Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

Erster Abschnitt. Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

Des

Ersten Theils

Erster Abschnitt.

Von

den verschiedenen Rechnungsarten

mit einfachen Größen.

Des

Ersten Theils

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

I. Capitel.

Von der Algebra überhaupt.

§. 1.

Alles dasjenige wird eine Größe genannt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon wegnehmen läßt.

Daher ist eine Summe Geldes eine Größe, weil sich etwas dazu setzen und hinweg nehmen läßt.

Imgleichen ist auch ein Gewicht eine Größe und dergleichen mehr.

§. 2.

Es giebt also sehr viel verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl herzählen lassen; und daher entstehen die verschiedenen Theile der

Mathematik, von denen sich jeder mit einer besondern Art von Größen beschäftiget, indem die Mathematik überhaupt nichts anders ist, als eine Wissenschaft der Größen, welche Mittel ausfindig macht, wie man dieselben ausmessen soll.

Anmerkung. Ueber das Wesen der Mathematik findet man sehr viel Lehrreiches in folgenden Schriften. Michelsens, Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik — Berlin 1789, dessen Beyträge zur Mathematik. Erster Band. Berlin 1790. und in dessen Elemente des Euclides. — Berlin 1791.

§. 3.

Es läßt sich aber eine Größe nicht bestimmen oder ausmessen, wenn man nicht eine Größe derselben Art als bekannt annimmt, und das Verhältniß anzeigt, worinn eine jede Größe, von eben der Art, gegen dieselbe steht.

Also, wenn die Größe einer Summe Geldes bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Stück Geld, z. B. ein Gulden, ein Rubel, ein Thaler, oder ein Dukaten und dergleichen, als bekannt angenommen, und angezeigt, wie viel dergleichen Stucke in jener Summe enthalten sind.

Eben so, wenn die Größe eines Gewichts bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Gewicht, z. B. ein Pfund, ein Centner, oder ein Loth und dergleichen, als bekannt angenommen, und angezeigt, wie viel derselben in dem vorigen Gewicht enthalten sind.

Soll aber eine Länge oder eine Weite ausgemessen werden, so pfleget man sich dazu einer gewissen bekannten Länge, welche ein Fuß genannt wird, zu bedienen.

des Fußes

Anmerkung. Nicht bloß ~~der Fuß~~, sondern auch der Meilen, Ruthen, Ellen u. s. w. bedient man sich zum Ausmessen der Längen, der Astronom gebraucht gaar Erddiameter und Sonnenfernen, zu Ausmessungen am Himmel.

§. 4.

Bey Bestimmungen, oder Ausmessungen der Größen aller Art, kömmt es also darauf an, daß erstlich eine gewisse bekannte Größe von gleicher Art fest gesetzt werde (welche das **Maaß**, oder die **Einheit** genannt wird), und also von unserer Willkühr abhängt; hernach, daß man bestimme, in was für einem Verhältnisse die vorgegebene Größe gegen dieses Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß eine **Zahl** nichts anders ist, als das Verhältniß, worinn eine Größe gegen eine andere, die statt der Einheit angenommen wird, steht.

§. 5.

Hieraus ist klar, daß sich alle Größen durch Zahlen ausdrucken lassen, und also der Grund aller mathematischen Wissenschaften darinn gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Rechnungsarten, die dabey vorkommen können, genau in Erwägung ziehe, und vollständig abhandle.

Dieser Grundtheil der Mathematik wird die **Analytik** oder **Algebra** genannt.

Anmerk. Mehrere Mathematikverständige unterscheiden mit Recht **Analytik** oder **Analysis** von **Algebra**, denn diese ist eigentlich nur ein Theil von jener. Weiter hin wird sich dieser Unterschied genauer angeben lassen.

§. 6.

In der **Analytik** werden also bloß Zahlen betrachtet, wodurch die Größen angezeigt werden, ohne sich um die besondere Art der Größen zu bekümmern, welches in den übrigen Theilen der Mathematik geschieht.

§. 7.

Von den Zahlen insbesondere handelt die gemeine Arithmetik oder Rechenkunst, (arithmetica vulgaris). Diese erstreckt sich aber nur auf gewisse Rechnungsarten, welche im gemeinen Leben öfters vorkommen; hingegen begreift die Analytik auf eine allgemeine Art alles dasjenige in sich, was bey den Zahlen und deren Berechnung auch immer vorfallen mag.

1. Zusatz. Außer den gewöhnlichen arithmetischen Ziffern bedient man sich in der Algebra noch verschiedener anderer Zeichen, die zu den im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungen nicht nöthig sind. Um aber das Gedächtniß nicht zu sehr zu beschweren, so hat man bloß zur Bemerkung der verschiedenen Operationen besondere Zeichen erdacht, und zur Bezeichnung der Größen selbst die Buchstaben des lateinischen Alphabets gewählt. Wenn die lateinischen Buchstaben nicht hinreichend sind, so pflegt man sich auch der griechischen, hebraischen und deutschen Buchstaben zu dieser Absicht zu bedienen. Die folgenden Capitel werden darüber alle nöthige Erläuterung geben.

2. Zusatz. Die Verrichtung der gewöhnlichen Rechnungsarten, vermittelst der Buchstaben, wird die Buchstabenrechnung (calculus literalis), oder allgemeine Arithmetik (arithmetica, seu calculus universalis) genannt; sie ist ein sehr wichtiges Hülfsmittel zur Erlernung der Algebra, die wesentlich von ihr unterschieden ist. Letztere bestehet eigentlich in der Wissenschaft, Gleichungen aufzulösen, das heißt, den Werth der unbekannten Größe, die in der Gleichung enthalten ist, zu finden. Durch eine Gleichung aber versteht man nichts anders, als eine Formel, oder ein Ausdruck, worin einerley Größe auf zweyerley Art ausgedrückt wird. Z. B. 24 Groschen und 288 Pfennige zeigen einerley Summe an, denn jedes ist so viel als ein Thaler, also sind 24 Groschen gleich 288 Pfennigen, welches man mathematisch durch das gewöhnliche Zeichen der Gleichheit = folgendergestalt auszudrücken und eine Aequation oder Gleichung zu nennen pflegt.

24 Groschen = 288 Pfennige.

Aber solche Gleichungen aus dem Gegebenen zu finden, ist das eigentliche Geschäft der Analysis.

II. Ca-

II. Capitel.

Von der Addition und Subtraction einfacher Größen.

§. 8.

Wenn zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addirt werden soll, so wird solches durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und plus ausgesprochen wird.

Also wird durch $5 + 3$ angedeutet, daß zu der Zahl 5 noch 3 addirt werden soll, da man denn weiß, daß 8 heraus kommt: eben so z. B.

$12 + 7$ ist 19; $25 + 16$ ist 41; und $25 + 41$ ist 66. u.s.w.

§. 9.

Durch dieses Zeichen (+) pflegen auch mehrere Zahlen verbunden zu werden, als z. B.

$7 + 5 + 9$, wodurch angezeigt wird, daß zu der Zahl 7 noch 5, und überdies noch 9 addirt werden sollen, welches 21 ausmacht. Hieraus ersieht man, was folgender Ausdruck bedeutet, als:

$$8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 13 + 10,$$

nemlich die Summe aller dieser Zahlen, welche 61 beträgt.

§. 10.

Wie dieses für sich klar ist, so ist noch zu merken, daß auf eine allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, als a, b, c, d, u. s. w. angedeutet werden, wenn man also schreibt $a + b$, so bedeutet dieses die Summe der beyden Zahlen, welche durch a und b ausgedrückt werden, dieselben mögen nun so groß oder klein seyn, als sie wollen. Eben so bedeutet $f + m + b + x$ die Summe der Zahlen, welche durch diese Buchstaben ausgedrückt werden.

Wenn man also nur weiß, was für Zahlen durch Buchstaben angedeutet werden, so findet man durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth von dergleichen Ausdrücken in jedem andern Fall.

§. 11.

Wenn hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen (—) angedeutet, welches man minus oder weniger ausspricht, und vor diejenige Zahl setzt, die subtrahirt werden soll.

So bedeutet z. B. der Ausdruck $8 - 5$ daß von der Zahl 8 die Zahl 5 soll weggenommen werden, da dann, wie bekannt ist, 3 übrig bleibt. Eben so ist $12 - 7$ so viel, als 5, und $20 - 14$, so viel als 6, u. s. w.

§. 12.

Es kann auch geschehen, daß von einer Zahl mehr Zahlen zugleich subtrahirt werden sollen. z. B. $50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9$.

Welches also zu verstehen ist: nimmt man zuerst 1 von 50 weg, so bleiben 49; davon 3 weggenommen, bleiben 46; davon 5, bleiben 41; davon 7, bleiben 34; davon die letzten 9 weggenommen, bleiben 25; welches der Werth des vorgegebenen Ausdrucks ist. Aber da die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, insgesammt weggenommen werden sollen, so ist es eben so viel, als wenn man ihre Summe, nemlich 25, auf einmal von 50 abzieht, da dann, wie vorher, 25 übrig bleiben.

§. 13.

Eben so läßt sich auch leicht der Werth solcher Ausdrücke bestimmen, in welchen beyde Zeichen + und — vorkommen; z. B.

12 — 3 — 5 + 2 — 1 ist so viel als 5.

Oder man darf nur die Summe der Zahlen, die + vor sich haben, besonders nehmen, als:

12 + 2 machen 14, und davon die Summe aller Zahlen, die — vor sich haben, welche sind 3, 5, 1, das ist 9 abziehen, da dann, wie vorher, 5 gefunden wird.

§. 14.

Hieraus ist klar, daß es hierbey gar nicht auf die Ordnung der hergesetzten Zahlen ankomme, sondern daß man sie nach Belieben versetzen könne, wenn nur eine jede das ihr vorstehende Zeichen behält. So kann man, anstatt der obigen Formel, setzen:

12 + 2 — 5 — 3 — 1 oder 2 — 1 — 3 — 5 + 12
oder 2 + 12 — 3 — 1 — 5.

Wobey aber zu merken ist, daß im ersten Ausdruck vor der Zahl 12 das Zeichen + vorgesetzt verstanden werden muß. Denn man pflegt dieses Zeichen beym Anfang eines Ausdrucks gemeiniglich wegzulassen.

§. 15.

Wenn nun, um die Sache allgemein zu machen, anstatt der gewöhnlichen Zahlen, Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung davon. Z. B.

a — b — c + d — e deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedrückte Zahlen zusammen genommen, und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen — haben, insgesammt weggenommen werden sollen.

§. 16.

Hier kömmt es also hauptsächlich darauf an, was für ein Zeichen eine jede Zahl vor sich stehen hat;

daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen, welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive; diejenigen aber, welche das Zeichen — vor sich haben, verneinende oder negative Größen zu nennen.

§. 17.

Dieses läßt sich sehr gut durch die Art erläutern, wie man das Vermögen einer Person anzuzeigen pflegt; da dasjenige, was jemand wirklich besitzt, durch positive Zahlen mit dem Zeichen +, dasjenige aber, was er schuldig ist, durch negative Zahlen mit dem Zeichen — ausgedrückt wird. Also wenn jemand 100 Rubel hat, dabey aber 50 Rubel schuldig ist, so wird sein Vermögen seyn:

100 — 50, oder, welches einerley
+ 100 — 50, das ist 50.

§. 18.

Da nun die negativen Zahlen als Schulden betrachtet werden können, in so fern die positiven Zahlen die wirklichen Besitzungen anzeigen; so kann man sagen, daß die negativen Zahlen weniger sind, als nichts. Wenn jemand z. B. nichts im Vermögen hat, und noch dazu 50 Rubel schuldig ist, so hat er wirklich 50 Rubel weniger als nichts. Denn wenn ihm jemand 50 Rubel schenken sollte, um seine Schulden zu bezahlen, so würde er alsdann erst nichts haben, da er doch itzt mehr hat, als vorher.

§. 19.

Wie nun die positiven Zahlen unstreitig größer als nichts sind, so müssen die negativen Zahlen kleiner als nichts seyn. Die positiven Zahlen aber entste-

entstehen, wenn man erstlich zu o, oder Nichts, immerfort Eins zusetzt, da dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen entspringt, nemlich:

$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$

und so fort ohne Ende.

Wird aber diese Reihe rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entspringt folgende Reihe der negativen Zahlen.

$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$

und so ins unendliche.

§. 20.

Alle diese Zahlen, sowohl positive als negative, führen den bekannten Namen der ganzen Zahlen, welche also entweder größer oder kleiner sind, als nichts. Man nennet sie ganze Zahlen, um sie von den gebrochenen, und von vielerley andern Zahlen, wovon unten gehandelt werden soll, zu unterscheiden. Denn da z. B. 50 um ein Ganzes größer ist als 49, so begreift man leicht, daß zwischen 49 und 50 noch unendlich viel Mittelzahlen statt finden können, welche alle größer als 49, und doch alle kleiner als 50 sind. Man darf sich zu diesem Ende nur 2 Linien vorstellen, wovon die eine 50 Fuß, die andere aber 49 Fuß lang ist, so wird man leicht begreifen, daß man unendlich viele andere Linien ziehen kann, welche alle länger als 49, und doch kürzer als 50 Fuß sind.

§. 21.

Dieser Begriff von den verneinenden oder negativen Größen ist um so sorgfältiger zu bemerken, da er in der ganzen Algebra von der größten Wichtigkeit ist. Hier wird es genug seyn, zum Voraus noch zu bemerken, daß diese Ausdrücke:

$+1-1, +2-2, +3-3, +4-4,$ u. s. f. alle so viel sind, als 0, oder Nichts: ferner, daß z. B. $+2-5$ so viel ist als -3; denn wenn einer 2 Rubel hat, und 5 Rubel schuldig ist, so hat er nicht nur nichts, sondern bleibt noch 3 Rubel schuldig: eben so ist,

$7-12$ so viel als -5
$25-40$ so viel als -15.

§. 22.

Eben dieses ist auch zu beobachten, wenn auf eine allgemeine Art anstatt der Zahlen Buchstaben gebraucht werden, da denn immer $+a-a$, so viel ist als 0, oder nichts. Wenn man wissen will, was z. B. $+a-b$ bedeute, so sind zwey Fälle zu erwägen.

1) Wenn a größer ist als b, so subtrahiret man b von a, und der Rest, positiv genommen, ist der gesuchte Werth.

2) Wenn a kleiner ist als b, so subtrahirt man a von b, und der Rest, negativ genommen, oder das Zeichen — vorgesetzt, zeigt den gesuchten Werth an.

1. Zusatz. Die positiven und negativen Größen pflegt man auch überhaupt entgegengesetzte Größen zu nennen, die also in allen denjenigen Fällen statt finden, wo man Größen von einerley Art hat, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden können, vermöge welcher eine die andere vermindert. So sind z. B. Vermögen und Schulden, Einnahme und Ausgabe, vorwärts und rückwärts gehende Bewegung, Steigen und Fallen u. s. w. entgegengesetzte Größen, und es hängt bloß von meiner Willkühr ab, welche ich für positiv annehmen will. Ausgabe ist eine verneinende Einnahme, und Einnahme kann als verneinende Ausgabe angesehen werden. Nenne ich den Weg von Berlin nach Magdeburg positiv, so muß ich den Weg von Magdeburg nach Berlin negativ nennen, und umgekehrt, nenne ich den Weg von Magdeburg nach Berlin positiv, so muß ich den Weg von Berlin nach Magdeburg negativ nennen, und so in allen übrigen Fällen.

2. Zusatz. Aus dem bisher gesagten ist klar, daß die Zeichen (+ —) bey entgegengesetzten Größen bloß das Bejahte und Verneinte ausdrücken, welches man sich bey ihnen denkt: sie beziehen sich nur auf die Bedingungen, und gehen die Größe der Sache gar nichts an.

Der Weg nach Norden sey positiv, so ist der Weg nach Süden negativ. Schreibe ich nun + 3 Meilen und — 3 Meilen, so ist der zweyte Weg eben so gut 3 Meilen als der erste, und durch (+ —) wird man nur erinnert, bey + 3 an den Weg nach Norden, bey — 3 aber an den Weg nach Süden zu denken. Demnach würde man statt positive, oder negative Größe, richtiger positiv oder negativ ausgedrückte Größe sagen.

3. Zusatz. Aus dem vorhergehenden erhellet auch deutlich, daß man sagen könne, die positive Größe sey weniger als nichts; sie ist nemlich weniger als nichts in Absicht auf die entgegengesetzte. Offenbar hat der, welcher 100 Thaler Vermögen hat, weniger als nichts von dem entgegengesetzten, denn um nichts von dem entgegengesetzten zu haben, mußte er 100 Thaler schuldig seyn, er würde also alsdann erst etwas von dem entgegengesetzten haben, wenn er mehr als 100 Thaler schuldig wäre.

Aber nur in diesem Verstande kann man eine positive oder negative Größe weniger als nichts nennen. An sich selbst ist jede von den genannten Größen mehr als nichts, weil sie wirkliche Größen sind. Es kömmt nemlich hier auf eine Bedeutung des Wortes Nichts an, welches in dem obigen Verstande genommen, nur ein relatives, kein absolutes Nichts seyn soll. Auch unter mehreren verneinten Größen einerley Art, als — 1, — 2, — 3, u. s. f. wird man diejenige für kleiner halten, welche als Größe, ohne Rücksicht auf das vorangesetzte Zeichen (—) größer ist; so wird — 7 eine kleinere Zahl als — 6, diese kleiner als — 5 u. s. f. seyn. Je größer nemlich eine Zahl a an sich betrachtet, ist, desto weniger als nichts wird — a von dem Entgegengesetzten bedeuten, weil ein desto größeres Entgegengesetztes + a erfordert wird, wenn es mit — a nichts geben soll.

4. Zusatz. Bisher haben die Mathematiker nur die negativen Größen für weniger als Nichts betrachtet. Wenn daher Vermögen als positiv betrachtet wird, so kann man die Schulden als negatives Vermögen ansehen, und alsdann sind Schulden im obigen Verstande weniger als Nichts vom Vermögen. Betrachtet man aber die Schulden als positiv, und das Vermögen als negativ,

negativ, so ist alsdann das Vermögen weniger als Nichts von den Schulden.

