2 + 2z$; drittens $y + z = r^2 + 2z$. Man setze für die erstere $q^2 + r^2 + 2z = t^2$, so ist $2z = t^2 - q^2 - r^2$; daher denn noch folgende Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen: $t^2 - r^2 = \square$ und $t^2 - q^2 = \square$, das ist $t^2 - (a^2 - b^2)^2 = \square$ und $t^2 - (a^2 + b^2)^2 = \square$, welche folgende Gestalt annehmen: $t^2 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2$ und $t^2 - a^4 - b^4 - 2a^2b^2$; weil nun sowohl $c^2 + d^2 + 2cd$ als $c^2 + d^2 - 2cd$ ein Quadrat ist, so sieht man,

daß

daß wir unsern Zweck erreichen, wenn wir $t^2 - a^4 - b^4$ mit $c^2 + d^2$ und $2a^2b^2$ mit $2cd$ vergleichen. Um dieses zu bewerkstelligen, so wollen wir $cd = a^2b^2 = f^2g^2h^2k^2$ setzen und $c = f^2g^2$ und $d = h^2k^2$ annehmen; $a^2 = f^2h^2$ und $b^2 = g^2k^2$ oder $a = fh$ und $b = gk$, woraus die erstere Gleichung $t^2 - a^4 - b^4 = c^2 + d^2$ die Form $t^2 - f^4h^4 - g^4k^4 = f^4g^4 + h^4k^4$ erhält und also $t^2 = f^4g^4 + f^4h^4 + h^4k^4 + g^4k^4$, das ist $t^2 = (f^4 + k^4)(g^4 + h^4)$, welches Product also ein Quadrat seyn muß, wovon aber die Auflösung schwer fallen dürfte.

Wir wollen daher auf eine andere Art verfahren, und aus den drey erstern Gleichungen $x - y = p^2$; $x - z = q^2$; $y - z = r^2$ die Buchstaben y und z bestimmen, welche $y = x - p^2$ und $z = x - q^2$ seyn werden, so daß $q^2 = p^2 + r^2$. Nun werden die ersten Formeln $x + y = 2x - p^2$, $x + z = 2x - q^2$; und $y + z = 2x - p^2 - q^2$; für diese letzte setze man $2x - p^2 - q^2 = t^2$, so daß $2x = t^2 + p^2 + q^2$ und nur noch die Formeln $t^2 + q^2$ und $t^2 + q^2$ übrig bleiben, welche zu Quadraten gemacht werden müssen. Da nun aber $q^2 = p^2 + r^2$ seyn muß, so setze man $q = a^2 + b^2$, und $p = a^2 - b^2$, so wird $r = 2ab$; hieraus werden unsere Formeln seyn:

I. $t^2 + (a^2 + b^2)^2 = t^2 + a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = \Box$

II. $t^2 + (a^2 - b^2)^2 = t^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = \Box$.

Vergleichen wir nun hier nochmals $t^2 + a^4 + b^4$ mit $c^2 + d^2$, und $2a^2b^2$ mit $2cd$, so erreichen wir unsern Zweck: wir nehmen daher, wie oben, $c = f^2g^2$, $d = h^2k^2$ und $a = fh$, $b = gk$ an, so wird $cd = a^2b^2$, und $t^2 + f^4h^4 + g^4k^4$ muß noch $= c^2 + d^2 = f^4g^4 + h^4k^4$ seyn, woraus $t^2 = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4)$ folgt. Es kömmt also darauf an, daß zwey Differenzen zwischen zweyen Biquadraten gefunden werden, als

$f^4 - k^4$

$f^4 - k^4$ und $g^4 - h^4$, welche mit einander multiplicirt, ein Quadrat machen.

Wir wollen zu dem Ende die Formel $m^4 - n^4$ betrachten und zusehen, welche Zahlen daraus entspringen, wenn für m und n gegebene Zahlen angenommen werden, und dabey die Quadrate, so darin enthalten sind, besonders bemerken. Weil nun $m^4 - n^4 = (m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$ ist, so wollen wir daraus folgende Tafel anfertigen:

Tabelle
für die Zahlen, welche in der Form $m^4 - n^4$ enthalten sind

m^2	n^2	$m^2 - n^2$	$m^2 + n^2$	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3.5
9	1	8	10	16.5
9	4	5	13	5.13
16	1	15	17	3.5.17
16	9	7	25	25.7
25	1	24	26	16.3.13
25	9	16	34	16.2.17
49	1	48	50	25.16.2.3
49	16	33	65	3.5.11.13
64	1	63	65	9.5.7.13
81	49	32	130	64.5.13
121	4	117	125	25.9.5.13
121	9	112	130	16.2.5.7.13
121	49	72	170	144.5.17
144	25	119	169	169.7.17
169	1	168	170	16.3.5.7.17
169	81	88	250	25.16.5.11
225	64	161	289	289.7.23

Hieraus können wir schon einige Auflösungen geben: man nehme nemlich $f^2 = 9$ und $k^2 = 4$, so

wird

wird $f^4 - k^4 = 13.5$; ferner nehme man $g^2 = 81$ und $h^2 = 49$, so wird $g^4 - h^4 = 64.5.13$, woraus $t^2 = 64.25.169$; folglich $t = 520$. Da nun $t^2 = 270400$; $f = 3$, $g = 9$; $k = 2$; $h = 7$, so bekommen wir $a = 21$; $b = 18$; hieraus $p = 117$, $q = 765$ und $r = 756$; daraus findet man $2x = t^2 + p^2 + q^2 = 869314$ und also $x = 434657$; daher ferner $y = x - p^2 = 420968$; und endlich $z = x - q^2 = -150568$, welche Zahl auch positiv genommen werden kann, weil alsdann die Summe in die Differenz und umgekehrt die Differenz in die Summe verwandelt wird; folglich sind unsere drey gesuchten Zahlen.

$$x = 434657$$
$$y = 420968$$
$$z = 150568$$

daher wird $x + y = 855625 = (925)^2$
$$x + z = 585225 = (765)^2$$
$$y + z = 571536 = (756)^2$$

und weiter $x - y = 13689 = (117)^2$
$$x - z = 284089 = (533)^2$$
$$y - z = 270400 = (520)^2$$

Noch andere Zahlen können aus der vorstehenden Tabelle gefunden werden, wenn wir $f^2 = 9$, $k^2 = 4$, und $g^2 = 121$, $h^2 = 4$ annehmen; denn daraus wird $t^2 = 13.5.5.13.9.25. = 9.25.25.169$, so daß $t = 3.5.5.13 = 975$. Weil nun $f = 3$, $g = 11$, $k = 2$ und $h = 2$, so wird $a = fh = 6$ und $b = gk = 22$; hieraus wird $p = a^2 - b^2 = -448$, $q = a^2 + b^2 = 520$ und $r = 2ab = 264$, daher bekommen wir $2x = t^2 + p^2 + q^2 = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729$, daher $x = \frac{1421729}{2}$, daraus $y = x$

$-p^2 = \frac{1020321}{2}$ und $z = x - q^2 = 880929$.
Nun ist zu merken, daß, wenn diese Zahlen die gesuchte Eigenschaft haben, eben dieselben durch ein jegliches Quadrat multiplicirt, diese nemliche Eigenschaft behalten müssen. Man nehme also die gefundenen Zahlen viermal größer, so werden die drey folgenden gleichfalls ein Genüge leisten: $x = 2843458$, $y = 2040642$, und $z = 1761858$, welche größer sind als die vorhergehendrn, so daß jene für die möglichst kleinsten gehalten werden können.

§. 236.

XVI. Aufg. **Man verlangt drey Quadratzahlen, so daß die Differenz zwischen zweyen ein Quadrat werde.**

Die vorige Auflösung dient uns auch dazu, um diese aufzulösen. Denn wenn x, y und z solche Zahlen sind, daß die Formeln I. $x + y$, II. $x - y$, III. $x + z$, IV. $x - z$, V. $y + z$, VI. $y - z$ Quadrate werden, so wird auch das Prodact aus der ersten und zweyten $x^2 - y^2$ ein Quadrat, imgleichen auch das Product von der dritten und vierten $x^2 - z^2$, und endlich auch das Product aus der fünften und sechsten $y^2 - z^2$ ein Quadrat seyn, daher die drey hier gesuchten Quadrate x^2, y^2 und z^2 seyn werden. Allein diese Zahlen werden sehr groß, und es giebt ohne Zweifel weit kleinere, weil es eben nicht nöthig ist, daß, um $x^2 - y^2$ zu einem Quadrate zu machen, auch $x + y$ und $x - y$ ein jedes besonders ein Quadrat seyn müsse, indem z. B. $25 - 9$ ein Quadrat ist, da doch weder $5 + 3$ noch $5 - 3$ ein Quadrat ist. Wir wollen also diese Frage besonders auflösen und zuerst bemerken, daß

für

für das eine Quadrat 1 gesetzt werden kann. Denn wenn $x^2 - y^2$, $x^2 - z^2$ und $y^2 - z^2$ Quadrate sind, so bleiben dieses auch Quadrate, wenn sie durch z^2 dividirt werden; daher folgende Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen, nemlich $\frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} = \square$, $\frac{x^2}{z^2} - 1 = \square$, und $\frac{y^2}{z^2} - 1 = \square$.