Dieses rechtfertiget mich, wenn ich sage, positive Größen sind weniger als nichts, denn von ihnen läßt sich gewiß dasselbe als von negativen Größen, behaupten.

5. Zusatz. Der bekannte Grundsatz der Arithmetik, daß, wenn man von zween ungleichen Zahlen eine und eben dieselbe dritte Zahl abziehet, die größere Zahl einen größeren und die kleinere einen kleinern Rest giebt, mag ein Beyspiel geben, daß man durch ganz gemeine Rechnungen veranlaßt werden kann, sich solche Vorstellungen von bejahten und verneinten Zahlen zu machen, wobey man jene für größer, und diese für kleiner als nichts hält, und daß dies nur in der vorhin erklärten Bedeutung genommen werden kann.

Was auch a, b, c immer für Zahlen sind, so ist doch allemahl

$$a < a + b: \text{ also auch}$$
$$a - (a+b) < a+b - (a+b), \text{ oder}$$
$$a - a - b < 0, \text{ oder } -b < 0$$

Es ist ferner auch $a < a + b + c$, folglich auch

$$a - (a+b) < a + b + c - (a+b), \text{ oder}$$
$$-b < +c$$

Das heißt: jede verneinte Zahl $-b$ ist kleiner als Null, und kleiner als jede bejahte Zahl $+c$

Dieses scheint nun unwiderleglich dargethan. Allein will man alles genau nehmen, so muß man bekennen, daß die vorhin gemachten Schlüsse nichts anders beweisen, als daß man oft einen arithmetischen Grundsatz da anwendet, wo er gar nicht anwendbar ist, oder von ihm mehr verlangt, als er wirklich geben kann: der Grundsatz setzt nemlich die Möglichkeit der Abziehung, und der dadurch zu erhaltenden Reste voraus, da doch dieses hier unmöglich ist, indem eine größere Zahl $a + b$ von einer kleinern a abgezogen werden soll, und $-b$, die hier zum Resultat herauskömmt, bedeutet nichts anders, als eine Zahl b, welche abgezogen werden müßte, wenn eine da wäre, wovon der Abzug geschehen könnte.

Anmerk. Aus allem, was im 3, 4 und 5ten Zusatz gesagt worden ist, erhellet, wie, so zu sagen, unmathematisch man reden muß, um die im 5. Zusatz enthaltenen Vorstellungen

stellungen zu rechtfertigen, zu welchen gewisse Rechnungen zu führen scheinen: es ist daher auch rathsam, diese unmathematische Sprache überall, wo es sich thun läßt, zu vermeiden, oder recht zu gebrauchen, wo sie nicht vermieden werden kann. Nimmt man den Ausdruck, weniger als nichts, nicht in dem Verstande, als solcher im 3ten Zusatz erklärt worden ist, so ist er falsch, und hat wirklich Mathematikverständige zu irrigen Vorstellungen von den verneinenden Größen verführet.

III. Capitel.

Von der Multiplication mit einfachen Größen.

§. 23.

Wenn zwey oder mehr gleiche Zahlen zusammen addirt werden, so läßt sich die Summe auf eine kürzere Art ausdrücken. Denn so ist

$a + a$ so viel als $2 . a$, und
$a + a + a$ so viel als $3 . a$, ferner
$a + a + a + a$ so viel als $4 . a$, u. s. w.

Woraus der Begriff von der Multiplication entspringt, da nämlich

$2 . a$ so viel ist, als 2 mal a, und
$3 . a$ so viel als 3 mal a, ferner
$4 . a$ so viel als 4 mal a, u. s. f.

1. Zusatz. Das Multiplicationszeichen ist (.) oder ($\times$). Also 5 mal 6, kann ich auch so andeuten: $5 . 6$ oder 5×6.

2. Zusatz. Aus der gemeinen Rechenkunst ist bekannt, daß die Zahlen, die mit einander multiplicirt werden, den gemeinschaftlichen Nahmen Factoren haben, was herauskommt, heißt alsdann das Factum, oder Product, auch nennt man besonders den einen von zwey Factoren, der multipliciret werden

werden soll, den **Multiplicandus**, und den, womit multiplicirt wird, den **Multiplicator**.

§. 24.

Wenn also eine durch einen Buchstaben ausgedrückte Größe mit einer beliebigen Zahl multipliciret werden soll, so wird die Zahl bloß vor den Buchstaben geschrieben. Z. B.

a mit 20 multiplicirt giebt, 20 a, und
b mit 30 multiplicirt giebt, 30 b, u. s. w.

Solchergestalt ist ein c, einmal genommen, oder 1 c, so viel als c.

§. 25.

Dergleichen Producte können auch noch weiter leicht mit andern Zahlen multiplicirt werden. Z. B.

2 mal 3 a macht 6 a
3 mal 4 b macht 12 b
5 mal 7 x macht 35 x

welche noch ferner mit andern Zahlen sich multipliciren lassen.

§. 26.

Wenn die Zahl, mit welcher multipliciret werden soll, auch durch einen Buchstaben ausgedrückt wird, so pflegt man diesen Buchstaben dem andern Buchstaben unmittelbar vorzusetzen. Z. B. wenn b mit a multipliciret werden soll, so heißt das Product ab, und pq ist das Product, welches entstehet, wenn man die Zahl q mit p multiplicirt. Will man pq noch ferner mit a multipliciren, so kömmt heraus apq.

§. 27.

Hiebey ist wohl zu merken, daß es auch hier nicht auf die Ordnung der an einander gesetzten Buch-

Buchstaben ankomme, indem ab eben so viel ist, als ba; oder b und a mit einander multiplicirt, macht eben so viel, als a mit b multiplicirt. Um dieses zu begreifen, darf man nur für a und b bekannte Zahlen, als 3 und 4 nehmen, so giebt es sich von selbst: nemlich 3 mal 4 ist eben so viel, als 4 mal 3.

1. Zusatz. Daß ab gleich ba ist, davon überzeugt man sich ganz allgemein, wenn man so viel Punkte in einer Reihe vor sich hinschreibt, als der eine Factor z. B. a, Einheiten hat, und unter diese Reihe noch so viel solche Reihen, weniger eine, darunter setzt, als der andere Factor, hier b Einheiten hat, hiedurch wird man deutlich überführt, daß b Reihen über oder unter einander stehen, wovon jede a Punkte enthält, demnach alle Reihen zusammen ab Punkte enthalten; ferner neben einander stehen a Reihen, in jeder b Punkte, mithin in allen a Reihen zusammen ba Punkte. Folglich ist ab = ba.

2. Zusatz. Da ab = ba, so ist auch abcd = bacd = = bcad = bcda u. s. w. Dieses gilt, wie man leicht siehet, wenn auch mehrere Factoren vorhanden sind; demnach ist der Satz allgemein wahr, daß einerley Factoren in veränderter Ordnung einerley Product geben.

§. 28.

Wenn statt der Buchstaben, welche unmittelbar an einander geschrieben sind, Ziffern gesetzt werden sollen, so sieht man leicht, daß dieselben alsdann nicht unmittelbar hinter einander geschrieben werden können. Denn wenn man statt 3 mal 4 schreiben wollte 34, so würde solches nicht zwölf, sondern vier und dreißig heißen. Wenn daher eine Multiplication mit bloßen Zahlen angedeutet werden soll, so pflegt man einen Punkt oder das Zeichen $\times$ zwischen dieselben zu setzen. Z. B.

3 . 4, bedeutet 3 mal 4, das ist 12. Eben so ist 1 . 2 oder 1 $\times$ 2 so viel als 2, und 1 . 2 . 3 ist 6. Ferner 1 . 2 . 3 . 4 . 56, ist 1344, und 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10, ist 3628800. u. s. f.

§. 29.

Hieraus ergiebt sich nun auch, was ein solcher Ausdruck $5.7.8.abcd$ bedeute; nemlich die Zahl 5 wird erstlich mit 7 multiplicirt, das Product ferner mit 8, dieses Product hernach mit a, und dieses wieder mit b, sodann mit c, und endlich mit d; wobey zu merken, daß statt $5.7.8$, der Werth davon, nemlich die Zahl 5 mal 7, ist 35, und 8 mal 35 das ist 280 geschrieben werden kann.

§. 30.

Ferner ist zu merken, daß solche Ausdrücke, die aus der Multiplication mehrerer Zahlen entstehen, Producte genannt werden, Zahlen oder Buchstaben aber, welche einzeln sind, pflegt man Factoren zu nennen. Siehe §. 23. 2ter Zusatz.

§. 31.

Bis hieher haben wir nur positive Zahlen betrachtet, und da ist gar kein Zweifel, daß die daher entstehenden Producte nicht auch positiv seyn sollten. Nemlich $+a$ mit $+b$ multiplicirt, giebt unstreitig $+ab$. Was aber heraus komme, wenn $+a$ mit $-b$, oder $-a$ mit $-b$ multiplicirt werde, erfordert eine besondere Erklärung.

§. 32.

Wir wollen erstlich $-a$ mit 3 oder $+3$ multipliciren. Weil nun $-a$ als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß, wenn diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden müsse. Folglich wird das gesuchte Product $-3a$ seyn. Und wenn daher $-a$ mit b, das ist, mit $+b$ multiplicirt werden soll, so wird heraus kommen $-ba$, oder, welches einerley ist, $-ab$.

— ab. Hieraus ziehen wir den Schluß, daß, wenn eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde; woher sich diese Regel ergiebt: Positives mit Positivem, oder + mit + multiplicirt, giebt +, oder ein positives Product. Hingegen + mit —, oder — mit +, d. i. Positives mit Negativem, oder Negatives mit Positivem multiplicirt, giebt —, oder ein negatives Product.

§. 33.

Nun ist also noch ein Fall zu bestimmen übrig, nemlich, wenn — mit —, z. B. — a mit — b multiplicirt wird. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, ab; ob aber das Zeichen + oder — davor zu setzen sey, ist noch ungewiß; doch so viel ist gewiß, daß es entweder das eine, oder das andere seyn müsse. Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen — seyn. Denn — a mit + b multiplicirt, giebt — ab; und also — a mit — b multiplicirt, kann nicht eben das geben, was — a mit + b giebt; sondern es muß das Gegentheil herauskommen, nemlich das Product, + ab. Hieraus entsteht diese Regel: Negatives mit Negativem, oder — mit — multiplicirt, giebt + eben sowohl, als + mit +.

§. 34.

Diese Regeln pflegen auch zusammen gezogen und kurz mit diesen Worten ausgedrückt zu werden: Zwey gleiche Zeichen mit einander multiplicirt, geben +, zwey ungleiche Zeichen aber geben —. Wenn also diese Größen:

$+ a, - b, - c, + d,$

mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt erstlich $+ a$ mit $- b$ mult. $- ab$, dieses mit $- c$, giebt $+ abc$, und dieses endlich mit $+ d$ multiplicirt, giebt $+ abcd$.

§. 35.

Da nun die Sache in Ansehung der Zeichen keine Schwierigkeit hat, so ist noch übrig zu zeigen, wie zwey Zahlen, die schon Producte sind, mit einander multiplicirt werden sollen. Wenn die Zahl ab mit der Zahl cd multiplicirt werden soll, so ist das Product abcd, und entsteht also, wenn man erstlich ab mit c, und das, was man durch die Multiplication gefunden, ferner mit d multiplicirt.

Weil bestimmte Zahlen solches am besten erläutern, so sey z. B. die Zahl 36 mit 12 zu multipliciren; weil nun 12 so viel ist, als 3 mal 4, so hat man nur nöthig 36, erstlich mit 3 und das gefundene, nemlich 108, ferner mit 4 zu multipliciren, da man denn erhält:

432. welches so viel ist, als 12 mal 36.

§. 36.

Will man aber 5ab mit 3cd multipliciren, so könnte man auch wohl sagen 3cd5ab; da es aber hier nicht auf die Ordnung der mit einander multiplicirten Zahlen ankömmt, so pflegt man die Ziffern zuerst zu setzen, und schreibt das Product 5 . 3 . abcd, oder 15abcd; weil 5 mal 3 so viel ist, als 15.

Eben so, wenn 12pqr mit 7xy, multipliciret werden soll, erhält man 12 . 7pqrxy, oder 84pqrxy.

IV. Ca-

IV. Capitel.

Von der Natur der ganzen Zahlen in Absicht auf ihre Factoren.

§. 37.

Wir haben bemerkt, daß ein Product aus zwey oder mehr mit einander multiplicirten Zahlen entstehe. Diese Zahlen werden die Factoren davon genannt.

Also sind die Factoren des Products abcd die Größen a, b, c, d.

§. 38.

Zieht man nun alle ganze Zahlen in Betracht, in sofern dieselben durch die Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen entstehen können, so wird man bald finden, daß einige gar nicht durch die Multiplication entspringen, und also keine Factoren haben, andere aber aus zwey und auch mehr Zahlen mit einander multiplicirt entstehen können, folglich zwey oder mehr Factoren haben. So ist z. B.

4 so viel als 2 . 2; ferner 6 so viel als 2 . 3, und
8 so viel als 2 . 2 . 2; ferner 27 so viel als 3 . 3 . 3, u.
10 so viel als 2 . 5, u. s. f.

§. 39.

Hingegen lassen sich die folgenden Zahlen:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, u. s. f.

nicht auf diese Art durch Factoren vorstellen, es wäre denn, daß man auch 1 zu Hülfe nehmen, und z. B. 2 durch 1 . 2, vorstellen wollte. Allein da mit 1 multiplicirt die Zahl nicht verändert wird, so wird auch 1 nicht unter die Factoren gezählt.

Alle diese Zahlen nun, welche nicht durch Factoren vorgestellt werden können, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 u. s. f.

werden einfache Zahlen, oder Primzahlen; die übrigen aber, welche sich durch Factoren vorstellen lassen, als:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 u. s. f.

zusammengesetzte Zahlen genannt.

§. 40.

Die einfachen oder Primzahlen verdienen also besonders in Erwägung gezogen zu werden; weil dieselben aus keiner Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen mit einander entstehen können. Wobey besonders dieses merkwürdig ist, daß, wenn dieselben der Reihe nach geschrieben werden, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 u. s. f.

darinn keine gewisse Ordnung wahrgenommen wird, sondern dieselben bald um mehr, bald um weniger fortspringen; und es hat auch bisher kein Gesetz, nach welchem sie fortgingen, ausfindig gemacht werden können.

Anmerk. Primzahlen sind in folgenden Schriften gesammlet: Johann Gottlob Krügers, Prof. der Arzneygel. zu Halle, Gedanken von der Algebra, nebst den Primzahlen von 1 bis 100000 (auf dem Titel steht falsch 1000000). Halle 1746. Peter Jäger, Roßschreiber und Quartiermeister zu Nürnberg, hatte diese Zahlen berechnet, auch eine vollständige anatomiam numerorum zu verfertigen gesucht. Lamberts Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen. Berlin 1770. enthalten außer anderen in verschiedenen Theilen der Mathematik sehr nützlichen

lichen Tabellen auch die Primzahlen von 1 bis 102000. Die Akademie der Wissenschaften zu Paris besitzt dergleichen Tabellen von Hrn. P. Mercastel und von Hrn. du Tour — bis jetzt sind solche aber noch nicht heraus gegeben. Eine Nachricht davon findet sich im 5ten Bande der Memoires étrangers présentés à l'Academie, bey Gelegenheit eines Memoire des Hrn. Rallier des Ourmes.

§. 41.

Die zusammengesetzten Zahlen aber, welche sich durch Factoren vorstellen lassen, entspringen alle aus den obigen Primzahlen, so daß alle Factoren davon Primzahlen sind. Denn wenn je ein Factor keine Primzahl, sondern zusammengesetzt wäre, so würde man denselben wieder durch zwey oder mehr Factoren, die Primzahlen wären, vorstellen können. Also wenn die Zahl 30 durch 5 . 6 vorgestellt wird, so ist 6 keine Primzahl, sondern 2 . 3, und also kann 30 durch 5 . 2 . 3, oder durch 2 . 3 . 5 vorgestellt werden, wo alle Factoren Primzahlen sind.

§. 42.

Erwägt man nun alle zusammengesetzte Zahlen, wie solche durch Primzahlen vorgestellt werden können, so findet sich darinn ein großer Unterschied, indem einige nur zwey dergleichen Factoren haben, andere drey oder mehr. Also ist, wie wir schon gesehen haben,

4 so viel als 2 . 2,	6 so viel als 2 . 3,
8 - - - 2.2.2,	9 - - - - - 3.3,
10 - - - - 2.5,	12 - - - - 2.3.2,
14 - - - - 2.7,	15 - - - - - 3.5,
16 - 2.2.2.2,	und so fort.

§. 43.

Hieraus läßt sich begreifen, wie man von einer jeden Zahl ihre einfachen Factoren finden kann.

Wäre also die Zahl 360 gegeben, so hat man für dieselbe erstlich 2 . 180.

Nun aber ist

180 so viel als - - 2.90, und
90 so viel als - - 2.45, und
45 so viel als - - 3.15, und
15 so viel als - - 3.5.

Folglich wird die Zahl 360 durch folgende einfache Factoren vorgestellt:

2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5.

als welche Zahlen alle mit einander multiplicirt die Zahl 360 hervorbringen.

Anmerk. Joh. Mich. Poetii gründliche Anleitung zu der unter den Gelehrten jetzt üblichen arithmetischen Wissenschaft, vermittelst einer parallelen Algebra; Frkf. u. Lpz. 1728; hat am Ende eine Anatomiam Numerorum oder Zergliederung der Zahlen von 1 bis 10000. Diese Zahlen findet man jetzt auch in andern Büchern abgedruckt, z. B. im Vollst. Mathem. Lexicon; II. Theil. Leipz. 1742. Bequemere Einrichtungen solcher Tabellen sind nachher von Lambert, Felkel und Hindenburg angegeben. Hr. Felkel hat solche Tabellen durch ein ihm eigenes mechanisches Verfahren berechnet von 1 bis 2 Millionen, davon ein völlig correctes Manuscript in dem Archiv des k. k. Hofkriegsrathes zu Wien vorhanden ist, ganz nach der Einrichtung der davon abgedruckten 17 Bogen. Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3, und 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 408000. Hr. Hindenburg hat für seine Factoren-Tafeln weit bessere Einrichtungen als Hr. Felkel gefunden, und nach einer ihm ganz eigenen Erfindung berechnet er diese Tabelle auf eine mechanische Art mit unglaublicher Geschwindigkeit. — Schade, daß der Hr. Professor bis jetzt noch nicht Gelegenheit gefunden hat, diese Tafeln durch den Druck bekannter zu machen. In Kästners Fortsetzung der Rechenkunst, findet man Seite 540 u. f. mehrere hieher gehörige litterarische Nachrichten. Ich habe selbst auch Erfindungen gemacht, vermittelst welcher ich dergleichen Tabellen äußerst leicht mechanisch hinschreiben kann.

§. 44.

Wir sehen also hieraus, daß sich die Primzahlen durch keine andere Zahlen theilen lassen, hingegen die zusammengesetzten Zahlen am füglichsten in ihre einfachen Factoren aufgelöset werden, wenn man alle einfache Zahlen sucht, durch welche sich dieselben theilen lassen. Allein hiebey wird die Division gebraucht, von welcher in dem folgenden Capitel gehandelt werden soll.

V. Capitel.

Von der Division mit einfachen Größen.

§. 45.

Wenn eine Zahl in 2, 3, oder mehr gleiche Theile zertheilt werden soll, so geschieht solches durch die Division, welche die Größe eines solchen Theils bestimmen lehret. Also wenn die Zahl 12 in drey gleiche Theile zertheilt werden soll, so findet man durch die Division, daß ein solcher Theil 4 sey.

Man bedienet sich aber dabey gewisser Namen. Die Zahl, die zertheilt werden soll, heißt der Dividendus oder das Dividend, oder die zu theilende Zahl; die andere Zahl aber, welche anzeigt, in wie viel Theile die erstere zergliedert werden soll, wird der Divisor oder Theiler genannt. Die Größe eines solchen Theils aber, welcher durch die Division gefunden wird, pflegt der Quotus oder Quotient genannt zu werden. Also ist in dem angeführten Beyspiele

12 das Dividend, oder die zu theilende Zahl.
3 der Divisor oder Theiler, und
4 der Quotus oder Quotient.

§. 46.

Wenn man also eine Zahl durch 2 theilt, oder in 2 gleiche Theile zergliedert, so muß ein solcher Theil, d. i. der Quotient, zweymal genommen, gerade die vorgegebene Zahl ausmachen. Eben so, wenn eine Zahl durch 3 getheilt werden soll, muß der Quotient 3 mal genommen, dieselbe Zahl ausmachen; ja es muß überhaupt immer das Dividend herauskommen, wenn man den Quotienten und den Divisor mit einander multiplicirt.

§. 47.

Daher wird auch die Division eine Rechnungsart genannt, welche für den Quotienten eine solche Zahl finden lehrt, die, mit dem Divisor multiplicirt, gerade die zu theilende Zahl hervorbringet. Wenn also z. B. 35 durch 5 getheilt werden soll, so sucht man eine Zahl, welche mit 5 multiplicirt, 35 giebt. Diese Zahl ist daher 7; weil 5 mal 7 das Product 35 giebt. Man pflegt sich dabey dieses Ausdrucks zu bedienen: 5 in 35 habe ich 7 mal; denn 5 mal 7 ist 35.

§. 48.

Man stellt sich also das Dividend als ein Product vor, von welchem der eine Factor dem Divisor gleich ist, da denn der andre Factor den Quotienten anzeigt.

Wenn ich also 63 durch 7 dividiren soll, so suche ich ein Product, davon der eine Factor 7, und der andere also beschaffen ist, daß, wenn derselbe mit dieser 7 multiplicirt wird, genau 63 heraus kommen.

Ein

Ein solches ist nun 7 . 9, und deßwegen ist 9 der Quotient, welcher entspringt, wenn man 63 durch 7 dividirt.

§. 49.

Wenn daher auf eine ganz allgemeine Art die Zahl ab durch a getheilt werden soll, so ist der Quotient offenbar b; weil a mit b multiplicirt, das Dividend ab ausmacht. Hieraus ist ferner klar, daß, wenn man ab durch b dividiren soll, der Quotient a seyn werde.

Also muß überhaupt in allen Divisionsexempeln, wenn man das Dividend durch den Quotienten dividirt, der Divisor herauskommen. Z. B. da 24 durch 4 dividirt 6 giebt; so giebt auch umgekehrt 24 durch 6 dividirt 4.

§. 50.

Da nun alles darauf ankömmt, daß man das Dividend durch zwey Factoren vorstelle, deren einer dem Divisor gleich ist, weil alsdann der andere den Quotienten anzeigt; so wird man die folgenden Exempel leicht verstehen. Erstlich das Dividend abc durch a dividirt, giebt bc; weil a mit bc multiplicirt, abc ausmacht. Eben so kömmt, wenn abc durch b dividirt wird, ac heraus; und abc durch ac dividirt, giebt b. Hernach 12mn durch 3m dividirt, giebt 4n; weil 3m mit 4n multiplicirt 12mn ausmacht. Wenn aber eben diese Zahl 12mn durch 12 dividirt werden sollte, so würde mn herauskommen.

§. 51.

Weil eine jede Zahl a durch 1 . a ausgedrückt werden kann, so ist hieraus offenbar, daß, wenn man a oder 1 . a durch 1 theilen soll, alsdenn eben dieselbe Zahl a für den Quotienten heraus kömmt.

Hin-

Hingegen wenn eben dieselbe Zahl a oder 1 . a durch a getheilet werden soll, so wird der Quotient 1 seyn.

§. 52.

Es geschieht aber nicht immer, daß man das Dividend als ein Product von zwey Factoren vorstellen kann, deren einer dem Divisor gleich ist, und in solchen Fällen läßt sich die Division nicht auf diese Art bewerkstelligen. Denn wenn ich z. B. 24 durch 7 dividiren soll, so ist die Zahl 7 kein Factor von 24; weil 7 . 3 nur 21, und also zu wenig, hingegen 7 . 4 schon 28, und also zu viel ausmacht; doch sieht man hieraus, daß der Quotient größer seyn müsse als 3, und doch kleiner als 4. Daher, um denselben genau zu bestimmen, eine andere Art von Zahlen, die sogenannten Brüche, zu Hülfe genommen werden muß, wovon in einem der folgenden Capitel gehandelt werden soll.

§. 53.

Ehe man aber zu den Brüchen fortschreitet, so begnügt man sich, für den Quotienten die nächst kleinere ganze Zahl anzunehmen, dabey aber den Rest zu bestimmen, welcher übrig bleibt. So sagt man z. B. 7 in 24 habe ich 3 mal, der Rest aber ist 3, weil 3 mal 7 nur 21 macht, welche Zahl um 3 zu klein ist. Eben so ist folgendes Exempel zu verstehen:

6 | 34 | 5	nemlich der Divisor ist	6,
| 30 |	das Dividend ist	34,
4	der Quotient ist	5,
	der Rest ist	4,
9 | 41 | 4	und hier ist der Divisor	9,
| 36 |	das Dividend	41,
5	der Quotient	4,
	der Rest	5,

§. 54.

In solchen Exempeln, wo ein Rest übrig bleibt, ist folgende Regel zu merken:

Wenn man den Theiler mit dem Quotienten multiplicirt, und zum Product noch den Rest addirt, so muß der Dividendus herauskommen; und auf diese Art pflegt man die Division zu probiren, ob man recht gerechnet habe oder nicht.

Wird also in dem ersten der zwey letztern Exempel, der Divisor 6 mit dem Quotienten 5 multiplicirt, welches 30 giebt, und hierzu der Rest 4 addirt, so kömmt gerade der Dividendus 34 heraus.

Ebenfalls in dem letzten Exempel, wenn man den Theiler 9 mit dem Quotienten 4 multiplicirt, und zum Product 36 noch den Rest 5 addirt, so erhält man das Dividend 41.

§. 55.

Endlich ist hier auch noch nöthig, in Ansehung der Zeichen + und — anzumerken, daß, wenn $+ab$ durch $+a$ dividirt wird, der Quotient $+b$ seyn werde, welches für sich klar ist.

Wenn aber $+ab$ durch $-a$ dividirt werden soll, so wird der Quotient $-b$ seyn, weil $-a$ mit $-b$ multiplicirt $+ab$ ausmacht.

Wenn ferner das Dividend $-ab$ durch den Theiler $+a$ dividirt werden soll, so wird der Quotient $-b$ seyn, weil $+a$ mit $-b$ multiplicirt $-ab$ d. i. den Dividendus giebt.

Soll endlich das Dividend $-ab$ durch den Divisor $-a$ getheilt werden, so wird der Quotus $+b$ seyn, weil $-a$ mit $+b$ multiplicirt $-ab$ ausmacht.

§. 56.

§. 56.

Es finden also bey der Division für die Zeichen + und — eben dieselben Regeln statt, welche wir oben bey der Multiplication angemerkt haben, nemlich:

+ durch + giebt +
+ durch — giebt —
— durch + giebt —
— durch — giebt +

oder kürzer: gleiche Zeichen geben plus, ungleiche aber minus.

§. 57.

Wenn also + 18pq durch — 3p dividiret werden soll, so wird der Quotient — 6q seyn. Denn — 3p multiplicirt durch — 6q macht + 18pq.

Ferner — 30xy durch + 6y dividirt, giebt — 5x, weil das Product aus + 6y in — 5x dem Dividend — 30xy gleich ist.

Ferner — 54abc durch — 9b dividirt, giebt + 6ac, weil — 9b mit + 6ac multiplicirt — 6.9abc, oder — 54abc giebt.

Dieses mag für die Division mit einfachen Größen genug seyn. Daher wir zur Erklärung der Brüche fortschreiten wollen, nachdem wir vorher noch etwas von der Natur der Zahlen in Ansehung ihrer Theiler werden bemerkt haben.

VI. Capitel.

Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler.

§. 58.

Da wir gesehen haben, daß sich einige Zahlen durch gewisse Divisoren theilen lassen, andere aber nicht; so ist zur Erkenntniß der Zahlen nöthig, diesen Unterschied wohl zu bemerken, und diejenigen Zahlen, die sich durch irgend einen Divisor theilen lassen, von denjenigen, die sich dadurch nicht theilen lassen, wohl zu unterscheiden, und zugleich auch den Rest, welcher bey der Division der letztern übrig bleibt, wohl anzumerken. Zu dieser Absicht wollen wir die Divisoren

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, u. s. f., etwas genauer betrachten.

§. 59.

Es sey erstlich der Divisor 2. Die Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, sind folgende:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, u. s. f.

welche denn so fort immer um 2 steigen. Diese Zahlen werden insgesammt gerade Zahlen genannt.

Hingegen die übrigen Zahlen:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, u. s. f.

welche sich durch 2 nicht theilen lassen, ohne daß nicht 1 übrig bliebe, heißen ungerade Zahlen, und sind also immer um eins größer, oder kleiner als die geraden Zahlen. Die geraden Zahlen können

nun

nun alle in der allgemeinen Formel 2a begriffen werden; denn wenn man für a nach und nach alle Zahlen annimmt, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u. s. f., so lassen sich daraus alle gerade Zahlen herleiten. Hingegen sind alle ungerade Zahlen in der Formel 2a + 1 enthalten; weil 2a + 1 um 1 größer ist, als die gerade Zahl 2a.

§. 60.

Zweytens. Es sey der Divisor 3; so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen lassen, folgende:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, u. s. f.

welche durch die Formel 3a vorgestellt werden können. Denn 3a, durch 3 dividirt, giebt a zum Quotienten, ohne Rest. Die übrigen Zahlen aber, wenn man sie durch 3 theilen will, lassen entweder 1, oder 2, zum Rest übrig, und sind also von zweyerley Art. Diejenigen, welche 1 übrig lassen, sind folgende:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, u. s. f.

und sind in der Formel 3a + 1 enthalten.

Die von der andern Art, welche 2 übrig lassen, sind folgende:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, u. s. f.

welche alle durch die Formel 3a + 2 vorgestellt werden können; so daß alle Zahlen entweder in der Form 3a, oder in dieser 3a + 1, oder in dieser 3a + 2 enthalten sind.

§. 61.

Wenn ferner der Divisor 4 ist, so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen lassen, folgende:

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, u. s. f.

welche immer um 4 steigen, und in der Formel 4a enthalten sind. Die übrigen Zahlen aber, welche

man

man durch 4 nicht theilen kann, lassen entweder 1 zum Rest, und sind um 1 größer als jene, nemlich:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, u. s. f.

welche folglich alle die Formel $4a + 1$ enthält.

Oder sie lassen 2 zum Rest, als:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, u. s. f.

und sind in der Formel $4a + 2$ enthalten.

Oder endlich bleibt 3 zum Rest übrig, wie bey folgenden Zahlen:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, u. s. f.

welche in der Formel $4a + 3$ enthalten sind, so daß alle mögliche Zahlen durch eine von diesen vier Formeln, nemlich durch

$4a$, oder $4a + 1$, oder $4a + 2$, oder $4a + 3$

vorgestellt werden können.

§. 62.

Eben so verhält sich die Sache mit dem Divisor 5, da alle Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, in der Formel $5a$ enthalten sind. Diejenigen aber, welche sich dadurch nicht theilen lassen, sind entweder

$5a + 1$, oder $5a + 2$, oder $5a + 3$, oder $5a + 4$,

und so kann man weiter zu allen größern Divisoren fortschreiten.

Zusatz. Es sey allgemein n der Divisor, so sind alle mögliche Zahlen, welche sich durch n theilen lassen, in der Formel $n \cdot a$, und die sich nicht theilen lassen, in folgender Formel enthalten: $na + 1$, $na + 2$, - - - - $na + (n - 1)$, wo $n - 1$ der größte Rest ist.

§. 63.

Hierbey kömmt nun das zu statten, was oben von der Auflösung der Zahlen in ihre einfachen Factoren gesagt worden ist; weil eine jede Zahl, unter deren Factoren sich entweder

2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 7,

oder eine andere Zahl befindet sich auch durch dieselbe theilen läßt. Da z. B.

60 so viel ist als: 2 . 2 . 3 . 5;

so ist klar, daß sich 60 durch 2, durch 3, und auch durch 5 theilen lasse.

Anmerk. Weiter unten werden Kennzeichen angegeben werden, um zu entscheiden, ob eine Zahl durch eine andere theilbar oder nicht theilbar sey.

§. 64.

Da überhaupt der Ausdruck abcd sich nicht nur durch a und b und c und d, sondern auch durch folgende

ab, ac, ad, bc, bd, cd; ferner durch
abc, abd, acd, bcd; und endlich auch durch
abcd, d. i. durch sich selbst, theilen läßt,

so muß sich gleichfalls 60, d. i. 2.2.3.5, außer den einfachen Zahlen, auch durch die theilen lassen, die aus zwey einfachen zusammengesetzt sind, nemlich durch

4, 6, 10, 15,

ferner auch durch die, welche aus dreyen bestehen, als:

12, 20, 30,

und endlich auch durch 60, d. i. durch sich selbst.

§. 65.

Wenn man also eine beliebige Zahl durch ihre einfachen Factoren vorgestellt hat, so ist es sehr leicht, alle diejenigen Zahlen anzuzeigen, wodurch sich dieselbe theilen läßt. Denn man darf nur erstlich einen jeden von den einfachen Factoren für sich selbst nehmen, hernach je zwey, je drey, je vier, und so fort mit einander multipliciren, bis man auf die gegebene Zahl selbst kommt.

§. 66.

Vor allen Dingen ist hier zu merken, daß sich eine jede Zahl durch 1, so wie auch durch sich selbst, theilen läßt; also daß eine jede Zahl zum wenigsten zwey Theiler oder Divisoren hat, nemlich 1, und sich selbst. Welche Zahlen nun außer diesen beyden Theilern keine andere haben, sind eben diejenigen, welche oben einfache oder Primzahlen genannt wurden.

Alle zusammen gesetzte Zahlen aber haben, außer 1 und sich selbst, noch andere Divisoren, wie aus folgender Tafel zu sehen ist, wo unter jeder Zahl alle ihre Theiler stehen, deren Anzahl zugleich bemerkt worden ist. Die Primzahlen werden durch den Buchstaben p angedeutet.

Tafel,

welche die Theiler der ganzen Zahlen von 1 bis 20 enthält (§. 59.).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

§. 67.

Endlich ist noch zu merken, daß 0 als eine solche Zahl angesehen werden kann, welche sich durch alle mögliche Zahlen theilen läßt; weil der Quotient, wenn man 0 durch eine beliebige Zahl oder Größe, z. B. durch 2, 3, 4 oder a dividirt, allezeit wieder 0 ist. Denn zweymal 0 ist 0, dreymal 0 ist 0, viermal 0 ist 0, und a mal 0 ist 0, da es unmöglich ist, aus Nichts, wenn man es auch noch so oft wiederholt, etwas heraus zu bringen.

Zusatz. Da 2 a jede gerade Zahl bedeutet, so gehört 2.0 oder 0 auch unter die geraden Zahlen.

Ein Satz, der nicht, wie es beym ersten Ansehen scheinen möchte, ein bloßes Wortspiel ist. Er sagt: daß, was von geraden Zahlen wahr ist, auch von 0 gilt, aber nicht, was nur von ungeraden wahr ist. Man sehe die vortrefliche Fortsetzung der Rechenkunst von dem Herrn Hofrath Kästner. Göttingen, 1786. Seite 541 No. 6.

VII. Capitel.

Von den Brüchen überhaupt.

§. 68.

Wenn sich eine Zahl, z. B. 7, durch eine andere, z. B. durch 3, nicht theilen läßt; so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotient nicht durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt, keinesweges aber, daß es überhaupt unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotienten zu machen.