Also kömmt es nur auf die zwey Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ an; nimmt man nun $\frac{x}{z} = \frac{p^2+1}{p^2-1}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2+1}{q^2-1}$, so werden die beyden letztern Bedingungen erfüllt; denn alsdann wird $\frac{x^2}{z^2} - 1 = \frac{4p^2}{(p^2-1)^2}$ und $\frac{y^2}{z^2} - 1 = \frac{4q^2}{(q^2-1)^2}$. Es ist also nur noch übrig die erste Formel zu einem Quadrate zu machen, welche

$$\frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} = \frac{(p^2+1)^2}{(p^2-1)^2} - \frac{(q^2+1)^2}{(q^2-1)^2} = \left(\frac{p^2+1}{p^2-1} + \frac{q^2+1}{q^2-1}\right)\left(\frac{p^2+1}{p^2-1} - \frac{q^2+1}{q^2-1}\right)$$

ist. Hier wird nun der erste Factor $= \frac{2(p^2q^2-1)}{(p^2-1)(q^2-1)}$, der andere aber $= \frac{2(q^2-p^2)}{(p^2-1)(q^2-1)}$, von welchen das Product $\frac{4(p^2q^2-1)(q^2-p^2)}{(p^2-1)^2(q^2-1)^2}$ ist. Weil nun der Nenner schon ein Quadrat und der Zähler mit dem Quadrat 4 multiplicirt ist, so ist noch nöthig die Formel $(p^2q^2 - 1)(q^2 - p^2)$, oder auch die Formel $(p^2q^2 - 1)\left(\frac{q^2}{p^2} - 1\right)$ zu einem Quadrate zu machen; dieses geschieht, wenn $pq = \frac{f^2+g^2}{2fg}$ und $\frac{q}{p} = \frac{h^2+k^2}{2hk}$ angenommen wird, wo alsdann ein jeder Factor besonders ein Quadrat wird. Hieraus ist nun $q^2 = \frac{f^2+g^2}{2fg} \cdot \frac{h^2+k}{2hk}$; folglich müssen diese zwey Brüche mit einander multiplicirt, ein Quadrat ausmachen, und so auch, wenn sie mit $4f^2g^2 \cdot h^2k^2$ multiplicirt werden, das ist $fg(f^2+g^2)$ $hk(h^2+k^2)$; welche Formel derjenigen, die im vorigen gefunden worden, vollkommen ähnlich wird, wenn man $f = a+b$, $g = a-b$, $h = c+d$ und $k = c-d$ setzt, alsdann kömmt $2(a^4-b^4)$. $2(c^4-d^4) = 4(a^4-b^4)(c^4-d^4)$, welches, wie wir gesehen haben, geschieht, wenn $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $c^2 = 81$ und $d^2 = 49$, oder $a = 3$, $b = 2$, $c = 9$ und $d = 7$. Hieraus wird $f = 5$, $g = 1$, $h = 16$ und $k = 2$, und daher $pq = \frac{13}{5}$ und $\frac{q}{p} = \frac{260}{24} = \frac{65}{16}$; diese zwey Gleichungen mit einander multiplicirt, geben $q^2 = \frac{65.13}{16.5} = \frac{13.13}{16}$, folglich $q = \frac{13}{4}$, daher wird $p = \frac{4}{5}$; dadurch bekommen wir $\frac{x}{z} = \frac{p^2+1}{p^2-1} = -\frac{41}{9}$ und $\frac{y}{z} = -\frac{q^2+1}{q^2-1} = \frac{185}{153}$. Da nun $x = -\frac{41z}{9}$ und $y = \frac{185z}{153}$, so nehme man, um ganze Zahlen zu bekommen, $z = 153$, dann wird $x = -697$ und $y = 185$, folglich sind die drey gesuchten Quadratzahlen folgende:

$x^2 = 485809$; denn alsdann wird $x^2 - y^2 = 451584 = (672)^2$
$y^2 = 34225$; — — $y^2 - z^2 = 10816 = (104)^2$
$z^2 = 23409$; — — $x^2 - z^2 = 462400 = (680)^2$

welche Quadrate viel kleiner sind, als wenn wir von den in der vorigen Aufgabe gefundenen drey Zahlen x, y und z die Quadrate hätten nehmen wollen.

§. 237.

Man wird hier einwenden, daß diese Auflösung durch ein bloßes Probiren gefunden worden, indem uns dazu die obige Tabelle behülflich gewesen sey. Wir haben uns aber dieses Mittels nur bedient, um die kleinste Auflösung zu finden; wollte man aber nicht darauf sehen, so können durch Hülfe der oben gegebenen Regeln unendlich viele Auflösungen angegeben werden. Da es nemlich bey der letztern Frage darauf ankömmt, daß das Product $(p^2q^2 - 1)\left(\frac{q^2}{p^2} - 1\right)$ zu einem Quadrate gemacht werde, weil alsdann $\frac{x}{z} = \frac{p^2+1}{p^2-1}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2+1}{q^2-1}$ seyn wird, so setze man $\frac{q}{p} = m$ oder $q = mp$, wo dann unsere Formel $(m^2p^4 - 1)(m^2 - 1)$ seyn wird, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn $p = 1$ ist; und dieser Werth wird uns auf andere führen, wenn wir $p = 1 + s$ annehmen, alsdann aber muß die Formel $(m^2 - 1).(m^2 - 1 + 4m^2s + 6m^2s^2 + 4m^2s^3 + m^2s^4)$ ein Quadrat seyn und also auch, wenn sie durch das Quadrat $(m^2 - 1)^2$ dividirt wird, wo dann $1 + \frac{4m^2s}{m^2-1} + \frac{6m^2s^2}{m^2-1} + \frac{4m^2s^3}{m^2-1} + \frac{m^2s^4}{m^2-1}$ herauskömmt. Man setze hier der Kürze wegen $\frac{m^2}{m^2-1} = a$, so daß die Formel $1 + 4as + 6as^2 + 4as^3 + as^4$ ein Quadrat werden soll. Es sey die Wurzel desselben $1 + fs + gs^2$, deren Quadrat $1 + 2fs + 2gs^2 + f^2s^2 + 2fgs^3 + g^2s^4$ ist, und man bestimme f und g so, daß die drey ersten Glieder wegfallen, welches geschieht, wenn $4a = 2f$ oder $f = 2a$, und $6a = 2g + f^2$, folglich $g = \frac{6a - f^2}{2}$

$= 3a - 2a^2$, so geben die beyden letzten Glieder die Gleichung $4a + as = 2fg + g^2s$, woraus $s = \frac{4a-2fg}{g^2-a} = \frac{4a-12a^2+8a^3}{4a^4-12a^3+9a^2-a}$ gefunden wird, das ist $s = \frac{4-12a+8a^2}{4a^3-12a^2+9a-1}$, welcher Bruch durch $a-1$ abgekürzt, $\frac{4(2a-1)}{4a^2-8a+1}$ giebt. Dieser Werth giebt uns schon unendlich viele Auflösungen, weil die Zahl m, aus welcher hernach $a = \frac{m^2}{m^2-1}$ entstanden, nach Belieben genommen werden kann, welches durch einige Beyspiele zu erläutern noch nöthig seyn wird.

I. Es sey $m = 2$, so wird $a = \frac{4}{3}$ und daher $s = 4 \cdot \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{23}{9}} = -\frac{60}{23}$, und hieraus $p = -\frac{37}{23}$, folglich $q = -\frac{74}{23}$; endlich $\frac{x}{z} = \frac{240}{420}$ und $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}$.

II. Es sey $m = \frac{3}{2}$, so wird $a = \frac{9}{5}$ und $s = 4 \cdot \frac{\frac{13}{5}}{-\frac{11}{25}} = -\frac{260}{11}$, daher $p = -\frac{249}{11}$ und $q = \frac{747}{22}$: woraus die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ gefunden werden können.

Ein besonderer Fall verdient noch angemerkt zu werden, wenn a ein Quadrat ist, wie dieses geschieht, wenn $m = \frac{5}{3}$, denn alsdann wird $a = \frac{25}{16}$. Man setze wieder der Kürze wegen $a = b^2$, so daß unsere Formel $1 + 4b^2s + 6b^2s^2 + 4b^2s^3 + b^2s^4$ seyn wird; von dieser sey die Wurzel $1 + 2b^2s + bs^2$, deren Quadrat $1 + 4b^2s + 2bs^2 + 4b^4s^2 + 4b^3s^3 + b^2s^4$ ist, wo sich die zwey ersten und die letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s^2 dividirt, geben $6b^2 + 4b^2s = 2b + 4b^4 + 4b^3s$, dar-

daraus $s = \frac{6b^2 - 2b - 4b^4}{4b^3 - 4b^2} = \frac{3b - 1 - 2b^3}{2b^2 - 2b}$; welcher Bruch noch durch $b - 1$ abgekürzt werden kann, wo man dann $s = \frac{1 - 2b - 2b^2}{2b}$ und $p = \frac{1 - 2b^2}{2b}$ erhält.