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich seyn sollte, diese Linie in 3 gleiche Theile zu zergliedern, und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

§. 69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotienten, der in solchen Fällen herauskömmt, machen kann, obgleich derselbe keine ganze Zahl ist, so werden wir hierdurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche Brüche oder gebrochene Zahlen genannt werden.

So

So haben wir im obigen Beispiele, wo 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem daher entspringenden Quotienten, und man pflegt denselben auf folgende Art anzuzeigen: $\frac{7}{3}$; wo die oben gesetzte Zahl 7 das Dividend, und die unten gesetzte Zahl 3 der Divisor ist.

§. 70.

Wenn also auf eine allgemeine Art die Zahl a durch die Zahl b getheilt werden soll, so wird der Quotient durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welcher Ausdruck auch ein Bruch genannt wird; daher man sich keinen bessern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man sagt, es werde dadurch der Quotient angezeigt, welcher entspringe, wenn man die obere Zahl durch die untere dividire. Hierbey ist noch zu merken, daß bey allen dergleichen Brüchen die untere Zahl der Nenner, welcher beym Dividiren der Divisor heißt, die obere aber, die man als den Dividendus betrachten kann, der Zähler genant zu werden pflegt.

§. 71.

In dem oben angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zähler, und 3 der Nenner.

Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$, zwey Drittel. $\frac{3}{4}$, drey Viertel.
$\frac{3}{8}$, drey Achtel. $\frac{12}{100}$, zwölf Hundertel.

Der Bruch $\frac{1}{2}$ wird gemeiniglich ein Halbes, anstatt ein Zweytel, gelesen; denn eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotient, welcher herauskömmt, wenn man 1 in zwey gleiche Theile zerschneidet, da dann, wie bekannt, ein solcher Theil ein Halbes genannt wird.

§. 72.

Um nun die Natur der Brüche recht kennen zu lernen, wollen wir erstlich das Beyspiel $\frac{a}{a}$ betrachten, wo die obere Zahl der untern, oder der Zähler dem Nenner gleich ist. Weil nun dadurch der Quotient angedeutet wird, der herauskömmt, wenn man a durch a dividiret; so ist klar, daß dieser Quotient gerade 1, folglich dieser Bruch $\frac{a}{a}$ so viel als ein Ganzes ist. Daher sind folgende Brüche:

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$ u. s. f.

alle einander gleich, und ein jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Ganzes.

§. 73.

Da nun jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist, Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zähler kleiner sind, als ihre Nenner, weniger als Eins. Denn wenn ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kömmt weniger als 1 heraus. Wenn z. B. eine Linie von 2 Fuß in 3 gleiche Theile zerschnitten werden soll, so wird ein Theil unstreitig kleiner seyn, als ein Fuß; daher sich leicht einsehen läßt, daß $\frac{2}{3}$ weniger ist, als 1, und dies eben deswegen, weil der Zähler 2 kleiner ist, als der Nenner 3.

§. 74.

Ist hingegen der Zähler größer, als der Nenner, so ist der Werth des Bruchs größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1; folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$, nemlich ein Ganzes und noch ein Halbes.

Eben

Eben so ist:

$\frac{4}{3}$ so viel als $1\frac{1}{3}$; ferner $\frac{5}{3}$ so viel $1\frac{2}{3}$; weiter $\frac{7}{3}$ so viel als $2\frac{1}{3}$.

Ueberhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotienten noch einen Bruch hinzusetzen, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$ dividirt man 43 durch 12, und bekömmt 3 zum Quotienten und 7 zum Rest; daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

§. 75.

Hieraus sieht man, wie Brüche, deren Zähler größer sind, als ihre Nenner, in zwey Glieder aufgelöst werden können, wovon das erste eine ganze Zahl ausmacht, das andere aber einen Bruch, dessen Zähler kleiner ist, als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, wo der Zähler größer ist als der Nenner, unächte oder Bastardbrüche genannt; weil sie eins, oder mehr Ganze in sich begreifen. Hingegen sind die ächten Brüche solche, deren Zähler kleiner sind, als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist, als Eins, oder weniger als ein Ganzes.

§. 76.

Man pflegt sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, wodurch die Sache nicht wenig erläutert wird. Wenn man z. B. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar, daß derselbe 3mal größer ist, als $\frac{1}{4}$. Nun aber bestehet die Bedeutung des Bruchs $\frac{1}{4}$ darinn, daß, wenn man 1 in 4 gleiche Theile zertheilt, ein solcher Theil den Werth desselben anzeiget. Wenn man daher drey solcher

Theile zusammen nimmt, so erhält man den Werth des Bruchs $\frac{3}{4}$.

Eben so kann man einen jeden andern Bruch betrachten, z. B. $\frac{7}{12}$: wenn man 1 in 12 gleiche Theile zerschneidet, so machen 7 dergleichen Theile den Werth des vorgelegten Bruches aus.

§. 77.

Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwähnten Namen des Zählers und Nenners entsprungen. Denn weil in dem vorigen Bruch $\frac{3}{4}$ die untere Zahl 4 anzeiget, daß die Einheit in vier gleiche Theile zertheilt werden müsse, und also diese Theile benennet, so wird dieselbe füglich der Nenner genannt.

Da aber die obere Zahl, nemlich 3, anzeigt, daß für den Werth des Bruchs 3 dergleichen Theile zusammen genommen werden müssen, und also dieselbe gleichsam darzählet, so wird die obere Zahl der Zähler genannt.

§. 78.

Betrachten wir nun die Brüche, deren Zähler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift, was $\frac{3}{4}$ bedeutet, wenn man weiß, was $\frac{1}{4}$ ist, so sind dergleichen Brüche folgende:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}$ u. s. f.

Hierbey ist zu merken, daß diese Brüche immer kleiner werden; denn in je mehr Theile ein Ganzes zerschnitten wird, desto kleiner werden auch die Theile. So ist z. B. $\frac{1}{100}$ kleiner als $\frac{1}{10}$, und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$; ferner $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$; und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$.

§. 79.

Hieraus sieht man nun, daß, je mehr bey solchen Brüchen der Nenner vergrößert werde, der Werth derselben um so viel kleiner werden müsse. Hiebey entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gänzlich verschwinde, und zu nichts werde? Dieses aber wird mit Recht verneint. Denn in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. B. die Länge eines Fußes, zertheilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewisse Größe, und sind folglich nicht nichts.

§. 80.

Es ist zwar wahr, daß, wenn man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile zertheilt, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. So bald man sie aber durch ein gutes Vergrößerungsglas betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilchen könnten zertheilt werden.

Hier ist aber die Rede keinesweges von dem, was wirklich kann verrichtet werden, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von demjenigen, was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewiß, daß, so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch gleichwohl nicht gänzlich verschwinde, oder in nichts, oder 0, verwandelt werde.

§. 81.

Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehret würde, niemals gänzlich zu nichts kömmt, sondern diese Brüche noch immer einige Größe behalten, und also die oben gesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne Ende fortgesetzt werden kann; so pflegt man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß seyn müßte, wenn endlich der Bruch zu 0 oder nichts werden sollte. Denn das Wort unendlich will hier eben so viel sagen, als daß man mit dem erwähnten Bruche niemals zu Ende komme.

§. 82.

Um nun diesen Begriff, welcher allerdings fest gegründet ist, vorzustellen, bedient man sich des Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet; und daher kann man sagen, daß dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein wirkliches Nichts sey, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemals Nichts werden kann, so lange der Nenner noch nicht ins Unendliche vermehret worden ist.

§. 83.

Dieser Begriff von dem Unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemerken, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkenntniß hergeleitet worden ist, und in dem folgenden von der größten Wichtigkeit seyn wird. Es lassen sich schon hier daraus solche Folgen ziehen, welche unsere Aufmerksamkeit verdienen, da dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ den Quotienten anzeigt, wenn man das Dividend 1 durch den Divisor ∞ dividirt. Nun wissen wir schon, daß, wenn man das Dividend 1 durch den Quotienten, welcher $\frac{1}{\infty}$ oder 0 ist, wie wir gesehen haben, dividirt, alsdann der Divisor, nemlich ∞, herauskomme. Daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nemlich daß dasselbe herauskomme, wenn man 1 durch 0 dividirt. Folglich kann man mit Grunde sagen, daß $\frac{1}{0}$, d. i. durch 0 dividiret, eine unendlich große Zahl, oder ∞ anzeige.

§. 84.

Hier ist es nöthig, noch einen sehr gewöhnlichen Irrthum aus dem Wege zu räumen, indem viele behaupten, eine unendliche Größe könne weiter nicht vermehret werden. Aber dies kann mit obigen richtigen Gründen nicht bestehen.

Denn da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl andeutet, und $\frac{2}{0}$ unstreitig zweymal, $\frac{3}{0}$ dreymal, und $\frac{4}{0}$ viermal so groß ist, als $\frac{1}{0}$; so folgt hieraus, daß auch so gar eine unendlich große Zahl weit größer werden könne.

Anmerk. Dem Anfänger ist es gewiß nicht zu verdenken, wenn er die Begriffe vom Unendlichen nicht so ganz leicht findet. Große Mathematikverständige selbst sind hierüber verschiedener Meynung, und nicht selten sind einige von ihnen dadurch auf ungereimte Behauptungen gekommen. Wer Beruf hat Mathematik zu studiren, darf die Kästnerischen Schriften nicht ungelesen lassen, diese vortreflichen Lehrbücher allein geben ihm gewiß den vollständigsten und richtigsten Begriff vom Unendlichen, und wer Gefühl für Wahrheit hat, wird diese Schriften nie ohne Begeisterung, und Hochachtung für diesen verehrungswürdigen Greis lesen. Im folgenden Zusatz werde ich das nöthige darüber mittheilen.

Zusatz. Daß ich jemand Nichts gebe, wenn ich ihm einmal Nichts gebe, und daß er nicht mehr bekömmt, wenn ich ihm zweymal, dreymal u. s. w. Nichts gebe, das läßt sich auch wohl einem Kinde spielend begreiflich machen.

Also: 0 ein Faktor, ist nichts weiter als ein ganz leichter Begriff der natürlichen Rechenkunst wissenschaftlich ausgedrückt. Aber vor einem Bruch fürchten sich schon Erwachsene; und noch mehr vor einem Bruche, dessen Nenner nicht etwa 2; 3; 4; oder eine große ganze Zahl, sondern selbst ein Bruch ist, z. E.

$$\frac{1}{\frac{1}{1000000000}}$$

Wer sich also einen Begriff von $\frac{1}{0}$ machen sollte, würde wohl zuerst darauf fallen, sich statt des Nenners oder Divisors einen sehr kleinen Bruch vorzustellen, da er dann einsähe, daß der

Quo-

Quotient eine sehr große Zahl seyn müsse, die immer größer wird, je kleiner er den Divisor macht. Also kann er bey $\frac{1}{0}$ nichts denken, als etwas Größers als alle Zahlen, die er denken kann.

Diese Vorstellung, wenn man nun auch das Unendlich brauchen will, ist gewiß nicht so leicht, als die vom Nichts. Man könnte also wohl verstehen, was o als Faktor bedeutet, ohne zu verstehen, was es als Divisor bedeutet.

Und eigentlich läßt sich das letzte gar nicht verstehn. Niemand versteht: wie oft Nichts in Etwas enthalten ist, obgleich jedermann versteht, daß, Etwas, keinmal gegeben, Nichts gegeben heißt.

Alle Nullen oder Nichtse sind einerley, also $a \cdot o = b \cdot o = o$; denn bey Nichts denkt man sich bestimmt: keine Größe. Ein Nichts ist nicht mehr noch weniger als das andere — dieses müssen sich Anfänger der Algebra wohl merken, damit sie nicht zu Fehlschlüssen verleitet werden.

Unendlich groß ist kein bestimmter Begriff, jede Größe, von der man einen solchen Begriff hat, ist bestimmt. Wer eine nicht mehr zählbare Menge denkt, denkt sie nicht als nur eine, eigentlich ist sein Begriff nur verneint: nicht mehr zählbar. Nach dem Geständnisse aller Mathematiker ist dieser Begriff viel schwerer als der vom Nichts. Auch hat man nie über das Nichts gestritten, aber viel über das Unendliche.

Daß man bey $2 \cdot o$; $3 \cdot o$ nichts anders denkt, als bey $1 \cdot o$, habe ich oben gezeigt. Aber bey $2 \cdot \infty$; $3\ \infty$ u. s. w. denkt man gewiß etwas anders, als bey $1 \cdot \infty$. Das ist, was ich damit sagen will, wer eine unzählbare Menge denkt, denkt sie nicht als nur eine. Leipz. Mag. für reine und angewandte Mathematik. Drittes Stück 1786, Seite 419.

VIII. Ca-

VIII. Capitel.

Von den Eigenschaften der Brüche.

§. 85.

Wie wir oben (§. 72.) gesehen haben, daß jeder dieser Brüche,

$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}$, u. s. f.

ein Ganzes ausmache, und folglich alle gleich sind; so sind auch folgende Brüche,

$\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}$, u. s. f.

einander gleich, weil jeder zwey Ganze ausmacht: denn es giebt der Zähler eines jeden, durch seine Nenner dividirt, 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \frac{18}{6}$, u. s. f.

einander gleich, weil der Werth eines jeden 3 beträgt.

§. 86.

So läßt sich der Werth aller Brüche auf unendlich vielfältige Art vorstellen. Denn wenn man sowohl den Zähler als den Nenner eines Bruchs durch eine beliebige Zahl, ~~die man~~ multiplicirt, so behält der Bruch immer gleichen Werth. Also sind alle diese Brüche,

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}$, u. s. f.

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{2}$. Eben so sind auch alle diese Brüche,

$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \frac{9}{27}, \frac{10}{30}$, u. s. f.

einander gleich, und der Werth eines jeden $\frac{1}{3}$. Ferner sind auch folgende Brüche, als:

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}$, u. s. f.

einan-

einander gleich; daher allgemein der Bruch $\frac{a}{b}$ auf folgende Arten vorgestellt werden kann,

$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \frac{5a}{5b}, \frac{6a}{6b}$ u. s. f., wovon jeder so groß ist, als der erste $\frac{a}{b}$.

§. 87.

Um dies zu beweisen, darf man nur statt des Werths des Bruchs $\frac{a}{b}$ einen besondern Buchstaben, als c, schreiben, so, daß c der Quotient sey, wenn man a durch b dividirt. Nun aber ist vorher (§. 46) gezeigt worden, daß wenn man den Quotienten c mit dem Divisor b multiplicirt, der Dividendus herauskommen müsse.

Da nun c mit b multiplicirt a giebt, so wird c mit 2b multiplicirt 2a, c mit 3b multiplicirt 3a, und überhaupt c mit mb multiplicirt ma geben.

Macht man hieraus wieder ein Divisionsexempel und dividirt das Product ma durch den einen Factor mb, so muß der Quotient dem andern Factor c gleich seyn: aber ma durch mb dividirt, giebt den Bruch $\frac{ma}{mb}$; daher der Werth desselben c ist. Da nun c auch dem Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ gleich ist, so ist offenbar, daß der Bruch $\frac{ma}{mb}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich sey, man mag statt m eine Zahl annehmen, welche man will.

§. 88.

Weil aber jeder Bruch durch unendlich verschiedene Formen von gleichem Werth dargestellt werden kann,

kann, so wird man unstreitig diejenige am leichtesten fassen, welche aus den kleinsten Zahlen besteht. So könnte man z. B. statt $\frac{2}{3}$ einen jeden der folgenden Brüche, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$ u. s. f. nach Willkühr setzen; es wird aber niemand zweifeln, daß nicht die Form $\frac{2}{3}$ von allen die deutlichste sey. Hiebey läßt sich nun noch die Frage aufwerfen, wie man einen Bruch, der nicht in seine kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, als z. B. $\frac{8}{12}$, auf seine kleinste Form, nemlich $\frac{2}{3}$, bringen könne?

§. 89.

Diese Frage läßt sich am leichtesten auflösen, wenn man bedenkt, daß jeder Bruch seinen Werth behält, wenn sowohl Zähler als Nenner mit einerley Zahl multiplicirt werden. Denn daraus folgt, daß, wenn man auch den Zähler und Nenner eines Bruchs durch eben dieselbe Zahl dividirt, der Bruch einen gleichen Werth behalten müsse. Noch leichter ergiebt sich dies aus der allgemeinen Form $\frac{na}{nb}$. Denn wenn man sowohl den Zähler na als den Nenner nb durch die Zahl n dividirt, so kommt der Bruch $\frac{a}{b}$ heraus, der jenem gleich ist, wie schon vorher (§. 87.) gezeigt worden ist.

§. 90.

Um nun einen vorgegebenen Bruch auf seine kleinste Form zu bringen, muß man solche Zahlen finden, wodurch sich sowohl Zähler als Nenner theilen lassen. Diese Zahl wird der gemeine Theiler genannt, und so lange man zwischen dem Zähler und Nenner einen gemeinen Theiler anzeigen kann, so lange läßt sich der Bruch noch auf eine

kleinere

kleinere Form bringen; findet aber außer 1 kein gemeiner Theiler weiter statt, so ist der Bruch schon auf seine kleinste Form gebracht.

§. 91.

Um dies zu erläutern, wollen wir den Bruch $\frac{48}{120}$ betrachten. Hier sieht man gleich, daß sich Zähler und Nenner durch 2 theilen lassen, woraus der Bruch $\frac{24}{60}$ entsteht. Dieser läßt sich nun noch einmal durch 2 theilen, und so entsteht ein neuer Bruch $\frac{12}{30}$. Auch hier ist 2 nochmal der gemeine Theiler, wodurch man $\frac{6}{15}$ erhält. Man sieht aber leicht, daß Zähler und Nenner sich noch durch 3 theilen lassen, woraus endlich der Bruch $\frac{2}{5}$ entspringt, welcher dem vorgegebenen gleich ist, und sich in seiner kleinsten Form befindet, weil die Zahlen 2 und 5 weiter keinen gemeinschaftlichen Theiler haben als 1, welcher keine Zahl verkleinert.

§. 92.

Diese Eigenschaft der Brüche, daß, wenn man Zähler und Nenner mit Einer Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, der Werth des Bruchs unverändert bleibe, ist von der größten Wichtigkeit und es gründet sich hierauf fast die ganze Lehre von den Brüchen. So lassen sich z. B. zwey Brüche nicht gut addiren, oder von einander subtrahiren, ehe man sie nicht in andere Formen gebracht hat, deren Nenner einander gleich sind; wovon im folgenden Capitel gehandelt werden soll.

§. 93.

Es ist hier nur noch zu bemerken, daß man auch jede ganze Zahl in Form eines Bruchs vorstellen könne. So ist z. B. 6 so viel als $\frac{6}{1}$, weil 6 durch

1 divi-

1 dividirt auch 6 giebt. Und daher entstehen noch folgende Formen,

$\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{36}{6}$, u. s. f.

welche alle einen gleichen Werth, nemlich 6, in sich enthalten.

IX. Capitel.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

§. 94.

Haben mehrere Brüche gleiche Nenner, so mache ihre Addition und Subtraction keine Schwierigkeit, indem $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ so viel als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{7} - \frac{2}{7}$ so viel als $\frac{2}{7}$ ist. In diesem Fall addirt oder subtrahirt man bloß die Zähler, und schreibt den gemeinschaftlichen Nenner darunter. Also macht

$\frac{7}{100} + \frac{9}{100} - \frac{12}{100} - \frac{15}{100} + \frac{20}{100}$ so viel als $\frac{9}{100}$:
$\frac{24}{50} - \frac{7}{50} - \frac{12}{50} + \frac{31}{50}$ so viel als $\frac{36}{50}$ oder $\frac{18}{25}$:
$\frac{16}{20} - \frac{3}{20} - \frac{11}{20} + \frac{14}{20}$ so viel als $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$:

eben so macht $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ so viel als $\frac{3}{3}$ oder 1, das ist ein Ganzes, und $\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ so viel als $\frac{0}{4}$, das ist nichts, oder 0.

§. 95.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so ist es jedesmal möglich, sie in andere von gleichem Werth zu verwandeln, deren Nenner gleich sind. Also wenn die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gegeben sind, und zusammen addirt werden sollen, so ist zu bemerken, daß $\frac{1}{2}$ so viel ist, als $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{2}{6}$: man hat also statt der vorigen die Brüche $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, welche $\frac{5}{6}$ geben. Ferner bey $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ist derselbe Fall, nur daß das Zeichen minus dazwischen steht; also $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$ giebt $\frac{1}{6}$. Sind ferner diese Brüche gegeben $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$, so kann man anstatt $\frac{3}{4}$ den Bruch $\frac{6}{8}$ setzen, da denn $\frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ $\frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$ giebt. Frägt man, wie viel $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen ausmachen, so schreibe man statt dessen nur $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$, welches denn $\frac{7}{12}$ giebt.

§. 96.

Wenn mehr als zwey Brüche gegeben sind, als: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, die unter gleiche Nenner gebracht werden sollen, so kommt es blos darauf an, daß man eine Zahl finde, die sich durch alle diese Nenner theilen lasse. Eine solche ist nun 60, welche der gemeinschaftliche Nenner oder sogenannte Hauptnenner wird. Also hat man statt $\frac{1}{2}$ diesen $\frac{30}{60}$, statt $\frac{2}{3}$ diesen $\frac{40}{60}$, statt $\frac{3}{4}$ diesen $\frac{45}{60}$, statt $\frac{4}{5}$ diesen $\frac{48}{60}$, und statt $\frac{5}{6}$ diesen $\frac{50}{60}$. Sollten nun diese Brüche $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$, zusammen addirt werden, so geben sie zusammen $\frac{213}{60}$, oder 3 Ganze und $\frac{33}{60}$, oder $3\frac{11}{20}$.

§. 97.

Es kommt hierbey darauf an, daß man zwey Brüche von ungleichen Nennern in andere verwandele, deren Nenner einander gleich sind. Um dieses auf eine allgemeine Art thun zu können, so setze man, es wären die vorgegebenen Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Nun multiplicire man den ersten Bruch oben und unten mit d, so bekommt man $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch gleich $\frac{a}{b}$ ist; den andern Bruch multiplicire man wie den ersten oben und unten mit b, so bekommt man

man statt seiner $\frac{bc}{bd}$, in welcher Gestalt die Nenner gleich sind und die Summe $\frac{ad + bc}{bd}$ und die Differenz $\frac{ad - bc}{bd}$ ist. Wenn also folgende Brüche gegeben sind, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{9}$, so bekommt man dafür $\frac{45}{72}$ und $\frac{56}{72}$, deren Summe $\frac{101}{72}$, die Differenz aber $\frac{11}{72}$ beträgt.

§. 98.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen, welcher von zwey gegebenen Brüchen größer, oder kleiner sey, als der andere? Z. B. welcher von diesen zwey Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$ ist der größere? Zu diesem Ende darf man nur die beyden Brüche auf gleiche Benennung bringen, da man denn für den erstern $\frac{14}{21}$ und für den andern $\frac{15}{21}$ bekommt, woraus sich offenbar ergiebt, daß $\frac{5}{7}$ größer ist als $\frac{2}{3}$, und zwar um $\frac{1}{21}$. Wenn ferner die Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}$ gegeben sind, so bekommt man statt deren die Brüche $\frac{24}{40}$ und $\frac{25}{40}$, woraus erhellet, daß $\frac{5}{8}$ mehr sey als $\frac{3}{5}$, aber nur um $\frac{1}{40}$.

§. 99.

Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden, z. B. $\frac{2}{3}$ von 1, so darf man nur $\frac{3}{3}$ statt 1 schreiben, da man denn gleich sieht, daß $\frac{1}{3}$ übrig bleibt. Eben so $\frac{5}{12}$ von 1 abgezogen, giebt $\frac{7}{12}$. Soll man aber $\frac{3}{4}$ von 2 abziehen, so schreibe man für 2 nur 1 und $\frac{4}{4}$, da denn 1 und $\frac{1}{4}$ übrig bleibt. Uebrigens ist bekannt, daß wenn ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt werden soll, man ihn nur geradezu anhängt; als, $\frac{2}{3}$ zu 6 addirt, giebt $6\frac{2}{3}$.

§. 100.

Zuweilen geschieht es auch, daß 2 oder mehr Brüche zusammen addirt, mehr als ein Ganzes ausmachen, welches denn bemerkt werden muß: als $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, oder $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$ giebt $\frac{17}{12}$, welches gleich ist, $1\frac{5}{12}$. Eben so, wenn mehrere ganze Zahlen und Brüche addirt werden sollen, so addirt man erst die Brüche, und wenn ihre Summe 1 oder mehr Ganze enthält, so werden diese hernach zu den ganzen Zahlen addirt, z. B. wären $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{2}{3}$ zu addiren, so machen die Brüche für sich zusammen $\frac{7}{6}$, oder $1\frac{1}{6}$, welches mit den Ganzen zusammen genommen, 6 und $\frac{1}{6}$ ausmacht.

Zusatz. Bey der Rechnung mit Brüchen finden verschiedene Vortheile statt, wovon ich hier nur ein Paar beybringen werde.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{a}{d} = \frac{ad \pm ab}{bd} = \frac{a(d \pm b)}{bd}$$

Wenn also Brüche gleiche Zähler haben, so darf man nur, um sie zu addiren oder zu subtrahiren, die Summe oder Differenz ihrer Nenner mit dem Zähler multipliciren, und das Product mit dem Product der Nenner dividiren.

Statt diese Brüche $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ nach der gewöhnlichen Art zu subtrahiren, verfahre man nach folgender Formel.

$$\frac{a(d-c) - c(b-a)}{bd}$$

Man multiplicirt nemlich den Zähler jedes Bruchs mit der Differenz zwischen Zähler und Nenner des anderen, zieht diese Producte von einander ab, und dividirt, wie gewöhnlich, mit dem Producte den Nenner.

Die Richtigkeit der Formel erhellet, wenn man in der Formel die angezeigte Multiplication wirklich verrichtet. Es entsteht nehmlich $\frac{ad - ac - cb + ac}{bd} = \frac{ad - cb}{bd}$ wie gewöhnlich. Einen andern Beweis findet man im ersten Theil meiner Sammlung algebraischer Aufgaben in der Einleitung.

Sehr

Sehr brauchbar ist dieser Vortheil, wenn die Brüche sehr groß, und der Zähler also wenig vom Nenner unterschieden sind.

Z. B. $\frac{57}{59} - \frac{29}{31} = \frac{(57 - 29)2}{59.31} = \frac{28.2}{59.31}$; hier ist nehmlich $d - c = b - a$, daher kann man die Formel in diesem Fall noch mehr verkürzen, indem man schreibt $\frac{(a - c)(d - c)}{bd}$.

X. Capitel.

Von der Multiplication und Division der Brüche.

§. 101.

Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zähler, und läßt den Nenner unverändert; z. B.

2 mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$, oder 1 Ganzes;
2 mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3 mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$, oder $\frac{1}{2}$;
4 mal $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$.

Hieraus ergiebt sich die Regel: daß ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, wenn man entweder den Zähler damit multiplicirt, oder den Nenner durch die ganze Zahl dividirt; geht das letztere an, so wird die Rechnung dadurch um vieles verkürzt. Z. B. es soll $\frac{8}{9}$ mit 3 multiplicirt werden, so kommt $\frac{24}{9}$ heraus, wenn der Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird, welches so viel als $\frac{8}{3}$ ist; läßt man aber den Zähler unverändert und dividirt den Nenner 9 durch 3, so bekommt man ebenfalls $\frac{8}{3}$; das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Eben so giebt $\frac{13}{24}$ mit 6 multiplicirt $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$.

§. 102.

Wenn also ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hierbey ist zu merken, daß, wenn die ganze Zahl gerade dem Nenner gleich ist, alsdann das Product dem Zähler gleich werde, also:

$\frac{1}{2}$ zweymal genommen giebt 1.
$\frac{2}{3}$ mit 3 mult. giebt 2.
$\frac{3}{4}$ mit 4 mult. giebt 3.

und allgemein, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl b multiplicirt wird, so ist das Product a, wovon der Grund schon vorher (§. 46) gezeigt worden; denn da $\frac{a}{b}$ den Quotienten ausdrückt, der entsteht, wenn der Dividendus a durch den Divisor b dividirt wird, und zugleich bewiesen ist, daß der Quotient mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus gebe, so folgt hieraus, daß $\frac{a}{b}$ mit b multiplicirt, die Zahl a geben müsse.

§. 103.

Da nun gezeigt ist, wie man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicire; so ist noch nöthig zu zeigen, wie man einen Bruch durch eine ganze Zahl dividiren müsse, ehe die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruch gelehrt werden kann. Es ist aber leicht einzusehen, daß wenn man den Bruch $\frac{2}{3}$ durch 2 dividiren soll, $\frac{1}{3}$ heraus komme, eben so wie in dem Fall, da $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ heraus kommen. Hieraus erhellet, daß man nur den Zähler durch die ganze Zahl theilen müsse, da denn der Nenner unverändert bleibt. Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2 div. giebt $\frac{6}{25}$, und
$\frac{12}{25}$ durch 3 div. giebt $\frac{4}{25}$, und
$\frac{12}{25}$ durch 4 div. giebt $\frac{3}{25}$ u. s. f.

§. 104.

Es hat dies also keine Schwierigkeit, wenn sich nur der Zähler durch die vorgegebne Zahl theilen läßt: geht dies aber nicht an, so merke man, daß der Bruch in unendlich viele andere Formen verändert werden könne, unter welchen sich gewiß auch solche finden müssen, deren Zähler sich durch die gegebene Zahl theilen lassen. Also wenn $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, so verwandle man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, so giebt dies $\frac{3}{8}$, wenn es durch 2 dividirt wird.

Eine allgemeine Regel ist folgende: wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c dividirt werden soll, so verwandle man denselben in $\frac{ac}{bc}$, dessen Zähler a c durch c dividirt a giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

§. 105.

Hieraus sieht man, daß, wenn ein Bruch, als $\frac{a}{b}$, durch eine ganze Zahl c dividirt werden soll, man nur den Nenner b mit dieser ganzen Zahl zu multipliciren brauche, ohne den Zähler verändern zu lassen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividirt, giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{16}$ durch 5 dividirt, giebt $\frac{9}{80}$. Wenn sich aber der Zähler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter, z. B. $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilt, giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$, welches so viel als $\frac{3}{16}$ ist. Denn 3 mal 3 ist 9, und 3 mal 16 ist 48.

§. 106.

Nun ist es möglich zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden soll. Man darf nur bedenken, daß $\frac{c}{d}$ so viel ist als c getheilt durch d: und also darf man nur den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit c multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ heraus kommt; hernach durch d dividiren, da es denn $\frac{ac}{bd}$ giebt; und hieraus folgt die Regel: daß, um zwey Brüche mit einander zu multipliciren, man erst die Zähler, und hernach die Nenner besonders mit einander multipliciren müsse.

Also: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ mult. giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$: ferner
$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ mult. giebt $\frac{8}{15}$; und
$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ mult. giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u. s. f.

§. 107.

Nun ist nur noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll. Hiebey ist erstlich zu merken, daß wenn die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur an den Zählern verrichtet werde: weil z. B. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so vielmal enthalten ist, als 3 in 9, das ist 3 mal. Daher wenn $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$ dividirt werden soll, so darf man nur 8 und 9 dividiren; dies giebt $\frac{8}{9}$. Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ ist 3 mal: $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ ist 7 mal: $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$: eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

§. 108.

§. 108.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weiß man, wie dieselben auf gleiche Nenner gebracht werden müssen. Z. B. soll man den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, und bringt man diese Brüche unter gleiche Benennung, so bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ zu dividiren, wo denn eben so viel heraus kommen muß, als wenn man den ersten Zähler ad durch den letztern bc dividirt: Folglich wird der gesuchte Quotient seyn $\frac{ad}{bc}$.

Hieraus entspringt diese Regel: man muß den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zähler, und dieses den Nenner zum Quotienten geben.

§. 109.

Wenn also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so bekommt man nach dieser Regel $\frac{15}{16}$ zum Quotienten: Wenn ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$, das ist $1\frac{1}{2}$. Ferner wenn durch $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

§. 110.

Man pflegt diese Regel für die Division auch bequemer auf folgende Art vorzutragen: man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll, um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zähler unten schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher getheilt werden soll, mit diesem umgekehrten Bruch, so erhält man den gesuchten Quotienten. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multiplicirt, woraus entsteht $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Eben so $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, welches $\frac{15}{16}$ giebt: ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, welches $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$ giebt.

Man sieht also überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividiren eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$, das ist mit 2 multipliciren: und durch $\frac{1}{3}$ dividiren, eben so viel, als mit $\frac{3}{1}$, das ist mit 3 multipliciren.

§. 111.

Wenn daher die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es 200; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ dividirt, giebt 3000. Wenn ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$ dividirt werden soll, so kommt 1000; und 1 durch $\frac{1}{100000}$ dividirt, giebt 100000; woraus sich erklären läßt, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müsse, weil, wenn man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{1000000000}$ dividirt, die große Zahl 1000000000 herauskommt.

§. 112.

Wenn ein Bruch durch sich selbst dividirt werden soll, so versteht sich von selbst, daß der Quotient 1 seyn werde, weil eine jede Zahl durch sich selbst dividirt 1 giebt: eben dieses zeigt auch unsere Regel. Wenn z. B. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$, da dann $\frac{12}{12}$, das ist 1, herauskommt. Und wenn $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt

werden

werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$, wo denn $\frac{ab}{ab}$, das ist 1, heraus kommt.

§. 113.

Es ist jetzt noch übrig, eine Redensart zu erklären, die sehr oft gebraucht wird: z. B. fragt man, was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so heißt das so viel, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so, wenn man fragt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$ sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da denn $\frac{10}{24}$ heraus kommt; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, welches $\frac{27}{64}$ giebt. Dies ist wohl zu merken, so oft diese Redensart vorkommt.

§. 114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen $+$ und $-$ eben das zu bemerken, was oben bey den ganzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder $+1$.

XI. Capitel.

Von den Quadratzahlen.

§. 115.

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ein Quadrat genannt, so wie in Ansehung dessen die Zahl, daraus es entstanden, seine Quadratwurzel heißt.

Also

Also, wenn man z. B. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadratzahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats, d. i. eines gleichseitigen und rechtwinklichten Vierecks, gefunden wird, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.

§. 116.

Daher findet man alle Quadratzahlen durch die Multiplication, wenn man nehmlich die Wurzel mit sich selbst multiplicirt.

Also, weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; hingegen 2 die Quadratwurzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadratwurzel von 9. Wir wollen daher die Quadrate der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hersetzen, in welcher man die Zahlen oder Wurzeln in der ersten, die Quadrate aber in der zweyten Reihe findet.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

Anmerk. Wir haben sehr vollständige Tafeln für die Quadrate der natürlichen Zahlen unter dem Titel; Tetragonometria Tabularia &c. auctore I. Jobo Ludolfo. Amstelodami, 1690. 4. Diese Tafeln enthalten die Quadrate von allen Zahlen von 1 bis 100000. In der Einleitung werden verschiedene Anwendungen dieser Tafeln gezeigt, unter andern auch die Producte von jeden zwey Factoren zu finden, die kleiner als 100000 sind. Von diesem Werke besitze ich, außer der genannten Ausgabe, noch folgende zwey: Erffordiae 1709 und Jenae 1712.

§. 117.

§. 117.

Bey diesen der Ordnung nach fortschreitenden Quadratzahlen bemerkt man sogleich folgende Eigenschaft, daß, wenn man ein jedes Quadrat von dem folgenden subtrahiret, die Reste in dieser Ordnung fortgehen.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, u. s. f.

welche immer um zwey steigen, und alle ungrade Zahlen der Ordnung nach enthalten.

§. 118.