Man hätte die Wurzel dieser obigen Formel auch $1 + 2bs + bs^2$ annehmen können, von welcher das Quadrat $1 + 4bs + 2bs^2 + 4b^2s^2 + b^2s^3 + b^2s^4$ ist, wo sich die ersten und die beyden letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s dividirt, geben $4b^2 + 6b^2s = 4b + 2bs + 4b^2s$. Da nun $b^2 = \frac{25}{16}$ und $b = \frac{5}{4}$, so bekäme man daraus $s = -2$ und $p = -1$, folglich $p^2 - 1 = 0$; woraus nichts gefunden wird, weil $z = 0$ würde.

Im vorigen Fall aber, da $p = \frac{1 - 2b^2}{2b}$, wenn $m = \frac{5}{3}$ und daher $a = \frac{25}{16} = b^2$, folglich $b = \frac{5}{4}$, so kömmt $p = \frac{17}{20}$ und $q = mp = \frac{17}{12}$, folglich $\frac{x}{z} = \frac{689}{115}$ und $\frac{y}{z}$ $\frac{433}{145}$.

§. 238.

XVII. Aufg. Man verlangt drey Quadratzahlen x^2, y^2 und z^2, so daß die Summe von je zweyen wieder ein Quadrat ausmache.

Da nun die drey Formeln $x^2 + y^2$, $x^2 + z^2$ und $y^2 + z^2$ zu Quadraten gemacht werden sollen, so theile man sie durch z^2, um die drey folgenden zu erhalten: I. $\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \square$, II. $\frac{x^2}{z^2} + 1 = \square$, III. $\frac{y^2}{z^2} + 1 = \square$. Hier geschieht dann den beyden letztern ein Genüge, wenn $\frac{x}{z} = \frac{p^2 - 1}{2p}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 - 1}{2q}$, hieraus wird die erste Formel $\frac{(p^2 - 1)^2}{4p^2} + \frac{(q^2 - 1)^2}{4q^2}$, welches also auch mit 4 multiplicirt, ein Quadrat werden muß, das ist $\frac{(p^2 - 1)^2}{p^2} + \frac{(q^2 - 1)^2}{q^2}$; oder auch mit $p^2 q^2$ multiplicirt, $q^2 (p^2 - 1)^2 + p^2 (q^2 - 1)^2 = \Box$, welches nicht wohl geschehen kann, ohne einen Fall zu wissen, in welchem diese Formel ein Quadrat wird; allein ein solcher Fall läßt sich nicht wohl errathen, daher man zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß, von welchen wir einige anführen wollen.

I. Da sich die Formel auf folgende Art ausdrücken läßt: $q^2 (p + 1)^2 (p - 1)^2 + p^2 (q + 1)^2 (q - 1)^2 = \Box$, so mache man, daß sie sich durch das Quadrat $(p + 1)^2$ theilen lasse; dieses geschieht, wenn man $q - 1 = p + 1$ oder $q = p + 2$ annimmt, wo alsdann $q + 1 = p + 3$ seyn wird, woher unsere Formel wird: $(p + 2)^2 (p + 1)^2 (p - 1)^2 + p^2 (p + 3)^2 (p + 1)^2 = \Box$, welche durch $(p+1)^2$ dividirt, ein Quadrat seyn muß, nemlich $(p + 2)^2 p - 1)^2 + p^2 (p + 3)^2$, welches in die Form $2p^4 + 8p^3 + 6p^2 - 4p + 4$ aufgelöset wird. Weil nun hier das letzte Glied ein Quadrat ist, so nehme man die Wurzel $2 + fp + gp^2$ oder $gp^2 + fp + 2$ an, von welcher das Quadrat $g^2 p^4 + 2fgp^3 + 4gp^2 + f^2 p^2 + 4fp + 4$ ist, wo man f und g so bestimmen muß, daß die drey letzten Glieder wegfallen, welches alsdann geschieht, wenn

$-4 = 4f$, oder $f = -1$ und $6 = 4g + 1$, oder $g = \frac{5}{4}$, wo denn die ersten Glieder, durch p^3 dividirt, $2p + 8 = g^2 p + 2fg = \frac{25}{16}p - \frac{5}{2}$ geben, woraus $p = -24$ und $q = -22$ gefunden wird; daher erhalten wir $\frac{x}{z} = \frac{p^2 - 1}{2p}$ $= -\frac{575}{48}$ oder $x = -\frac{575}{48}z$, und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 - 1}{2q}$ $= \frac{483}{44}$, oder $y = -\frac{483}{44}z$.

Man nehme nun $z = 16.3.11$, so wird $x = 575.11$ und $y = 483.12$; daher sind die Wurzeln von den drey gesuchten Quadraten folgende:

$x = 6325 = 11.23.25$, denn hieraus wird
$x^2 + y^2 = 23^2 (275^2 + 252^2) = 23^2.373^2$
$y = 5796 = 12.21.23$, dieses giebt
$x^2 + z^2 = 11^2 (575^2 + 48^2) = 11^2.577^2$.
$z = 528 = 3.11.16$, hieraus wird
$y^2 + z^2 = 12^2 (483^2 + 44^2) = 12^2.485^2$.

II. Man kann noch auf unendlich viele Arten machen, daß unsere Formel durch ein Quadrat theilbar wird; man setze z. B. $(q + 1)^2 = 4(p + 1)^2$ oder $q + 1 = 2(p + 1)$, das ist $q = 2p + 1$ und $q - 1 = 2p$, woraus unsere Formel wird $(2p+1)^2 (p+1)^2 (p-1)^2 + p^2.4.(p + 1)^2 (4p^2) = \square$, welche durch $(p + 1)^2$ getheilt, giebt $(2p + 1)^2 (p - 1)^2 + 16p^4 = \square$ oder $20p^4 - 4p^3 - 3p^2 + 2p + 1 = \square$, woraus aber nichts gefunden werden kann.

III. Man setze daher $(q - 1)^2 = 4(p + 1)^2$, oder $q - 1 = 2(p + 1$, so wird $q = 2p + 3$ und $q + 1 = 2p + 4$ oder $q + 1 = 2(p+2)$, woher unsere Formel, durch $(p + 1)^2$ getheilt, seyn wird: $(2p + 3)^2 (p - 1)^2 + 16p^2 (p + 2)^2$, das ist $9 - 6p + 53p^2 + 68p^3 +$

 $20p^4$;

$20p^4$; davon sey die Wurzel $3 - p + gp^2$, deren Quadrat $9 - 6p + 6gp^2 + p^2 - 2gp^3 + g^2p^4$ ist. Um nun auch die dritten Glieder verschwinden zu machen, so nehme man $53 = 6g + 1$ oder $g = \frac{26}{3}$, so werden die übrigen Glieder, durch p dividirt, $20p + 68 = g^2p - 2g$ oder $\frac{256}{3} = \frac{496}{9}p$ geben, daher $p = \frac{48}{31}$ und $q = \frac{189}{31}$, woraus wieder eine Auflösung folgt.

IV. Man setze $q - 1 = \frac{4}{3}(p - 1)$, so wird $q = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}$ und $q + 1 = \frac{4}{3}p + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p + 1)$, daher wird unsere Formel, durch $(p - 1)^2$ dividirt, $\frac{(4p-1)^2}{9}(p+1)^2 + \frac{64}{81}p^2(2p+1)^2$ seyn, welche mit 81 multiplicirt, $9(4p - 1)^2 (p + 1)^2 + 64p^2(2p + 1)^2 = 400p^4 + 472p^3 + 73p^2 - 54p + 9$ wird, wo sowohl das erste als das letzte Glied Quadrate sind. Man setze daher die Wurzel $20p^2 - 9p + 3$, von welcher das Quadrat $400p^4 - 360p^3 + 201p^2 + 120p^2 - 54p + 9$ ist und daher erhält man $472p + 73 = -360p + 201$, daher $p = \frac{2}{13}$ und $q = \frac{8}{39} - \frac{1}{3}$.

Man kann auch für die obige Wurzel $20p^2 + 9p - 3$ annehmen, davon das Quadrat $400p^4 + 360p^3 - 120p^2 + 81p^2 - 54p + 9$, mit unserer Formel verglichen, giebt $472p + 73 = 360p - 39$, und daraus $p = -1$, welcher Werth aber zu nichts nützt.

V. Man kann auch machen, daß sich unsere Formel sogar durch beyde Quadrate $(p + 1)^2$ und $(p - 1)^2$ zugleich theilen läßt. Man setze zu diesem Ende $q = \frac{pt+1}{p+t}$, da wird $q + 1 = \frac{pt+p+t+1}{p+t} = \frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$ und $q - 1 =$

pt−p

$\frac{pt-p-t+1}{p+t} = \frac{(p-1)(t-1)}{p+t}$, hieraus wird nun unsere Formel, durch $(p+1)^2 (p-1)^2$ dividirt, $= \frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2} + p^2 \frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4}$, welche mit dem Quadrat $(p+t)^4$ multiplicirt, noch ein Quadrat seyn muß, nemlich $(pt+1)^2 (p+t)^2 + p^2 (t+1)^2 (t-1)^2$ oder $t^2p^4 + 2t(t^2+1) p^3 + 2t^2p^2 + (t^2+1)^2 p^2 + (t^2-1)^2 p^2 + 2t(t^2+1) p + t^2$; wo sowohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze daher die Wurzel $tp^2+(t^2+1)p-t$, von welcher das Quadrat $t^2p^4 + 2t(t^2+1) p^3 - 2t^2p^2 + (t^2+1)^2p^2 - 2t(t^2+1)p+t^2$ mit unserer Formel verglichen, giebt: $2t^2p + (t^2+1)^2 p + (t^2-1)^2 p + 2t(t^2+1) = - 2t^2p + (t^2+1)^2p - 2t(t^2+1)$, oder $4t^2p + (t^2-1)^2p + 4t(t^2+1) = 0$, oder $(t^2+1)^2 p + 4t(t^2+1) = 0$, das ist $t^2+1 = -\frac{4t}{p}$; woraus wir $p = \frac{-4t}{t^2+1}$ erhalten; hieraus wird $pt+1 = -\frac{3t^2+1}{t^2+1}$ und $p+t = \frac{t^3-3t}{t^2+1}$, folglich $q = -\frac{3t^2+1}{t^3-3t}$, wo t nach Belieben angenommen werden kann.

Es sey z. B. $t = 2$, so wird $p = -\frac{8}{5}$ und $q = -\frac{13}{2}$; woraus wir $\frac{x}{z} = \frac{p^2-1}{2p} = +\frac{39}{80}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2-1}{2q} = -\frac{117}{44}$ finden, oder $x = \frac{3.13}{4.4.5}z$ und $y = \frac{9.13}{4.11}z$. Man nehme nun $z = 4.4.5.11$, so wird $x = 3.13.11$ und $y = 4.5.9.13$; also sind die

Wurzeln

Wurzeln der drey gesuchten Quadrate $x = 3.11.13 = 429$, $y = 4.5.9.13 = 2340$ und $z = 4.4.5.11 = 880$. Welche noch kleiner sind, als die oben gefundenen.

Aus diesen aber wird

$$x^2 + y^2 = 3^2.13^2(121 + 3600) = 3^2.13^2.61^2;$$
$$x^2 + z^2 = 11^2.(1521 + 6400) = 11^2.89^2;$$
$$y^2 + z^2 = 20^2.(13689 + 1936) = 20^2.125^2.$$

VI. Zuletzt bemerken wir noch bey dieser Frage, daß aus einer jeden Auflösung ganz leicht noch eine andere gefunden werden kann; denn wenn die Werthe $x = a$, $y = b$, und $z = c$ gefunden worden sind, so daß $a^2 + b^2 = \square$, $a^2 + c^2 = \square$ und $b^2 + c^2 = \square$, so werden auch die folgenden Werthe ein Genüge leisten: $x = ab$, $y = bc$ und $z = ac$, denn da wird

$$x^2 + y^2 = a^2b^2 + b^2c^2 = b^2(a^2 + c^2) = \square$$
$$x^2 + z^2 = a^2b^2 + a^2c^2 = a^2(b^2 + c^2) = \square$$
$$y^2 + z^2 = a^2c^2 + b^2c^2 = c^2(a^2 + b^2) = \square.$$

Da wir nun eben $x = a = 3.11.13$, $y = b = 4.5.9.13$ und $z = c = 4.4.5.11$ gefunden haben, so erhalten wir daraus nach dieser Auflösung:

$$x = ab = 3.4.5.9.11.13.13.$$
$$y = bc = 4.4.4.5.5.9.11.13$$
$$y = ac = 3.4.4.5.11.11.13$$

welche sich alle drey durch $3.4.5.11.13$ theilen lassen, und also auf folgende Formel gebracht werden: $x = 9.13$, $y = 3.4.4.5$ und $z = 4.11$, das ist $x = 117$, $y = 240$, und $z = 44$, welche noch kleiner sind als die vorigen; daher wird aber:

$$x^2 + y^2 = 71289 = 267^2.$$
$$x^2 + z^2 = 15625 = 125^2.$$
$$y^2 + z^2 = 59536 = 244^2$$

§. 239.

§. 239.

XVIII. Aufg. Man verlangt zwey Zahlen x und y, daß, wenn man die eine zum Quadrate der andern addirt, ein Quadrat herauskomme, so daß die zwey Formeln $x^2 + y$ und $y^2 + x$ Quadrate seyn sollen.

Wollte man sogleich für die erstere $x^2 + y = p^2$ annehmen und daraus $y = p^2 - x^2$ herleiten, so würde die andere Formel $p^4 - 2p^2x^2 + x^4 + x = \square$, von welcher die Auflösung nicht leicht in die Augen fällt.

Man setze aber zugleich für beyde Formeln $x^2 + y = (p - x)^2 = p^2 - 2px + x^2$ und $y^2 + x = (q - y)^2 = q^2 - 2qy + y^2$, woraus wir dann folgende zwey Gleichungen erhalten: I.) $y + 2px = p^2$ und II.) $x + 2qy = q^2$, aus welchen x und y leicht gefunden werden können. Man findet nemlich $x = \frac{2qp^2 - q^2}{4pq - 1}$ und $y = \frac{2pq^2 - q^2}{4pq - 1}$; wo man p und q nach Belieben annehmen kann. Man setze z. B. $p = 2$ und $q = 3$, so bekömmt man die zwey gesuchte Zahlen $x = \frac{15}{23}$ und $y = \frac{32}{23}$, denn daher wird $x^2 + y = \frac{225}{529} + \frac{32}{23} = \frac{961}{529} = (\frac{31}{23})^2$ und $y^2 + x = \frac{1024}{529} + \frac{15}{23} = \frac{1369}{529} = (\frac{37}{23})^2$.

Man nehme ferner $p = 1$ und $q = 3$, so wird $x = -\frac{3}{11}$ und $y = \frac{17}{11}$; weil aber eine Zahl negativ ist, so mögte man diese Auflösung nicht gelten lassen. Man setze $p = 1$ und $q = \frac{3}{2}$, so wird $x = \frac{3}{20}$ und $y = \frac{7}{10}$, denn dann wird $x^2 + y = \frac{9}{400} + \frac{7}{10} = \frac{289}{400} = (\frac{17}{20})^2$ und $y^2 + x = \frac{49}{100} + \frac{3}{20} = \frac{64}{100} = (\frac{8}{10})^2$.

§. 240.

XIX. Aufg. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat und die Summe ihrer Quadrate ein Biquadrat sey.

Diese

Diese Zahlen seyen x und y, und weil $x^2 + y^2$ ein Biquadrat seyn muß, so mache man dasselbe zuerst zu einem Quadrat, welches geschieht, wenn $x = p^2 - q^2$ und $y = 2pq$ ist, wo dann $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^2$ wird. Damit nun dieses ein Biquadrat werde, so muß $p^2 + q^2$ ein Quadrat seyn, daher setze man ferner $p = r^2 - s^2$ und $q = 2rs$, so wird $p^2 + q^2 = (r^2 + s^2)^2$; folglich $x^2 + y^2 = (r^2 + s^2)^4$ und also ein Biquadrat; alsdann aber wird $x = r^4 - 6r^2s^2 + s^4$ und $y = 4r^3s - 4rs^3$. Also ist noch übrig, daß die Formel $x + y = r^4 + 4r^3s - 6r^2s^2 - 4rs^3 + s^4$ ein Quadrat werde, man setze die Wurzel davon $r^2 + 2rs + s^2$, und also unsere Formel gleich dem Quadrate $r^4 + 4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 + s^4$, wo sich die zwey ersten und letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch rs^2 dividirt, geben $6r + 4s = -6r - 4s$ oder $12r + 8s = 0$; also $s = -\frac{12r}{8} = -\frac{3}{2}r$, oder man kann die Wurzel auch $= r^2 - 2rs + s^2$ annehmen, damit die vierten Glieder wegfallen; da nun das Quadrat hievon $r^4 - 4r^3s + 6r^2s^2 - 4rs^3 + s^4$ ist, so geben die übrigen Glieder, durch r^2s dividirt, $4r - 6s = -4r + 6s$, oder $8r = 12s$, folglich $r = \frac{3}{2}s$; wenn nun $r = 3$ und $s = 2$, so würde $x = -119$ negativ.