Auf gleiche Weise werden die Quadrate von Brüchen gefunden, wenn man nemlich einen Bruch mit sich selbst multiplicirt. Also ist von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$,

von $\frac{1}{3}$ ist das Quadrat	$\frac{1}{9}$,
von $\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$,
von $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$,
von $\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$ u. s. f.

Man darf nemlich nur das Quadrat des Zählers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so bekommt man das Quadrat des Bruchs. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{8}$ und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die Wurzel von $\frac{25}{64}$.

§. 119.

Wenn man das Quadrat von einer vermischten Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man sie nur zu einem unächten Bruch machen, und das Quadrat davon nehmen. Also um das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ zu finden, so ist erstlich $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$, welches $6\frac{1}{4}$ beträgt. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so um das Quadrat von $3\frac{1}{4}$ zu finden, so bemerke man, daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist als $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$ ist, welches 10 und $\frac{9}{16}$ ausmacht. Wir wollen z. B. die Quadrate der Zahlen, welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen, betrachten, als:

Zahlen	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quadr.	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Woraus man leicht abnehmen kann, daß, wenn die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalte. Also wenn die Wurzel ist $1\frac{5}{12}$, so wird das Quadrat derselben gefunden $\frac{289}{144}$, welches $2\frac{1}{144}$, und also nur um sehr wenig größer als 2 ist.

§. 120.

Auf eine allgemeine Art, wenn die Wurzel a ist, so ist das Quadrat aa: ferner von der Wurzel $2a$ ist das Quadrat $4aa$. Hieraus sieht man, daß, wenn die Wurzel 2 mal so groß genommen wird, das Quadrat 4 mal größer werde. Ferner ist von der Wurzel $3a$ das Quadrat $9aa$, und von der Wurzel $4a$ ist das Quadrat $16aa$ u. s. f. Heißt aber die Wurzel ab, so ist ihr Quadrat $aabb$, und wenn abc die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat $aabbcc$.

§. 121.

Wenn daher die Wurzel aus 2 oder mehrern Factoren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wenn das Quadrat aus 2 oder mehrern Factoren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzeln derselben mit einander zu multipliciren. Also da 2304 so viel ist, als 4. 16. 36; so ist

ist die Quadratwurzel davon 2. 4. 6, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadratwurzel von 2304, weil 48. 48 eben so viel ausmacht, als 2304.

§. 122.

Nun ist noch nöthig zu zeigen, was es mit den Zeichen plus und minus bey den Quadraten für eine Bewandniß habe. Es erhellet sogleich, daß, wenn die Wurzel das Zeichen + hat, oder eine positive Zahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine positive Zahl seyn müsse, weil + mit + multiplicirt + giebt. Also wird das Quadrat von $+ a$ seyn $+ aa$. Wenn aber die Wurzel eine negative Zahl ist, als $- a$, so wird ihr Quadrat seyn $+ aa$, eben so, als wenn die Wurzel $+ a$ wäre; folglich ist $+ aa$ eben so wohl das Quadrat von $+ a$ als von $- a$; und man kann daher von einem jeden Quadrat zwey Quadratwurzeln angeben, deren eine positiv, die andere negativ ist. Also ist die Quadratwurzel von 25 so wohl $+ 5$, als $- 5$, weil $+ 5$ mit $+ 5$ multiplicirt, und auch $- 5$ mit $- 5$ multiplicirt $+ 25$ giebt.

XII. Capitel.

Von den Quadratwurzeln und den daraus entstehenden Irrationalzahlen.

§. 123.

Aus dem vorhergehenden erhellt, daß die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl nichts anders sey, als eine solche Zahl, deren Quadrat der gegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadratwurzel von 4 ist 2, von

9 ist sie 3, von 16 ist sie 4, u. s. f. wobey man bemerken muß, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25 ist die Quadratwurzel so wohl $+5$, als -5, weil -5 mit -5 multiplicirt, eben so wohl $+25$ ausmacht, als $+5$ mit $+5$ multiplicirt.

§. 124.

Wenn daher die gegebene Zahl ein Quadrat ist, und man die Quadratzahlen so weit im Gedächtniß hat, so ist es leicht die Quadratwurzel zu finden: z. B. wäre die Zahl 196 gegeben, so weiß man, daß die Quadratwurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen verhält es sich eben so, und aus dem obigen ist klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadratwurzel $\frac{5}{7}$ sey, weil man nur so wohl vom Zähler, als vom Nenner die Quadratwurzel nehmen darf. Ist die gegebene Zahl eine vermischte Zahl, als $12\frac{1}{4}$, so bringe man sie auf einen einzelnen Bruch, nemlich $\frac{49}{4}$, wovon die Quadratwurzel $\frac{7}{2}$, oder $3\frac{1}{2}$ ist. Dies ist also offenbar die Quadratwurzel von $12\frac{1}{4}$.

§. 125.

Ist aber die gegebene Zahl kein Quadrat, als z. B. 12, so ist es auch nicht möglich die Quadratwurzel davon, das ist eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, gerade 12 ausmache, zu finden oder anzugeben. Indessen wissen wir doch, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als 3, weil 3.3 nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil 4.4 schon 16 macht; man weiß auch, daß sie kleiner seyn müsse, als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, denn $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$, und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$. Diese Wurzel läßt sich sogar noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$, denn das Quadrat von

$3\frac{7}{15}$

$3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, denn $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

§. 126.

Da nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas größer ist als die Quadratwurzel von 12, so könnte man glauben, daß, wenn man statt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Man nehme also $3\frac{3}{7}$, weil $\frac{3}{7}$ um etwas weniges kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{576}{49}$, und also kleiner ist als 12. Denn 12 beträgt $\frac{588}{49}$, also $\frac{12}{49}$ mehr. Hieraus sieht man also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil $\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$ und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$, in einen Bruch gebracht, $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht, giebt $\frac{1452}{121}$, woraus erhellet, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist und zwar nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man nun setzen, die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 auf gleichen Nenner gebracht, giebt $\frac{2028}{168}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, aber nur um $\frac{3}{169}$, da doch $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

§. 127.

Es läßt sich aber leicht begreifen, daß, was man auch immer für einen Bruch zu 3 hinzusetzen mag, das Quadrat davon jedesmal einen Bruch in sich fassen müsse, und also niemals genau 12 betragen könne. Also, ungeachtet wir wissen, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als $3\frac{6}{13}$, aber kleiner als $3\frac{7}{15}$, so muß man doch gestehen, daß es nicht möglich sey, zwischen diesen zwey Brüchen einen solchen ausfindig zu machen, welcher zu 3 addirt, die Quadratwurzel von 12 genau ausdrückte. Inzwischen läßt sich doch nicht behaupten, daß die Quadratwurzel von 12 an und für sich selbst unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem angeführten nur so viel, daß diese Zahl durch Brüche nicht ausgedrückt werden kann, ungeachtet sie nothwendig eine bestimmte Größe haben muß.

§. 128.

Dies leitet auf eine neue Art von Zahlen, welche sich keinesweges durch Brüche ausdrücken lassen und gleichwohl eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadratwurzel der Zahl 12 sehen. Diese neue Art von Zahlen werden nun Irrationalzahlen genannt, und sie entstehen, so oft man die Quadratwurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadratwurzel aus 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, genau 2 hervorbringt, eine Irrationalzahl. Zuweilen pflegt man solche Zahlen auch surdische zu nennen.

§. 129.

Ungeachtet sich nun solche Irrationalzahlen durch keinen Bruch darstellen lassen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Denn z. B. die Quadratwurzel aus 12 mag auch immer noch so verborgen scheinen, so ist doch bekannt, daß sie eine solche Zahl ist, welche mit sich selbst multiplicirt, gerade 12 hervorbringt. Und diese Eigenschaft ist hinlänglich, einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, besonders da man immer näher zu dem Werth derselben gelangen kann.

§. 130.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrationalzahlen haben, so bedient man sich eines gewissen Zeichens, um die Quadratwurzel solcher Zahlen, die keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat diese Figur $\sqrt{}$, und wird mit dem Wort Quadratwurzel ausgesprochen. Also $\sqrt{12}$ bedeutet diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt 12 giebt, oder mit einem Wort die Quadratwurzel aus 12. Eben so bedeutet $\sqrt{2}$ die Quadratwurzel aus 2, $\sqrt{3}$ die Quadratwurzel aus 3: ferner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ die Quadratwurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\sqrt{a}$, die Quadratwurzel aus der Zahl a. So oft man also aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadratwurzel anzeigen soll, so bedient man sich dieses Zeichens $\sqrt{}$, welches vor jene Zahl geschrieben wird.

§. 131.

Der jetzt erklärte Begriff von den Irrationalzahlen führt nun sogleich auf einen Weg, die gewöhnlichen Rechnungen damit anzustellen. Weil nemlich die Quadratwurzel aus 2 mit sich selbst multiplicirt 2 geben muß, so wissen wir, daß, wenn $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt wird, nothwendig 2 heraus komme: eben so giebt $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt 3; und $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$, 5; imgleichen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ giebt $\frac{2}{3}$; und überhaupt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt, giebt a.

§. 132.

Wenn aber $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt werden soll, so ist das Product $\sqrt{ab}$, weil oben gezeigt ist (§. 121), daß, wenn ein Quadrat Factoren hat, die Wurzel davon auch aus den Wurzeln der Factoren entsteht. Daher findet man die Quadratwurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wenn man die Quadratwurzel von a, das ist $\sqrt{a}$ mit der Quadratwurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus erhellet sogleich, daß wenn b gleich a wäre, alsdenn $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{aa}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a, weil aa das Quadrat von a ist.

§. 133.

Eben so, wenn $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt werden soll, so bekömmt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$, wobey es möglich ist, daß im Quotienten die Irrationalität verschwindet. Also wenn $\sqrt{18}$ durch $\sqrt{8}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\sqrt{\frac{18}{8}}$. Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$ und die Quadratwurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

§. 134.

Wenn die Zahl, vor welche das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ gesetzt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrükken. Also ist $\sqrt{4}$ so viel als 2; $\sqrt{9}$ ist 3; $\sqrt{36}$ ist 6; und $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ist $\sqrt{\frac{49}{4}}$: das ist $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist daher die Irrationalität nur scheinbar, und fällt von selbst weg.

§. 135.

Es ist auch leicht, solche Irrationalzahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multipliciren. Also ist 2 mal $\sqrt{5}$ so viel als $2\sqrt{5}$; und $\sqrt{2}$ mit 3 multiplicirt, giebt $3\sqrt{2}$; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{9}$, so giebt auch $\sqrt{9}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt, folgende Form, nemlich $\sqrt{18}$, so daß $\sqrt{18}$ eben so viel ist, als $3\sqrt{2}$. Eben so ist $2\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{4a}$, und 3 $\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{9a}$. Und auf eine allgemeine Art ist b $\sqrt{a}$ so viel als die Quadratwurzel aus bba oder $\sqrt{abb}$; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesetzt werden kann; als b $\sqrt{a}$ anstatt $\sqrt{bba}$. Hieraus werden folgende Reductionen klar seyn:

$\sqrt{8}$, oder $\sqrt{2 \cdot 4}$, ist so viel als $2\sqrt{2}$.
$\sqrt{12}$, oder $\sqrt{3 \cdot 4}$, — — — $2\sqrt{3}$.
$\sqrt{18}$, oder $\sqrt{2 \cdot 9}$, — — — $3\sqrt{2}$.
$\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6 \cdot 4}$, — — — $2\sqrt{6}$.
$\sqrt{32}$, oder $\sqrt{2 \cdot 16}$, — — — $4\sqrt{2}$.
$\sqrt{75}$, oder $\sqrt{3 \cdot 25}$, — — — $5\sqrt{3}$. u. s. f.

§. 136.

Mit der Division hat es gleiche Bewandniß: $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt, giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, das ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Auf eben diese Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als $\sqrt{\frac{8}{2}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ist $\sqrt{\frac{18}{2}}$, oder $\sqrt{9}$, oder 3.

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ist $\sqrt{\frac{12}{3}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ ist $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt{\frac{4}{2}}$, oder $\sqrt{2}$.

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{3}}$, oder $\sqrt{3}$.

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ ist $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, oder $\sqrt{\frac{144}{6}}$, oder $\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6 \cdot 4}$, das ist $2\sqrt{6}$.

§. 137.

Bey der Addition und Subtraction ist nichts besonders zu erinnern, weil die Zahlen nur mit plus und minus verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

§. 138.

Endlich ist noch zu merken, daß man zum Unterschied dieser sogenannten Irrationalzahlen, die gewöhnlichen Zahlen, sowohl Ganze als Brüche, Rationalzahlen zu nennen pflegt.

Wenn also von Rationalzahlen die Rede ist, so werden darunter jedesmal ganze Zahlen, oder auch Brüche, die sich genau angeben lassen, verstanden, dergleichen z. B. die Quadratwurzel aus 16, aus 25 und aus $13\frac{4}{9}$ ist.

XIII. Capitel.

Von den aus eben dieser Quelle entspringenden unmöglichen oder imaginären Zahlen.

§. 139.

Wir haben schon oben (§. 122) gesehen, daß die Quadrate sowohl der positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus heraus kommen; indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben sowohl $+aa$ giebt, als wenn man $+a$ mit $+a$ mutipl[i]cirt. Und daher sind in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadratwurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen worden.

§. 140.

§. 140.

Wenn daher aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel gezogen werden soll, so ist man allerdings in einer großen Verlegenheit, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine negative Zahl wäre. Denn wenn man z. B. die Quadratwurzel von der Zahl — 4 verlangt, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt — 4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist aber weder + 2 noch — 2, indem sowohl + 2 als — 2, mit sich selbst multiplicirt allemal + 4 giebt, und nicht — 4.

§. 141.

Hieraus erkennt man also, daß die Quadratwurzel von einer negativen Zahl weder eine positive, noch negative Zahl seyn könne, weil auch von allen negativen Zahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen + bekommen; folglich muß die verlangte Wurzel von einer ganz besondern Art seyn, indem dieselbe weder zu den positiven, noch negativen Zahlen gerechnet werden kann.

§. 142.

Da nun oben (§. 19) schon angemerkt ist, daß die positiven Zahlen alle größer sind, als nichts oder 0: die negativen Zahlen hingegen alle kleiner, als nichts, oder 0; also, daß alles, was größer ist als nichts, durch positive Zahlen; hingegen alles, was kleiner ist als nichts, durch negative Zahlen ausgedrückt wird: so sieht man, daß die Quadratwurzel aus negativen Zahlen weder größer noch kleiner als nichts sind. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil 0 mit 0 multiplicirt 0, und also keine negative Zahl giebt.

§. 143.

Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als 0, oder 0 selbst sind; so ist klar, daß die Quadratwurzel von negativen Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen gerechnet werden kann. Folglich muß man behaupten, daß sie unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung statt finden.

§. 144.

Daher bedeuten alle diese Ausdrücke: $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, u. s. f. solche unmögliche oder imaginäre Zahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von negativen Zahlen angezeigt werden.

Von diesen kann man also mit allem Recht behaupten, daß sie weder größer noch kleiner als nichts, und auch nicht einmal nichts selbst sind, folglich müssen sie aus diesem Grunde für unmöglich gehalten werden.

§. 145.

Gleichwohl aber stellen sie sich unserm Verstande dar, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch bloß eingebildete Zahlen genannt werden. Ungeachtet aber diese Zahlen, als z. B. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, so haben wir doch davon einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbst multiplicirt, zum Product -4 hervorbringe; und dieser Begriff ist hinreichend, um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.

§. 146.

Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen unmöglichen Zahlen, als z. B. von $\sqrt{-3}$, wissen, besteht darin, daß das Quadrat davon, oder das Product, welches herauskommt, wenn $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, -3 giebt. Eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$, mult. -1. Und überhaupt, wenn man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt, oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

§. 147.

Da $-a$ so viel ist, als $+a$ mit -1 multiplicirt, und die Quadratwurzel aus einem Product gefunden wird, wenn man die Quadratwurzeln aus den Factoren mit einander multiplicirt (§. 121), so ist die Wurzel aus a mal -1 oder $\sqrt{-a}$ so viel, als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich das Unmögliche, welches darin vorkommt, allezeit auf $\sqrt{-1}$ bringen. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt: $\sqrt{4}$ aber ist 2, also ist $\sqrt{-4}$ so viel als $2\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-9}$ so viel als $\sqrt{9}$ mal $\sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-16}$ so viel als $4\sqrt{-1}$.

§. 148.

Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt, $\sqrt{6}$ geben. Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt $\sqrt{4}$, das ist 2 geben. Hieraus sieht man, daß zwey unmögliche Zahlen mit einander multiplicirt, eine mögliche oder wirkliche Zahl hervorbringen.

Wenn aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$, multiplicirt wird, so bekommt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt allezeit etwas unmögliches.

Zusatz. $\sqrt{-a} . \sqrt{-b} = \sqrt{-a . -b} = \sqrt{ab}$; welches auch so bewiesen werden kann:

$\sqrt{-a} . \sqrt{-b} = \sqrt{a} . \sqrt{-1} . \sqrt{b} . \sqrt{-1} = \sqrt{a} . \sqrt{b} . \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = \sqrt{ab} . -1 = -1 . \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$. Vorhin fanden wir $\sqrt{ab}$, und es kann einen Anfänger sehr ungewiß machen, welches von beyden Resultaten er als richtig anerkennen soll, da doch nur eines davon richtig seyn kann. Folgende Betrachtung wird ihm darüber allen Zweifel benehmen.

$\sqrt{ab}$ kann sowohl positiv als negativ seyn (§. 122). Es frägt sich also nur, welcher Fall hier statt finden muß, und dieses entscheidet der zweyte Beweis, der ganz bestimmt $\sqrt{-a} . \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$ giebt, welches allerdings eine mögliche Größe ist.

$\sqrt{-a} . \sqrt{b} = \sqrt{-ab} = \sqrt{-1 . ab} = \sqrt{ab} . \sqrt{-1}$ oder auch so:
$\sqrt{-a} . \sqrt{b} = \sqrt{a} . \sqrt{-1} . \sqrt{b} = \sqrt{ab} . \sqrt{-1}$, welches eine unmögliche Größe ist.

§. 149.

Eben so verhält es sich auch mit der Division. Denn da $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt $\sqrt{+4}$ geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt wird geben $\sqrt{-1}$: Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ das ist $\sqrt{-1}$, weil 1 soviel ist, als $\sqrt{+1}$.

Zusatz. Da $(\pm\sqrt{-1})\cdot(\pm\sqrt{-1}) = -1$, so ist $(\mp\sqrt{-1})\cdot(\pm\sqrt{-1}) = +1$,

$$\text{also } \mp\sqrt{-1} = \frac{1}{\pm\sqrt{-1}}$$

woraus man deutlich sieht, daß

$$\frac{1}{+\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$$

$$\text{und } \frac{1}{-\sqrt{-1}} = +\sqrt{-1}$$

Wer nun bloß $\sqrt{-1}$ schreibt, will offenbar dadurch anzeigen, daß er diese Wurzel positiv nimmt, daher ist es bey Euler falsch, wenn $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$ gesetzt wird.

Es erhellet auch schon sehr leicht aus folgenden Schlüssen:

$$\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1,$$

folglich $\sqrt{-1} = \frac{-1}{\sqrt{-1}}$ oder $-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$

Euler schließt so:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}.}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$$

Aber bey diesen Schlüssen bleibt man ungewiß, ob die Wurzel positiv oder negativ genommen werden muß, indem Euler mit eben dem Rechte die $\sqrt{+1} = -1$ nehmen könnte.

Anfänger mögen aus diesen Erinnerungen sehen, daß sie selbst die Schriften eines so großen Mathematikers, wie Euler war, mit Vorsicht lesen müssen.

$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}.\sqrt{-1}}{\sqrt{b}.\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Mehrere Exempel zur Uebung werden unten vorkommen.

§. 150.

Wie aber jene Anmerkung (§. 122) allezeit statt findet, daß die Quadratwurzel aus einer jeden Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder sowohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z. B. $\sqrt{4}$ sowohl $+2$ als -2 ist, und überhaupt für die Quadratwurzel aus a sowohl $+\sqrt{a}$ als $-$

$\sqrt{a}$,

$\sqrt{}\,a$, geschrieben werden kann, so gilt dies auch bey den unmöglichen Zahlen; und die Quadratwurzel aus $-a$ ist sowohl $+\sqrt{-a}$, als $-\sqrt{-a}$, wobey man die Zeichen $+$ und $-$ welche vor dem $\sqrt{}$ Zeichen gesetzt werden, von dem Zeichen, welches hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

§. 151.

Endlich muß noch der Zweifel gehoben werden, daß, da dergleichen Zahlen unmöglich sind, dieselben auch ganz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein sie ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem oft Fragen vorkommen, von welchen man sogleich nicht wissen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wenn nun ihre Auflösung auf solche unmögliche Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst unmöglich sey. Um dieses mit einem Beispiel zu erläutern, so wollen wir folgende Frage betrachten: man soll die Zahl 12 in zwey solche Theile zerlegen, deren Product 40 ausmache; wenn man nun diese Frage nach den Regeln auflöset, so findet man für die zwey gesuchten Theile $6+\sqrt{-4}$, und $6-\sqrt{-4}$, welche folglich unmöglich sind, und hieraus eben erkennt man, daß diese Frage sich durchaus nicht auflösen läßt. Wollte man aber die Zahl 12 in zwey solche Theile zerfällen, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.

XIV. Capitel.

Von den Cubiczahlen.

§. 152.

Wenn eine Zahl dreymal mit sich selbst, oder ihr Quadrat nochmal mit derselben Zahl multiplicirt wird, so wird das Product ein **Cubus** oder eine **Cubiczahl** genannt. Also ist von der Zahl a der Cubus aaa, welcher entsteht, wenn die Zahl a mit sich selbst, nemlich mit a, und das Quadrat derselben aa nochmals mit der Zahl a multiplicirt wird.

Also sind die Cubi der natürlichen Zahlen folgende:

Zahlen	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Cubi	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

Anmerk. Die vollständigsten Cubictafeln, die ich kenne, verdanken wir einem Mathematiker, *I. Paul Büchner*, Nürnberg 1701. In diesen Tafeln finden sich alle Quadrat- und Cubiczahlen von 1 bis 12000, allein sie sind wegen ihrer Unrichtigkeiten sehr unsicher zu gebrauchen. Herr Prof. Hindenburg hat uns schon längst dergleichen Tafeln versprochen, die nach seinen Erfindungen mit einer bewunderungswürdigen Geschwindigkeit und Richtigkeit unter der Aufsicht des Herrn von Schönberg bereits berechnet seyn sollen.

§. 153.

Wenn man bey diesen Cubiczahlen ihre Differenzen, wie solches bey den Quadratzahlen geschehen, in Betrachtung zieht, indem man eine jede von der folgenden subtrahirt, so bekommt man folgende Reihe von Zahlen, wobey sich noch keine Ordnung bemerken läßt,

7, 19,

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271; wenn man aber von denselben noch ferner die Differenzen nimmt, so erhält man folgende Reihe Zahlen, welche offenbar immer um 6 steigen, als:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

§. 154.

Auf diese Art wird man auch leicht die Cubiczahlen von Brüchen finden können: also ist von $\frac{1}{2}$ der Cubus $\frac{1}{8}$, von $\frac{1}{3}$ ist er $\frac{1}{27}$, von $\frac{2}{3}$ ist er $\frac{8}{27}$. Man darf nemlich nur besonders vom Zähler und Nenner die Cubiczahl nehmen. Also vom Bruch $\frac{3}{4}$ wird der Cubus seyn $\frac{27}{64}$.

§. 155.

Wenn von einer vermischten Zahl der Cubus gefunden werden soll, so muß dieselbe erstlich in einen einzelnen gleichgeltenden Bruch verwandelt werden, da denn die Rechnung leicht angestellt wird. Also von der Zahl $1\frac{1}{2}$ wird es leicht seyn den Cubus zu finden: denn da $1\frac{1}{2}$ zu einem einzelnen Bruch gebracht $\frac{3}{2}$ ist, so wird der Cubus von $\frac{3}{2}$ seyn $\frac{27}{8}$, das ist 3 und $\frac{3}{8}$. Eben so von der Zahl $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ ist der Cubus $\frac{125}{64}$, das ist 1 und $\frac{61}{64}$. Ferner von der Zahl $3\frac{1}{4}$ oder $\frac{13}{4}$ ist der Cubus $\frac{2197}{64}$, welches giebt $34\frac{21}{64}$.

§. 156.

Da von der Zahl a der Cubus aaa ist, so wird von der Zahl ab der Cubus seyn $aaabbb$; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl zwey oder mehr Factoren hat, der Cubus davon gefunden werde, wenn man die Cubiczahlen von allen Factoren mit einander multiplicirt. Also z. B.: weil 12 so viel ist als 3. 4, so multiplicirt man den Cubus von 3, welcher 27 ist, 27 ist, mit dem Cubus von 4, nehmlich 64, und so bekommt man 1728, und dieses ist der Cubus von 12. Hieraus ist ferner klar, daß der Cubus von 2 a ist 8 aaa, und also 8 mal größer, als der Cubus von a; eben so ist von 3 a der Cubus 27 aaa, und also 27 mal größer, als der Cubus von a.

§. 157.

Betrachtet man nun auch hier die Zeichen + und —, so ist für sich klar, daß von einer positiven Zahl + a der Cubus + a a a und folglich auch positiv seyn müsse. Wenn aber von einer negativen Zahl, als — a, der Cubus genommen werden soll, so nehme man erstlich das Quadrat, welches ist + aa, und, da solches nochmals mit — a multiplicirt werden soll, so wird der gesuchte Cubus — aaa und folglich auch negativ seyn. Daher es mit den Cubis eine ganz andere Bewandniß hat als mit den Quadraten, welche allezeit positiv herauskommen. Also ist von — 1, der Cubus — 1, von — 2, der Cubus — 8; von — 3, ist er — 27, u. s. f.

XV. Capitel.

Von den Cubicwurzeln und den daher entspringenden Irrationalzahlen.

§. 158.

Da vorher gezeigt worden, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden werden soll, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche dreymal mit sich selbst multiplitiplicirt dieselbe Zahl hervorbringet; und diese wird in Ansehung jener ihre Cubicwurzel genannt. Also ist die Cubicwurzel aus einer gegebenen Zahl eine solche Zahl, deren Cubus der gegebenen Zahl gleich ist.

§. 159.

Wenn also die gegebene Zahl eine wirkliche Cubiczahl ist, dergleichen im obigen Capitel gefunden, so ist es leicht, die Cubicwurzel davon zu finden. Also ist von 1 die Cubicwurzel 1; von 8 ist sie 2; von 27 ist sie 3; von 64 ist sie 4, u. s. w.

Eben so ist auch von — 27 die Cubicwurzel — 3; von — 125 ist sie — 5. Wenn die Zahl gebrochen ist, so ist von $\frac{8}{27}$ die Cubicwurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner wenn es eine vermischte Zahl ist, als $2\frac{10}{27}$, welche in einem einzelnen Bruch $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubicwurzel davon $\frac{4}{3}$, das ist $1\frac{1}{3}$.

§. 160.

Wenn aber die gegebene Zahl kein wirklicher Cubus ist, so läßt sich auch die Cubicwurzel davon weder durch ganze noch gebrochene Zahlen ausdrücken. Also da 43 keine Cubiczahl ist, so kann unmöglich weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen eine Zahl angezeigt werden, deren Cubus genau 43 ausmache. Inzwischen aber ist doch so viel bekannt, daß die Cubicwurzel davon größer sey, als 3, weil der Cubus davon nur 27 ausmacht, und doch kleiner als 4, weil der Cubus davon schon 64 ist. Folglich muß die verlangte Cubicwurzel zwischen den Zahlen 3 und 4 enthalten seyn.

§. 161.

Wollte man nun zu 3, weil die Cubicwurzel aus 43 größer ist als 3, noch einen Bruch hinzusetzen,

setzen, so könnte man der Wahrheit zwar näher kommen, da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so kann derselbe niemals genau 43 werden. Man setze z. B. die gesuchte Cubicwurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$, so würde der Cubus davon seyn $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43.

§. 162.

Dies beweiset also deutlich, daß sich die Cubicwurzel aus 43 auf keinerley Weise durch ganze Zahlen und Brüche ausdrücken lasse; da wir aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben haben, so bedient man sich, um dieselbe anzuzeigen, des bey den Quadratwurzeln üblichen Zeichens, in welches man aber, um die Cubicwurzel von der Quadratwurzel zu unterscheiden, die Ziffer 3 zu setzen pflegt. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$ die Cubicwurzel von 43, das heißt, eine solche Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche dreymal mit sich selbst multiplicirt, 43 giebt.

Anmerk. Die Ursache, warum man eine 3 in das Wurzelzeichen setzt, wenn man dadurch Cubicwurzeln anzeigen will, ist die, weil man die Cubiczahlen als Producte von 3 gleichen Factoren betrachten kann; denn von a ist der Cubus aaa.

§. 163.

Man kann also dergleichen Ausdrücke durchaus nicht zu den Rationalzahlen rechnen, sondern muß sie als eine besondere Art von Irrationalgrößen darstellen. Sie haben auch mit den Quadratwurzeln keine Gemeinschaft, und es ist nicht möglich, eine solche Cubicwurzel durch eine Quadratwurzel, als etwa $\sqrt{12}$ auszudrücken: denn da von $\sqrt{12}$, das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$, also noch irrational, folglich kann derselbe nicht 43 seyn.

§. 164.

Ist aber die gegebene Zahl ein wirklicher Cubus, so werden diese Ausdrücke rational, also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt[3]{aaa}$ so viel als a.

§. 165.

Sollte man eine Cubicwurzel, als $\sqrt[3]{a}$, mit einer andern multipliciren, als mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; denn wir wissen, daß die Cubicwurzel aus einem Product ab gefunden wird, wenn man die Cubicwurzeln aus den Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wenn $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotient $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

§. 166.

Daher läßt sich einsehen, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 gleich ist $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Also auch umgekehrt, wenn die Zahl hinter dem Zeichen einen Factor hat, der ein Cubus ist, so kann die Cubicwurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden. Also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folgt, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 gleich 8.2 ist.

§. 167.

§. 167.

Ist die gegebene Zahl negativ, so hat die Cubicwurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadratwurzeln; weil nehmlich die Cubi von negativen Zahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubicwurzeln aus negativen Zahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als -2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$, und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen (—), welches hinter dem Cubicwurzelzeichen steht, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also wird man hier auf keine unmögliche oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadratwurzeln der negativen Zahlen.

XVI. Capitel.

Von den Dignitäten oder Potenzen überhaupt.

§. 101.

Wenn eine Zahl mehrmal mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product eine **Dignität** oder **Potenz**, zuweilen auch eine **Potestät** genannt. Im Deutschen könnte man diesen Namen durch **Macht** ausdrücken. Da nun ein Quadrat entsteht, wenn eine Zahl zweymal, und ein Cubus, wenn die Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt wird, so sind sowohl die Quadrate, als die Cubi, unter dem Namen der Potenzen oder Dignitäten begriffen.

Anmerk. Für Potenz oder Dignität die deutschen Wörter Macht oder Würde zu gebrauchen, ist zwar von einigen neuern Schriftstellern versucht, aber durchaus abzurathen. Dieses gilt fast von allen neueingeführten mathematischen Kunstwörtern.

§. 169.

Diese Potenzen werden nach der Anzahl, wie vielmal eine Zahl mit sich selbst multiplicirt worden, von einander unterschieden. Also wenn eine Zahl zweymal mit sich selbst multiplicirt wird, so heißt das Product ihre zweyte Potenz, welche demnach eben so viel ist, als das Quadrat davon; wird eine Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potenz, welche also einerley Bedeutung mit dem Cubus hat: wird ferner eine Zahl viermal mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potenz genannt, welche man gewöhnlich mit dem Namen des Biquadrats belegt: und hieraus ergiebt sich ferner von selbst, was die fünfte, sechste, siebente Potenz einer Zahl bedeute; welche höhere Potenzen übrigens mit keinem besondern Namen bezeichnet werden.

§. 170.

Um dieses besser zu erläutern, so muß man bemerken, erstlich, daß von der Zahl 1 alle Potenzen immer 1 bleiben; weil, so vielmal man auch 1 mit sich selbst multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Wir wollen daher die Potenzen der Zahl 2 sowohl als der Zahl 3 nach ihrer Ordnung herschreiben. Sie gehen folgendermaßen fort:

Poten-

Potenzen.	der Zahl 2.	der Zahl 3.
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Vorzüglich merkwürdig sind die Potenzen der Zahl 10, nehmlich

I. II. III. IV. V. VI.
10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000,

weil sich darauf unsere ganze Rechenkunst gründet. Uebrigens ist zu merken, daß die über die Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w. gesetzten römischen Ziffern andeuten, die wievielste Potenz von 10 eine jede dieser Zahlen sey.

§. 171.

Will man die Sache auf eine allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potenzen der Zahl a folgendergestalt verhalten.

I. II. III. IV. V. VI.
a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, u. s. w.

Diese Art zu schreiben hat aber die Unbequemlichkeit, daß, wenn sehr hohe Potenzen geschrieben werden sollen, man eben denselben Buchstaben vielmal hinschreiben müßte, und es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, um zu wissen, die wievielste Potenz dadurch angezeigt werde. Also z. B. würde sich die hundertste Potenz auf diese Art schwerlich schreiben lassen, und noch viel weniger zu erkennen seyn.

§. 172.

Um dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit bequemere Art, solche Potenzen auszudrükken, eingeführt, die daher auf das sorgfältigste erklärt zu werden verdient. Man pflegt nemlich über der Zahl, wovon z. B. die hundertste Potenz angezeigt werden soll, etwas seitwärts zur Rechten die Zahl 100 zu schreiben: also a^{100}, welches ausgesprochen wird, a erhoben zu Hundert. Die oben dabey geschriebene Zahl, als in unserm Fall 100, wird der Exponent der Potenz genannt, welcher Name wohl zu merken ist.

§. 173.

Nach dieser Art deutet also a^2, oder a erhoben zu 2, die zweyte Potenz von a an, und pflegt auch bisweilen anstatt aa geschrieben zu werden; weil beyde Arten gleich leicht zu schreiben und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potenz aaa, nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potenz, a^5 die fünfte, und a^6 die sechste Potenz von a aus, u. s. w.

Anmerk. Da $a^2 = a.a = 1.a.a$; $a^3 = 1.a.a.a$; $a^4 = 1.a.a.a.a$, u. s. f. ist; und überhaupt $a^m = a.a.a \cdots a = 1.a.a.a \cdots a$ seyn muß, wo a m mal vor-

vorkömmt; so bedeutet der Exponent m jeder mten Potenz von a nichts anders, als daß die Einheit so oft mit der Zahl a multiplicirt ist, als m Einheiten enthält, oder daß die Zahl a so vielmal mit sich selbst multiplicirt ist, als der Exponent weniger Eins anzeigt, voraus gesetzt, daß m eine ganze positive Zahl bedeutet.

§. 174.

Nach dieser Art werden alle Potenzen von der Zahl a folgendergestalt vorgestellt,

$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}$, u. s. f.

woraus man sieht, daß für das erste Glied a füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augen fallen zu machen. Daher ist a^1 nichts anders als a, weil die Einheit anzeigt, daß der Buchstabe a nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potenzen heißt eine geometrische Progression, weil immer ein jedes Glied gleich vielmal größer ist, alsdas vorhergehende.

§. 175.

Wie in dieser Reihe der Potenzen ein jedes Glied gefunden wird, wenn man das vorhergehende mit a multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird; so wird auch aus einem jeglichen Gliede das vorhergehende gefunden, wenn man jenes durch a dividirt, als wodurch der Exponent um eins vermindert wird. Hieraus sieht man, daß das dem ersten Glied a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ seyn müsse, das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe a^0 seyn, woraus diese merkwürdige Eigenschaft folgt, daß a^0 allezeit 1 seyn müsse, die Zahl a mag auch so groß oder so klein seyn, als sie immer will, ja so gar auch, wenn a nichts ist, also daß 0^0 gewiß 1 ausmacht.