Nehmen wir ferner $r = \frac{3}{2}s + t$ an, so wird für unsere Formel:

$$r^2 = \frac{9}{4}s^2 + 3st + t^2,\quad r^3 = \frac{27}{8}s^3 + \frac{27}{4}s^2t + \frac{9}{2}st^2 + t^3$$

folglich

$$\begin{aligned}
r^4 &= \frac{81}{16}s^4 + \frac{27}{2}s^3t + \frac{27}{2}s^2t^2 + 6st^3 + t^4\\
+4r^3s &= \frac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18s^2t^2 + 4st^3\\
-6r^2s^2 &= -\frac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6s^2t^2\\
-4rs^3 &= -6s^4 - 4s^3t\\
+s^4 &= +s^4;
\end{aligned}$$

also unsere Formel

$$\frac{1}{16}s^4 + \frac{37}{2}s^3t + \frac{51}{2}s^2t^2 + 10st^3 + t^4$$

welche

welche ein Quadrat seyn muß, und also auch, wenn sie mit 16 multiplicirt wird, dann bekömmt man folgendes: $s^4 + 296s^3t + 408s^2t^2 + 160st^3 + 16t^4$; hiervon nehme man die Wurzel $= s^2 + 148st - 4t^2$ an, wovon das Quadrat $s^4 + 296s^3t + 21896s^2t^2 - 1184st^3 + 16t^4$. Hier heben sich die zwey ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber, durch st^2 dividirt, geben $21896s - 1184t = 408s + 160t$ und also $\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}$. Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$, folglich $r = 1469$; und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir $x = r^4 - 6r^2s^2 + s^4 = 4565486027761$ und $y = 1061652293520$.

XV. Capitel.

Auflösung solcher Aufgaben, zu welchen Cubi erfordert werden.

§. 241.

In dem vorigen Capitel sind solche Aufgaben vorgekommen, wo gewisse Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, wobey wir denn Gelegenheit gehabt haben, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, wodurch die oben gegebenen Regeln zur Ausübung gebracht werden können. Nun ist nur noch übrig solche Aufgaben zu betrachten, wo gewisse Formeln zu einem Cubus gemacht werden sollen, wozu auch schon im vorigen Capitel die Regeln angegeben worden sind, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Aufgaben noch weit besser erläutert werden.

§. 242.

I. Aufg. Man verlangt zwey Cubus x^3 und y^3 zu wissen, deren Summe wieder ein Cubus seyn soll.

Da also $x^3 + y^3$ ein Cubus werden soll, so muß auch diese Formel, durch den Cubus y^3 dividirt, noch ein Cubus seyn, also $\frac{x^3}{y^3} + 1 =$ Cubus. Man setze $\frac{x}{y} = z - 1$, so bekommen wir $z^3 - 3z^2 + 3z$, welches ein Cubus seyn soll; wollte man nun nach den obigen Regeln die Cubicwurzel $= z - u$ annehmen, von welcher der Cubus $z^3 - 3uz^2 + 3u^2z - u^3$ ist, und u so bestimmen, daß auch die zweyten Glieder wegfielen, so würde $u = 1$, die übrigen Glieder aber würden geben: $3z = 3u^2z - u^3 = 3z - 1$, woraus $z = \infty$ gefunden wird, welcher Werth uns aber zu nichts hilft. Man lasse aber u unbestimmt, so bekommen wir die Gleichung: $-3z^2 + 3z = -3uz^2 + 3u^2z - u^3$; aus welcher quadratischen Gleichung der Werth von z bestimmt werde; wir bekommen aber $3uz^2 - 3z^2 = 3u^2z - 3z - u^3$, das ist $= 3(u-1)z^2 = 3(u^2-1)z - u^3$, oder $z^2 = (u+1)z - \frac{u^3}{3(u-1)}$, woraus gefunden wird $z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2+2u+1}{4} - \frac{u^3}{3(u-1)}\right)}$ oder $z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{-u^3+3u^2-3u-3}{12(u-1)}}$.

Es kömmt also darauf an, daß dieser Bruch zu einem Quadrate gebracht werde; wir wollen daher den Bruch oben und unten mit $3(u-1)$ multipliciren, damit unten ein Quadrat komme, nemlich $\frac{-3u^4+12u^3-18u^2+9}{36(u-1)^2}$, von welchem

Qua-

Quadrate also der Zähler noch ein Quadrat werden muß. In demselben ist zwar das letzte Glied schon ein Quadrat, nimmt man aber nach der Regel die Wurzel davon $= gu^2 + fu + 3$ an, von welcher das Quadrat $g^2u^4 + 2fgu^3 + 6gu^2 + 2fu + 9$ ist $+ f^2u^2$ und macht die drey letzten Glieder verschwinden, so wird zuerst $o = 2f$, das ist $f = o$, und hernach $6g + f^2 = -18$, und daher $g = -3$; alsdann geben die zwey ersten Glieder, durch u^3 dividirt, $-3u + 12 = g^2u + 2fu = 9u$; und daher $u = 1$, welcher Werth aber zu nichts führt. Wollen wir nun weiter $u = 1 + t$ annehmen, so wird unsere Formel $-12t - 3t^4$, welche ein Quadrat seyn soll; dieses kann aber nicht geschehen, wenn t nicht negativ ist. Es sey also $t = -s$, so wird unsere Formel $12s - 3s^4$, welche in dem Fall $s = 1$ ein Quadrat wird, alsdann aber wäre $t = -1$ und $u = o$, woraus nichts gefunden werden kann. Man mag auch die Sache angreifen, wie man will, so wird man nie einen solchen Werth finden, der uns zu unserm Zwecke führt, woraus man schon mit ziemlicher Gewißheit schließen kann, daß es nicht möglich sey, zwey Cubus zu finden, deren Summe ein Cubus wäre. Es läßt sich dieses aber auch noch auf folgende Art beweisen.

§. 243.

Lehrsatz. Es ist nicht möglich zwey Cubus zu finden, deren Summe oder auch deren Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß, wenn die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müsse. Denn wenn es unmöglich ist, daß $x^3 + y^3 = z^3$, so ist es auch unmöglich, daß $z^3 - y^3 = x^3$ sey; nun aber ist $z^3 - y^3$ die Differenz zweyer Cubus. Es ist also hinlänglich, die Unmöglichkeit blos von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere schon daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y unter sich untheilbar sind. Denn wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, so würden sich die Cubus durch den Cubus desselben theilen lassen. Wäre z. B. $x = 2a$, und $y = 2b$, so würde $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch $a^3 + b^3$ ein Cubus seyn.

II. Da nun u und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerade, oder die eine gerade, und die andere ungerade. Im erstern Falle müßte z gerade seyn; im andern Falle aber müßte z ungerade seyn. Also sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerade und eine gerade. Wir wollen daher zu unserm Beweise die beyden ungeraden nehmen, weil es gleichviel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wenn die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seyen also x und y zwey ungerade Zahlen, so wird sowohl ihre Summe als Differenz gerade seyn. Man setze daher $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$, woraus erhellt, daß von den zwey Zahlen p und

und q die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß; daher aber wird $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(p^2 + 3q^2)$; es muß also bewiesen werden, daß das Product $2p(p^2 + 3q^2)$ kein Cubus seyn könne. Sollte es aber von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3 - y^3 = 6p^2q + 2q^3 = 2q(q^2 + 3p^2)$, welche Formel der vorigen ganz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q verwechselt sind, daher es hinlänglich ist, die Unmöglichkeit der Formel $2p(p^2 + 3q^2)$ zu zeigen, weil daraus nothwendig folgt, daß weder die Summe noch die Differenz zweyer Cubus ein Cubus werden könne.

IV. Wäre nun $2p(p^2 + 3q^2)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerade und also durch 8 theilbar; folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine ganze Zahl und noch dazu ein Cubus seyn, nemlich $\frac{1}{4}p(p^2 + 3q^2)$. Weil nun von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade ist, so wird $p^2 + 3q^2$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folgt, daß sich p durch 4 theilen lassen müsse und also $\frac{p}{4}$ eine ganze Zahl sey.

V. Wenn nun das Product $\frac{p}{4} \cdot (p^2 + 3q^2)$ ein Cubus seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nemlich $\frac{p}{4}$ und $p^2 + 3q^2$, ein Cubus seyn, wenn nemlich dieselben keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn wenn ein Product von zwey Factoren, die unter sich untheilbar sind, ein Cubus seyn soll, so muß nothwendig ein jeder für sich ein Cubus seyn; wenn diese aber einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist daher die Frage: ob die zwey Factoren p und $p^2 + 3q^2$ nicht einen gemeinschaftlichen Factor haben könnten? welches auf folgende Art untersucht wird. Hätten sie einen gemeinschaftlichen Theiler, so würden auch p^2 und $p^2 + 3q^2$ eben denselben gemeinschaftlichen Theiler haben, und also auch dieser ihre Differenz, welche $3q^2$ ist, mit dem p^2 eben denselben gemeinschaftlichen Theiler haben, da nun p und q unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen p^2 und $3q^2$ keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben als 3, welches geschieht, wenn sich p durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben daher zwey Fälle zu betrachten: der erste ist, wenn die Factoren p und $p^2 + 3q^2$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, welches jedesmal geschieht, wenn sich p nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall aber ist, wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler haben; dieses geschieht, wenn sich p durch 3 theilen läßt, wo dann beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey Fälle müssen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden besonders führen muß.

VII. Erster Fall. Es sey daher p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $\frac{p}{4}$ und $p^2 + 3q^2$ untheilbar unter sich, so müßte jeder für sich ein Cubus seyn. Machen wir daher $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubus, welches

ge-

geschieht, wenn man, wie oben gezeigt worden, $p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$ und $p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$ annimmt. Damit dadurch $p^2 + 3q^2 = (t^2 + 3u^2)^3$ und also ein Cubus werde; hieraus aber wird $p = t^3 - 9tu^2 = t(t^2 - 9u^2)$, und $q = 3t^2u - 3u^3 = 3u(t^2 - u^2)$; weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerade, t aber gerade seyn, weil sonst $t^2 - u^2$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubus gemacht und $p = t(t^2 - 9u^2) = t(t + 3u)(t - 3u)$ gefunden worden, so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$ ein Cubus seyn; daher die Formel $2t(t + 3u)(t - 3)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemerken, daß t eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonst auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist; also sind die drey Factoren $2t$, $t + 3u$ und $t - 3u$ unter sich untheilbar, und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze daher $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$, so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwey Cubus f^3 und g^3, deren Summe wieder ein Cubus wäre, welche offenbar ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubus x^3 und y^3. Denn nachdem wir $x = p + q$ und $y = p - q$ angenommen haben, jetzt aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müssen die Zahlen p und q viel größer seyn als t und u.

IX. Wenn es also zwey solche Cubus in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleinern Zahlen eben dergleichen anzeigen, deren Summe auch ein Cubus wäre, und auf diese Art könnte man immer auf kleinere dergleichen Cubus kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubus gewiß nicht giebt, so sind sie auch in den größten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftigt, daß auch der andere Fall eben dahin führt, wie wir sogleich sehen werden.

X. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p = 3r$, so wird unsere Formel $\frac{3r}{4}.(9r^2 + 3q^2)$, oder $\frac{9}{4}r(3r^2 + q^2)$, welche beyde Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich $3r^2 + q^2$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben sowohl gerade seyn muß als p, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

XI. Machen wir nun den zweyten $3r^2 + q^2$ oder $q^2 + 3r^2$ zu einem Cubus, so finden wir, wie oben, $q = t(t^2 - 9u^2)$ und $r = 3u(t^2 - u^2)$; wobey zu merken ist, daß, weil q ungerade war, hier auch t ungerade, u aber eine gerade Zahl seyn müsse.

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubus $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß $\frac{2r}{3}$, das ist $2u(t^2 - u^2) = 2u(t+u)(t-u)$ ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte; wenn man aber

t + u

$t + u = f^3$ annimmt und $t - u = g^3$, so folgt daraus $2u = f^3 - g^3$, welches auch ein Cubus seyn müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. Auf diese Art hätte man zwey weit kleinere Cubus f^3 und g^3, deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche, deren Summe ein Cubus wäre; denn man darf nur $f^3 - g^3 = h^3$ annehmen, so wird $f^3 = h^3 + g^3$, und also hätte man zwey Cubus, deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätigt, daß es auch in den größten Zahlen keine solche Cubus gebe, deren Summe oder Differenz wieder ein Cubus wäre, und zwar darum, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.

§. 244.

Weil es nun nicht möglich ist, zwey solche Cubus zu finden, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, so fällt auch unsere erste Frage weg, und man pflegt hier vielmehr den Anfang mit der Frage zu machen, wie drey Cubus gefunden werden sollen, deren Summe einen Cubus ausmache; man kann aber zwey derselben nach Belieben annehmen, so daß nur der dritte gefunden werden soll. Wir wollen daher diese Frage jetzt in Untersuchung ziehen.

§. 245.

II. Aufg. Es wird zu zweyen gegebenen Cubus a^3 und b^3 noch ein dritter Cubus x^3 verlangt, welcher mit jenen zusammen wieder einen Cubus ausmache.

Es soll also die Formel $a^3 + b^3 + x^3$ ein Cubus werden; da dieses aber nicht anders geschehen kann, als wenn schon ein Fall bekannt ist, ein solcher Fall sich hier aber von selbst darbietet, nemlich $x = -a$, so setze man $x = y - a$, dann wird $x^3 = y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3$, und daher unsere Formel, die ein Cubus werden soll, $y^3 - 3ay^2 + 3a^2y + b^3$, von welcher das erste und letzte Glied schon ein Cubus ist, daher man sogleich zwey Auflösungen finden kann.

I. Nach der ersten nehme man die Wurzel davon $y + b$ an, deren Cubus $y^3 + 3by^2 + 3b^2y + b^3$ ist, woraus wir $-3ay + 3a^2 = 3by + 3b^2$ erhalten, daher $y = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$; folglich $x = -b$, welcher Werth uns zu nichts dient.

II. Man kann aber die Wurzel auch $= b + fy$ annehmen, von welcher der Cubus $f^3y^3 + 3bf^2y^2 + 3b^2fy + b^3$ ist; und f so bestimmen, daß auch die dritten Glieder wegfallen; dieses geschieht, wenn $3a^2 = 3b^2f$ oder $f = \frac{a^2}{b^2}$, wo dann die zwey ersten Glieder, durch y^2 dividirt, $y - 3a = f^3y + 3bf^2 = \frac{a^6y}{b^6} + \frac{3a^4}{b^3}$ geben, welche mit b^6 multiplicirt, $b^6y - 3ab^6 = a^6y + 3a^4b^3$ giebt; daraus wird $y = \frac{3a^4b^3 + 3ab^6}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3(a^3 + b^3)}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3}{b^3 - a^3}$ gefunden, und also $x = y - a = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} = a. \frac{2b^3 + a^3}{b^3 - a^3}$.

Wenn also die beyden Cubus a^3 und b^3 gegeben sind, so haben wir hier die Wurzel des dritten gesuchten Cubus gefunden, und damit diese positiv

werde,

werde, so darf man nur b^3 für den größern Cubus annehmen, welches wir noch durch einige Beyspiele erläutern wollen.

I. Es seyen die beyden gegebenen Cubus 1 und 8, so daß $a = 1$ und $b = 2$, so wird die Form $9 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{17}{7}$; denn alsdann wird $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = (\frac{20}{7})^3$.

II. Es sey die zwey gegebenen Cubus 8 und 27, so daß $a = 2$ und $b = 3$, so wird die Form $35 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{124}{19}$.

III. Es seyen die beyden gegebenen Cubus 27 und 64, so daß $a = 3$ und $b = 4$, so wird die Form $91 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{465}{37}$.

Wollte man zu zwey gegebenen Cubus noch mehrere dergleichen dritte finden, so müßte man in der ersten Form $a^3 + b^3 + x^3$, ferner $x = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + z$ annehmen, wo man dann wieder auf eine ähnliche Formel kommen würde, woraus sich neue Werthe für z bestimmen ließen, welches aber in viel zu weitschweifige Rechnungen führen würde.

§. 246.

Bey dieser Frage ereignet sich aber ein merkwürdiger Fall, wenn die beyden gegebenen Cubus einander gleich sind, oder $b = a$; wir bekommen denn $x = \frac{3a^4}{0}$, das ist unendlich, und erhalten also keine Auflösung; daher die Frage, wenn $2a^3 + x^3$ ein Cubus werden soll, noch nicht hat aufgelöset werden können. Es sey z. B. $a = 1$ und also unsere Formel $2 + x^3$, so ist zu merken, daß, was man auch immer für Veränderungen vornehmen mag, alle Bemühungen vergeblich sind, und niemals daraus ein geschickter Werth für x gefunden werden kann; woraus sich schon mit ziemlicher Gewißheit schließen läßt, daß zu einem doppelten Cubus kein Cubus gefunden werden könne, welcher mit jenem zusammen einen Cubus ausmachte, oder daß die Gleichung $2a^3 + x^3 = y^3$ unmöglich sey; aus derselben aber folgt diese: $2a^3 = y^3 - x^3$, und daher es auch nicht möglich ist, zwey Cubus zu finden, deren Differenz ein doppelter Cubus wäre, welches auch von der Summe zweyer Cubus zu verstehen ist und auf folgende Art bewiesen werden kann.

§. 247.

Lehrsatz. Weder die Summe, noch die Differenz zweyer Cubus kann jemals einem doppelten Cubus gleich werden, oder die Formel $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ ist an sich selbst unmöglich, außer in dem Falle $y = x$, welcher für sich selbst klar ist.

Hier können wieder x und y als unter sich untheilbar angenommen werden, denn wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, so müßte auch z dadurch theilbar seyn, und also die gaaze Gleichung durch den Cubus davon getheilt werden können. Weil nun $x^3 \pm y^3$ eine gerade Zahl seyn soll, so müssen beyde Zahleu x und y ungerade seyn, daher sowohl ihre Summe als Differenz gerade seyn wird. Man setze also $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$; wo dann von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß. Hierans folgt aber $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(p^2 + 3q^2)$, und $x^3 - y^3 = 6p^2q + 2q^3 = 2q(3p^2 + q^2)$, welche beyde Formeln einander völlig ähnlich sind. Daher wird es hinlänglich seyn, zu zeigen, daß die Formel $2p(p^2 + 3q^2)$ kein

kein doppelter Cubus, und also $p(p^2 + 3q^2)$ kein Cubus seyn könne; hiervon ist der Beweis in folgenden Sätzen enthalten.

I. Es kommen hier wieder zwey Fälle in Betrachtung; von diesen ist der erste, wenn die zwey Factoren p und $p^2 + 3q^2$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, wo dann ein jeder für sich ein Cubus seyn muß; der andere Fall aber ist, wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler haben, der, wie wir oben gesehen haben, kein anderer als 3 seyn kann.

II. Erster Fall. Es sey daher p nicht durch 3 theilbar, und also die beyden Factoren unter sich untheilbar, so mache man zuerst $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubus, welches geschieht, wenn $p = t(t^2 - 9u^2)$ und $q = 3u(t^2 - u^2)$, so daß noch der Werth von p ein Cubus seyn müßte. Da nun t durch 3 nicht theilbar ist, weil sonst p auch durch 3 theilbar seyn würde, so sind die zwey Factoren t und $t^2 - 9u^2$ unter sich untheilbar, und folglich muß ein jeder für sich ein Cubus seyn.

III. Der letztere aber hat wieder zwey Factoren, nemlich $t + 3u$ und $t - 3u$, welche unter sich untheilbar sind, zuerst weil sich t nicht durch 3 theilen läßt, hernach aber, weil von den Zahlen t und u die eine gerade und die andere ungerade ist. Denn wenn beyde ungerade wären, so würde nicht nur p, sondern auch q ungerade werden, welches nicht seyn kann, folglich muß auch ein jeder von diesen Factoren $t + 3u$ und $t - 3u$ für sich ein Cubus seyn.

IV. Man nehme daher $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$ an, so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist t für sich ein Cubus, welcher $= h^3$ sey, so

daß

daß $f^3 + g^3 = 2h^3$ wäre, das ist, wir hätten zwey weit kleinere Cubus, nemlich f^3 und g^3, deren Summe auch ein doppelter Cubus wäre.

V. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar und also q nicht. Man setze daher $p = 3r$, so wird unsere Formel $3r(9r^2 + 3q^2) = 9r(3r^2 + q^2)$, welche Factoren jetzt unter sich untheilbar sind und daher ein jeder ein Cubus seyn muß.

VI. Um nun den letztern $q^2 + 3r^2$ zu einem Cubus zu machen, so setze man $q = t(t^2 - 9u)^2$ und $r = 3u(t^2 - u^2)$, wo dann wieder von den Zahlen t und u die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß, weil sonst die beyden Zahlen q und r gerade würden. Hieraus aber bekommenen wir den erstern Factor $9r = 27u(t^2 - u^2)$, welcher ein Cubus seyn müßte, und folglich auch durch 27 dividirt, nemlich $u(t^2 - u^2)$, das ist $u(t + u)(t - u)$.

VII. Weil nun auch diese drey Factoren unter sich untheilbar sind, so muß ein jeder für sich ein Cubus seyn. Setzt man daher für die beyden letztern $t + u = f^3$ und $t - u = g^3$, so bekömmt man $2u = f^3 - g^3$; weil nun auch u ein Cubus seyn muß, so erhalten wir in weit kleinern Zahlen zwey Cubus f^3 und g^3, deren Differenz gleichfalls ein doppelter Cubus wäre.

VIII. Weil es nun in kleinen Zahlen keine dergleichen Cubus giebt, deren Summe oder Differenz ein doppelter Cubus wäre, so ist klar, daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht geben könne.

IX. Man könnte zwar einwenden, daß, da es in kleinern Zahlen gleichwohl einen solchen Fall gebe, nemlich wenn $f = g$ ist, der obige

Schluß

Schluß betrügen könne. Allein wenn $f = g$ wäre, so hätte man in dem ersten Fall $t + 3u = t - 3u$ und also $u = 0$, folglich wäre auch $q = 0$, und da wir $x = p + q$ und $y = p - q$ angenommen haben, so wären auch die zwey ersten Cubus x^3 und y^3 schon einander gleich gewesen, welcher Fall ausdrücklich ausgenommen ist. Eben so auch in dem andern Fall, wenn $f = g$ wäre, so müßte $t + u = t - u$ und also wieder $u = 0$ seyn, daher auch $r = 0$ und folglich $p = 0$, wo dann wieder die beyden erstern Cubus x^3 und y^3 einander gleich würden, von welchem Fall aber gar nicht die Rede ist.

§. 248.

III. Aufg. Man verlangt auf eine allgemeine Art drey Cubus x^3, y^3 und z^3, deren Summe wieder einen Cubus ausmache.

Wir haben schon gesehen, daß man zwey dieser Cubus für bekannt annehmen und daraus immer den dritten bestimmen könne, wenn nur die beyden erstern einander nicht gleich wären; allein nach der obigen Methode findet man in einem jeden Fall nur einen Werth für den dritten Cubus, und es würde sehr schwer fallen, daraus noch mehrere aufzufinden.

Wir sehen also hier alle drey Cubus als unbekannt an; und um eine allgemeine Auflösung zu geben, nehmen wir $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$ an, und bringen den einen von den erstern auf die andere Seite, damit wir $x^3 + y^3 = v^3 - z^3$ bekommen; welcher Gleichung auf folgende Art ein Genüge geschehen kann.

I. Man

I. Man setze $x = p + q$ und $y = p - q$, so wird, wie wir gesehen, $x^3 + y^3 = 2p(p^2 + 3q^2)$; ferner setze man $v = r + s$ und $z = r - s$, so wird $v^3 - z^3 = 2s(s^2 + 3r^2)$; daher denn $2p(p^2 + 3q^2) = 2s(s^2 + 3r^2)$, oder $p(p^2 + 3q^2) = s(s^2 + 3r^2)$ seyn muß.

II. Wir haben oben gesehen, daß eine solche Zahl $p^2 + 3q^2$ keine andre Theiler habe, als die selbst in eben dieser Form enthalten sind. Weil nun die beyden Formeln $p^2 + 3q^2$ und $s^2 + 3r^2$ nothwendig einen gemeinschaftlichen Theiler haben müssen, so sey derselbe $= t^2 + 3u^2$.

III. Zu diesem Ende setze man
$p^2 + 3q^2 = (f^2 + 3g^2)(t^2 + 3u^2)$ und
$s^2 + 3r^2 = (h^2 + 3k^2)(t^2 + 3u^2)$, wo dann
$p = ft + 3gu$ und $q = gt - fu$ wird;
folglich $p^2 = f^2t^2 + 6fgtu + 9g^2u^2$ und
$q^2 = g^2t^2 - 2fgtu + f^2u^2$; hieraus
$p^2 + 3q^2 = (f^2 + 3g^2)t^2 + (3f^2 + 9g^2)u^2$,
das ist $p^2 + 3q^2 = (f^2 + 3g^2)(t^2 + 3u^2)$.

IV. Eben so erhalten wir aus der andern Formel
$s = ht + 3ku$ und $r = kt - hu$,
woraus folgende Gleichung entsteht:
$(ft + 3gu)(f^2 + 3g^2)(t^2 + 3u^2) = (ht + 3ku)(h^2 + 3k^2)(t^2 + 3u^2)$, welche durch $t^2 + 3u^2$ dividirt, $ft(f^2 + 3g^2) + 3gu(f^2 + 3g^2) = ht(h^2 + 3k^2) + 3ku(h^2 + 3k^2)$, oder $ft(f^2 + 3g^2) - ht(h^2 + 3k^2) = 3ku(h^2 + 3k^2) - 3gu(f^2 + 3g^2)$ giebt, woraus wir
$t = \frac{3k(h^2+3k^2-3g(f^2-3g^2)}{f(f^2+3g^2)-h(h^2+3k^2)}u$ erhalten.

V. Um nun ganze Zahlen zu bekommen, so nehme man $u = f(f^2 + 3g^2) - h(h^2 + 3k^2)$, damit $t = 3k(h^2 + 3k^2) - 3g(f^2 + 3g^2)$ sey,

sey, wo man die vier Buchstaben f, g, h und k nach Belieben annehmen kann.

VI. Hat man nun aus diesen vier Zahlen die Werthe für t und u gefunden, so erhält man daraus: I.) $p = ft + 3gu$, II.) $q = gt - fu$, III.) $s = ht + 3ku$, IV.) $r = kt - hu$, und hieraus endlich für die Auflösung unserer Frage $x = p + q$, $y = p - q$, $z = r - s$, und $v = r + s$, welche Auflösung so allgemein ist, daß darin alle mögliche Fälle enthalten sind, weil in dieser ganzen Rechnung keine willkührliche Einschränkung gemacht worden.

Der ganze Kunstgriff besteht darin, daß unsere Gleichung durch $t^2 + 3u^2$ theilbar gemacht wurde, wodurch die Buchstaben t und u durch eine einfache Gleichung haben bestimmt werden können. Die Anwendung dieser Formeln kann auf unendlich verschiedene Arten angestellt werden, von welchen wir einige Beyspiele anführen wollen.

I. Es sey $k = 0$ und $h = 1$, so wird $t = -3g(f^2 + 3g^2)$ und $u = s(f^2 + 3g^2) - 1$; hieraus also $p = -3fg(f^2 + 3g^2) + 3fg(f^2 + 3g^2) - 3g = -3g$, $q = -(f^2 + 3g^2)^2 + f$, ferner $s = -3g(f^2 + 3g^2)$ und $r = -f(f^2 + 3g^2) + 1$, woraus wir endlich bekommen: $x = -3g - (f^2 + 3g^2)^2 + f$, $y = -3g + (f^2 + 3g^2)^2 - f$, $z = (3g - f)(f^2 + 3g^2) + 1$ und endlich $v = -(3g + f)(f^2 + 3g^2) + 1$. Setzen wir nun $f = -1$ und $g = +1$, so bekommen wir $x = -20$, $y = 14$, $z = 17$ und $v = -7$; daher erhalten wir die Gleichung $-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3$ oder $14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3$.

II. Es sey $f = 2$, $g = 1$ und also $f^2 + 3g^2 = 7$; ferner $h = 0$ und $k = 1$, also $h^2 + 3k^2 = 3$, so

wird

wird $t = -12$ und $u = 14$ seyn; hieraus wird $p = 2t + 3u = 18$, $q = t - 2u = -40$, $r = t = -12$ und $s = 3u = 42$; daher bekommen wir $x = p + q = -22$, $y = p - q = 58$, $z = r - s = -54$ und $v = r + s = 30$, so daß $-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3$, oder $58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3$. Da sich nun alle Wurzeln durch 2 theilen lassen, so wird auch $29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3$ seyn.

III. Es sey $f = 3$, $g = 1$, $h = 1$ und $k = 1$, also $f^2 + 3g^2 = 12$ und $h^2 + 3k^2 = 4$, so wird $t = -24$ und $u = 32$, welche sich durch 8 theilen lassen; und da es hier nur auf ihr Verhältniß ankömmt, so wollen wir $t = -3$ und $u = 4$ annehmen. Hieraus bekommen wir $p = 3t + 3u = +3$, $q = t - 3u = -15$, $r = t - u = -7$ und $s = t + 3u = +9$; hieraus wird $x = -12$ und $y = 18$, $z = -16$ und $v = 2$, so daß $-12^3 + 18^3 - 16^3 = 2^3$ oder $18^3 = 16^3 + 12^3 + 2^3$; oder auch durch 2 abgekürzt, $9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3$.

IV. Setzen wir nun $g = 0$ und $k = h$, so daß f und h nicht bestimmt werden. Da wird nun $f^2 + 3g^2 = f^2$ und $h^2 + 3k^2 = 4h^2$; also bekommen wir $t = 12h^3$ und $u = f^3 - 4h^3$; daher ferner $p = st = 12fh^3$, $q = -f^4 + 4fh^3$, $r = 12h^4 - hf^3 + 4h^4 = 16h^4 - hf^3$ und $s = 3hf^3$, daraus endlich $x = p + q = 16fh^3 - f^4$, $y = p - q = 8fh^3 + f^4$, $z = r - s = 16h^4 - 4hf^3$, und $v = r + s = 16h^4 + 2hf^3$. Nehmen wir nun $f = h = 1$, so erhalten wir $x = 15$, $y = 9$, $z = 12$, und $v = 18$, welche durch 3 abgekürzt, $x = 5$, $y = 3$, $z = 4$, und $v = 6$ geben, so daß $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Hierbey ist merkwürwürdig, daß die drey Wurzeln 3, 4, 5, um Eins steigen, daher wir untersuchen wollen, ob es noch mehrere dergleichen gebe?

§. 249.

IV. Aufg. Man verlangt drey Zahlen in einer arithmetischen Progression, deren Differenz $= 1$, so daß die Cubus derselben Zahlen zusammen addirt, wieder einen Cubus hervorbringen.

Es sey x die mittlere dieser Zahlen, so wird die kleinere $= x - 1$ und die größere $= x + 1$; die Cubus derselben addirt, geben nun $3x^3 + 6x = 3x(x^2 + 2)$, welches ein Cubus seyn soll. Hiezu ist nun nöthig, daß ein Fall bekannt sey, in welchem dieses geschieht, und nach einigen Versuchen findet man $x = 4$, daher setzen wir nach den oben angegebenen Regeln $x = 4 + y$, so wird $x^2 = 16 + 8y + y^2$ und $x^3 = 64 + 48y + 12y^2 + y^3$, woraus unsere Formel wird: $216 + 150y + 36y^2 + 3y^3$, wo das erste Glied ein Cubus ist, das letzte aber nicht. Man setze daher die Wurzel $6 + fy$ und mache, daß die beyden ersten Glieder wegfallen; da nun der Cubus davon $216 + 108fy + 18f^2y^2 + f^3y^3$ ist, so muß $150 = 108f$, also $f = \frac{25}{18}$ seyn. Die übrigen Glieder aber durch y^2 dividirt, geben $36 + 3y = 18f^2 + f^3y = \frac{25^2}{18} + \frac{25^3}{18^3}y$, oder $18^3 . 36 + 18^3 . 3y = 18^2 . 25^2 + 25^3y$, oder $18^3 . 36 - 18^2 . 25^2 = 25^3y - 18^3 . 3y$, daher $y = \frac{18^3 . 36 - 18^2 . 25^2}{25^3 - 3 . 18^3} = \frac{18^2(18 . 36 - 25^2)}{25^3 - 3 . 18^2}$, und also $y = -\frac{324 . 23}{1871} = -\frac{7452}{1871}$; folglich $x = \frac{32}{1871}$.

Da es beschwerlich scheinen möchte, diese Reduction zu einem Cubus weiter zu verfolgen, so ist zu merken, daß die Frage immer auf Quadrate gebracht werden könne. Denn da $3x(x^2+2)$ ein Cubus seyn soll, so setze man denselben $= x^3y^3$, wo man denn $3x^2+6 = x^2y^3$ und also $x^2 = \frac{6}{y^3-3} = \frac{36}{6y^3-18}$ erhält. Da nun der Zähler dieses Bruchs schon ein Quadrat ist, so ist nur noch nöthig, den Nenner $6y^3 - 18$ zu einem Quadrate zu machen; wozu wieder nöthig ist, einen Fall zu errathen. Weil sich aber 18 durch 9 theilen läßt, 6 aber nur durch 3, so muß y sich auch durch 3 theilen lassen. Man nehme deswegen $y = 3z$ an, so wird unser Nenner $= 162z^3 - 18$, welcher durch 9 dividirt, nemlich $18z^3 - 2$, noch ein Quadrat seyn muß. Dieses geschieht nun offenbar, wenn $z = 1$ ist; man setze daher $z = 1 + v$, so muß $16 + 54v + 54v^2 + 18v^3 = \square$ seyn. Von diesem setze man die Wurzel $4 + \frac{27}{4}v$, deren Quadrat $16 + 54v + \frac{729}{16}v^2$ ist, und also $54 + 18v = \frac{729}{16}$, oder $18v = -\frac{135}{16}$, folglich $2v = -\frac{15}{16}$, und $v = -\frac{15}{32}$, hieraus erhalten wir $z = 1 + v = \frac{17}{32}$, ferner $y = \frac{51}{32}$.

Nun wollen wir den obigen Nenner betrachten, welcher $6y^3 - 18 = 162z^3 - 18 = 9(18z^3 - 2)$ war. Von diesem Factor aber $18z^3 - 2$ haben wir die Quadratwurzel $4 + \frac{27}{4}v = \frac{107}{128}$, also ist die Quadratwurzel aus dem ganzen Nenner $\frac{321}{128}$; aus dem Zähler aber ist dieselbe $= 6$, woraus $x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \frac{256}{107}$ folgt, welcher Werth von dem vorher gefundenen durchaus verschieden ist. Also sind die Wurzeln von unsern drey Cubus folgende: I.) $x - 1 = \frac{149}{107}$, II.) $x = \frac{256}{107}$, III.) $x + 1 = \frac{363}{107}$, deren Cubus zusammen addirt, einen Cubus hervorbringen, von welchem die Wurzel $xy = \frac{256}{107} \cdot \frac{51}{32} = \frac{408}{107}$ seyn wird.

§ 250.

§. 250.

Wir wollen hiermit diesen Abschnitt von der unbestimmten Analytik beschließen, weil wir bey den beygebrachten Aufgaben hinlängliche Gelegenheit gefunden haben, die vornehmsten Kunstgriffe zu erklären, die bisher in dieser Wissenschaft sind angewendet worden.

Ende des zweyten Theils.

Druckfehler

(im ersten Theile von Eulers Algebra.)

Im Vorbericht
Seite 2. Zeile 14. lies: unter dem
— — — 21. — Einen Auszug
— — — 26. — Ausgabe mich zu
— 5. ganz oben — des Fußes
— 6. 2. Zusatz, Zeile 10. l. oder einen Ausdruck
— 16. Z. 1. l. und den
eben daselbst, Z. 2. l. den
— 45. § 86. Z. 4. streiche: die man, weg
— 75. Z. 14. l. $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{+1}{-1}} = \sqrt{-1}$
— 80. Z. 1. l. hervorbringet
— 86. § 173. Z. 9. l. u. a^6
— 105. Z. 6 l. dem
— 106. § 217. Z. 4. l. u. $a^2 = c$ setzt,
— 107. § 220. Z. 2. streiche: wir, weg

Seite 108.