§. 176.

Diese Reihe von Potenzen läßt sich noch weiter rückwärts fortsetzen, und zwar auf eine doppelte Weise. Einmal, indem immer das Glied durch a getheilt wird; hernach aber auch, indem man den Exponenten um eins vermindert oder eins davon subtrahirt. Und es ist gewiß, daß nach beyden Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese doppelte Art rückwärts vorstellen, welche auch rückwärts von der Rechten zur Linken gelesen werden muß:

1ste	$\frac{1}{aaaaaa}$ $\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{aaaaa}$ $\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{aaaa}$ $\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{aaa}$ $\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{aa}$ $\frac{1}{a_2}$	$\frac{1}{a}$ $\frac{1}{a^1}$	1	a
2te	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

§. 177.

Hierdurch lernt man also solche Potenzen kennen, deren Exponenten negative Zahlen sind; und man ist im Stande den Werth derselben genau anzuzeigen. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, folgendergestalt vor Augen legen:

Erstlich a^0, ist so viel als 1.

— a^{-1} — — $\frac{1}{a}$

— a^{-2} — — $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$

— a^{-3} — — $\frac{1}{a^3}$

— a^{-4} — — $\frac{1}{a^4}$ u. s. f.

Anmer-

Anmerk. Die Einheit *m* mal mit a multipliciren, und sie *m* mal mit a dividiren, sind entgegengesetzte Bedingungen: also ist auch $\frac{1}{aaa\ldots a}$ das Entgegengesetzte von 1. a. a. a - - - - a, wenn bey jeder für sich genommenen Beziehung a *m* mal vorkömmt. So wie daher 1. a. a. a - - - a durch a^m angezeigt wird, eben so kann man $\frac{1}{a.a.a\ldots a} = \frac{1}{a^m}$ mit Recht durch a^{-m} anzeigen. Bey einer Bezeichnung, wie a^{-m}, müßte nemlich der Exponent $-m$ durch seine Einheiten anzeigen, wie oft Eins mit a dividirt ist, also gerade das Entgegengesetzte von a^m.

Zwischen $+1$ und -1 liegt 0: da nun bey a^1 oder a die Einheit einmal mit a multiplicirt, und bey $a^{-1} = \frac{1}{a}$ dieselbe mit a dividirt ist, so muß bey a^0 die Einheit mit a weder multiplicirt noch dividirt, sondern ungeändert gelassen werden, das heißt: wenn man sich bey a^0 durch 0 einen Exponenten, und durch a^0 eine Potenz von a denken will, so muß man allemal $a^0 = 1$ setzen.

§. 178.

Hieraus ist auch klar, wie die Potenzen von einem Product, als ab, gefunden werden müssen. Diese sind nemlich:

ab oder a^1b^1, a^2b_2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6, u. s. f.

Eben so werden auch die Potenzen von Brüchen gefunden, als von dem Bruch $\frac{a}{b}$ sind die Potenzen folgende:

$$\frac{a^1}{b^1},\ \frac{a^2}{b^2},\ \frac{a^3}{b^3},\ \frac{a^4}{b^4},\ \frac{a^5}{b^5},\ \frac{a^6}{b^6},\ \frac{a^7}{b^7},\ \text{u. s. f.}$$

§. 179.

Endlich kommen auch noch hier die Potenzen von negativen Zahlen vor. Es sey demnach gegeben die negative Zahl $-a$, so werden ihre Potenzen der Ordnung nach also auf einander folgen:

$-a, +a^2, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6, -a^7$ u. s. f.

 woraus

woraus erhellet, daß nur diejenigen Potenzen, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; hingegen sind diejenigen Potenzen, deren Exponenten gerade sind, alle positiv. Also müssen die dritte, fünfte, siebente, neunte Potenz der negativen Zahlen alle das Zeichen — haben.

Die zweyte, vierte, sechste, achte Potenz hingegen alle das Zeichen +.

XVII. Capitel.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

§. 180.

Bey der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemerken, indem verschiedene Potenzen nur mit dem Zeichen + und — verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summe von der dritten und zweyten Potenz der Zahl a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wenn von der fünften Potenz die vierte abgezogen wird, und beydes läßt sich nicht kürzer ausdrücken. Wenn aber gleiche Potenzen vorkommen, so ergiebt sich, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$ u. s. f.

§. 181.

Bey der Multiplication solcher Potenzen aber kommt verschiedenes zu bemerken vor. Erstlich, wenn eine jede Potenz von a mit der Zahl a selbst multiplicirt werden soll, so kommt die folgende Potenz heraus, deren Exponent um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt, giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt, giebt a^4 u. s. f. Eben so mit denjenigen, deren

ren Exponenten negativ sind, wenn diese mit a multiplicirt werden sollen, darf man nur zu dem Exponenten 1 addiren. Also a^{-1} mit a multiplicirt, giebt a^0, das ist 1, welches daraus erhellet, weil a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ (§. 176) ist, welches mit a multiplicirt, $\frac{a}{a}$ giebt, das ist 1. Eben so a^{-2}, wenn solches mit a multiplicirt werden soll, giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt, giebt a^{-9}, u. s. f.

§. 182.

Wenn aber eine Potenz mit aa, oder mit der zweyten Potenz multiplicirt werden soll, so wird der Exponent um 2 größer; also a^2 mit a^2 multiplicirt, giebt a^4, und a^3 mit a^2 multiplicirt, giebt a^5; ferner a^4 mit a multiplicirt, giebt a^6, und überhaupt a^n mit a^2 multiplicirt, giebt a^{n+2}. Eben so mit negativen Exponenten, als a^{-1} mit a^2 multiplicirt, giebt a^1, das ist a, welches sich daraus ergiebt, weil a^{-1} ist $\frac{1}{a}$, dieses mit aa multiplicirt, giebt $\frac{aa}{a}$, das ist a. Eben so giebt a^{-2} mit a^2 multiplicirt, a^0, das ist 1, ferner a^{-3} mit a^2 multiplicirt, giebt a^{-1}.

§. 183.

Eben so beweiset man, daß, wenn eine jede Potenz der Wurzel a mit der dritten Potenz von a, oder mit a^3 multiplicirt werden soll, der Exponent derselben um 3 vermehrt werden müsse; oder a^n mit a^3 multiplicirt, giebt a^{n+3}. Und überhaupt, wenn zwey Potenzen von a mit einander multiplicirt werden sollen, so ist das Product wieder eine Potenz von a, deren Exponent die Summe von jenen Exponenten ist. Also a^4 mit a^5 multiplicirt, giebt a^9,

und

und a^{12} mit a^7 multiplicirt, giebt a^{19}, oder a^n mit a^m multiplicirt, giebt a^{n+m}.

§. 184.

Aus diesem Grunde können die hohen Potenzen von bestimmten Zahlen ziemlich leicht gefunden werden; wenn man z. B. die 24ste Potenz von 2 haben wollte, so würde man dieselbe finden, wenn man die 12te Potenz mit der 12ten Potenz multiplicirte, weil 2^{24} so viel ist, als 2^{12} mit 2^{12} multiplicirt. Nun aber ist 2^{12}, wie wir oben gesehen haben, 4096: daher multiplicirt man 4096 mit 4096, so wird das Product 16777216 die verlangte Potenz, nemlich 2^{24} anzeigen.

§. 185.

Bey der Division ist folgendes zu merken. Erstlich wenn eine Potenz von a durch a dividirt werden soll, so wird ihr Exponent um 1 kleiner, oder man muß 1 davon subtrahiren. Also a^5 durch a dividirt, giebt a^4, und a^0, das ist 1, durch a dividirt, giebt a^{-1} oder $\frac{1}{a}$. Ferner a^{-3} durch a dividirt, giebt a^{-4}.

§. 186.

Wenn aber eine Potenz von a durch a^2 dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten derselben 2 abziehen, und wollte man dieselbe durch a^3 dividiren, so müßte man von ihrem Exponenten 3 abziehen. Also überhaupt, was für eine Potenz auch immer von a durch eine andere dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten der erstern den Exponenten der andern subtrahiren. Also a^{15} durch a^7 dividirt, giebt a^8, und a^6 durch a^7 dividirt, giebt a^{-1}. Ferner auch a^{-3} durch a^4 dividirt, giebt a^{-7}.

§. 187.

Hieraus ist leicht zu begreifen, wie Potenzen von Potenzen gefunden werden müssen, weil solches durch die Multiplication geschieht. Also wenn man die zweyte Potenz oder das Quadrat von a^3 verlangt, so ist dasselbe a^6, und die dritte Potenz, oder der Cubus von a^4 wird seyn a^{12}; woraus erhellet, daß, um das Quadrat einer Potenz zu finden, man den Exponenten derselben nur zu verdoppeln brauche. Also von a^n ist das Quadrat a^{2n}, und der Cubus oder die dritte Potenz von a^n wird seyn a^{3n}. Eben so wird auch die siebente Potenz von a^n gefunden a^{7n}, u. s. f.

§. 188.

Das Quadrat von a^2 ist a^4, das ist die vierte Potenz von a, welche daher das Quadrat des Quadrats ist. Hieraus erhellet, warum man die vierte Potenz ein **Biquadrat** oder auch ein **Quadratoquadrat** nennet.

Weil ferner von a^3 das Quadrat a^6 ist, so pflegt man auch die sechste Potenz einen **Quadrato-Cubus** zu nennen.

Endlich, weil der Cubus von a^3 ist a^9, das ist die neunte Potenz von a, so pflegt dieselbe deswegen auch ein **Cubocubus** genannt zu werden. Mehrere Namen sind heut zu Tage nicht üblich.

Anmerk. Die Rechenmeister drücken sich in der Potenzenrechnung sehr unbequem aus, ihre sehr zusammengesetzten Benennungen und Beziehungen sind jetzo nur als Antiquität merkwürdig. Man findet solche noch in **Martini** getreuem arithmetischen Wegweiser. Berlin 1741, 494 S. und in **Marpurg** Progressionalcalcul, Berlin 1774. 40 S.

XVIII. Ca-

XVIII. Capitel.

Von den Wurzeln in Absicht auf alle Potenzen.

§. 189.

Weil die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl eine solche Zahl ist, deren Quadrat derselben gleich ist, und die Cubicwurzel eine solche, deren Cubus ihr gleich ist, so können auch von einer jeden gegebenen Zahl solche Wurzeln angezeigt werden, deren vierte oder fünfte, oder eine beliebige andere Potenz derselben gegebenen Zahl gleich ist. Um diese verschiedene Arten von Wurzeln von einander zu unterscheiden, wollen wir die Quadratwurzel die zweyte Wurzel, und die Cubicwurzel die dritte Wurzel nennen, da denn die Wurzel, deren vierte Potenz einer gegebenen Zahl gleich ist, ihre vierte Wurzel, und diejenige, deren fünfte Potenz derselben Zahl gleich ist, ihre fünfte Wurzel u. s. f. heißen wird.

§. 190.

Wie die zweyte oder Quadratwurzel durch das Zeichen $\sqrt{\ }$, und die dritte oder Cubicwurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[3]{\ }$ angedeutet wird; so pflegt man auf gleiche Weise die vierte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[4]{\ }$, die fünfte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[5]{\ }$, u. s. f. anzuzeigen; woraus denn klar ist, daß nach dieser Schreibart die Quadratwurzel durch $\sqrt[2]{\ }$ ausgedrückt werden sollte. Weil aber die Quadratwurzeln am häufigsten vorkommen, so wird der Kürze halber die Zahl 2 aus dem Wurzelzeichen weggelassen.

lassen. Daher, wenn in dem Wurzelzeichen keine Ziffer befindlich ist, so muß allezeit dadurch die Quadratwurzel verstanden werden.

§. 191.

Um dieses vor Augen zu legen, so wollen wir die verschiedenen Wurzeln der Zahl a hierher setzen, und ihre Bedeutung anzeigen.

$\sqrt{a}$ ist die IIte Wurzel von a
$\sqrt[3]{a}$ - - IIIte - - - - a
$\sqrt[4]{a}$ - - IVte - - - - a
$\sqrt[5]{a}$ - - Vte - - - - a
$\sqrt[6]{a}$ - - VIte - - - - a u. s. f.

Also daß hinwiederum die
IIte Potenz von $\sqrt{a}$ dem a gleich ist
IIIte - - - $\sqrt[3]{a}$ - a - -
IVte - - - $\sqrt[4]{a}$ - a - -
Vte - - - $\sqrt[5]{a}$ - a - -
VIte - - - $\sqrt[6]{a}$ - a - - u. s. f.

§. 192.

Die Zahl a mag nun groß oder klein seyn, so begreift man daher, wie alle Wurzeln von diesen verschiedenen Graden verstanden werden müssen.

Hierbey ist zu merken, daß, wenn für a die Zahl 1 genommen wird, alle diese Wurzeln immer 1 bleiben, weil alle Potenzen von 1 immer 1 sind.

Wenn aber die Zahl a größer ist als 1, so sind auch alle Wurzeln größer als 1.

Ist aber die Zahl kleiner als 1, so sind auch alle ihre Wurzeln kleiner als 1.

§. 192.

Ist die Zahl a positiv, so begreift man aus demjenigen, was oben von den Quadrat- und Cubicwurzeln angeführt worden, daß auch alle Wurzeln wirklich angezeigt werden können, und folglich wirkliche und mögliche Zahlen sind.

Ist aber die Zahl a negativ, so werden ihre zweyten, vierten, sechsten und überhaupt alle gerade Wurzeln unmögliche Zahlen, weil alle gerade Potenzen so wohl von positiven als negativen Zahlen immer das Zeichen plus bekommen (§. ~~188~~ 178).

Hingegen aber werden die dritten, fünften, siebenten, und überhaupt alle ungerade Wurzeln negativ, weil die ungeraden Potenzen von negativen Zahlen auch negativ sind.

§. 194.

Daher erhält man also eine unendliche Menge neuer Arten von Irrational- oder surdischen Zahlen, denn so oft die Zahl a keine solche wirkliche Potenz ist, als die Wurzel anzeigt, so oft ist es auch nicht möglich, diese Wurzel durch ganze Zahlen oder Brüche auszudrücken, folglich gehört sie in dasjenige Geschlecht von Zahlen, welche Irrationalzahlen genannt werden.

XIX. Capitel.

Von der Bezeichnung der Irrationalzahlen durch gebrochene Exponenten.

§. 195.

Wir haben oben im XVII. Capitel von den Rechnungsarten mit den Potenzen (§. 187) gezeigt, daß man das Quadrat von einer jeden Potenz finde, wenn man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweyte Potenz von a^n, a^{2n} sey. Daher ist hinwiederum von der Potenz a^{2n} die Quadratwurzel a^n, und wird folglich gefunden, wenn man den Exponenten derselben halbirt oder durch 2 dividirt.

§. 196.

Also ist von a^2 die Quadratwurzel a^1, von a^4 ist die Quadratwurzel a^2, und von a^6 ist die Quadratwurzel a^3, u. s. f. Weil nun dieses eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, wenn die Quadratwurzel von a^3 gefunden werden soll, daß dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ seyn werde. Eben so wird von a^5 die Quadratwurzel seyn $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbst oder von a^1 wird die Quadratwurzel seyn $a^{\frac{1}{2}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel sey als $\sqrt{a}$, welche neue Art die Quadratwurzel anzudeuten wohl zu bemerken ist.

§. 197.

Es ist ferner gezeigt, daß, um den Cubus von einer Potenz, als a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multipliciren müsse, und also der Cubus davon a^{3n} ist.

Wenn also rückwärts von der Potenz a^{3n} die dritte oder die Cubicwurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig, den Exponenten jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubicwurzel a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3, u. s. f.

§. 198.

Dieses muß nun auch wahr seyn, wenn sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubicwurzel seyn $a^{\frac{2}{3}}$. Und von a^4 ist dieselbe $a^{\frac{4}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbst, das ist von a^1, die Cubic- oder dritte Wurzel seyn $a^{\frac{1}{3}}$. Hieraus sieht man, daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel sey als $\sqrt[3]{a}$.

§. 199.

Eben so verhält es sich auch mit den höhern Wurzeln, und die vierte Wurzel von a wird seyn $a^{\frac{1}{4}}$, welches folglich eben so viel ist als $\sqrt[4]{a}$. Gleicher Weise wird die fünfte Wurzel von a seyn $a^{\frac{1}{5}}$, welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$, und dieses ist auch von allen höhern Wurzeln zu verstehen.

§. 200.

Man könnte nun also die schon längst eingeführten Wurzelzeichen gänzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen; allein da man einmal an jene Zeichen gewöhnt ist, und diese in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam, sie ganz abzuschaffen. Doch wird diese neue Art jetzt auch häufig gebraucht, weil sie die Natur der Sache deutlich in sich faßt. Denn

daß

daß $a^{\frac{1}{2}}$ wirklich die Quadratwurzel von a sey, sieht man gleich, wenn man nur das Quadrat davon nimmt, welches geschieht, wenn man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da denn offenbar herauskommt a^1, das ist a.

§. 201.

Hieraus ersieht man auch, wie alle übrige gebrochene Exponenten verstanden werden müssen; als wenn man $a^{\frac{4}{3}}$ hat, so muß von der Zahl a erstlich ihre vierte Potenz a^4 genommen, und hernach die Cubic- oder dritte Wurzel gezogen werden, also daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gemeinen Art $\sqrt[3]{a^4}$. Eben so wird der Werth von $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wenn man erstlich den Cubus oder die dritte Potenz von a sucht, welche a^3 ist und hernach aus derselben die vierte Wurzel ziehet: so daß also $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist, als $\sqrt[4]{a^3}$. Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ eben so viel, als $\sqrt[5]{a^4}$ u. s. f.

Anmerk. Bey Potenzen, wie $a^{\frac{n}{m}}$ mit gebrochenen Exponenten, kann man sich die Sache auch so vorstellen: die gegebene Wurzel (a) soll in so viel gleiche Factoren zertheilt werden, als der Nenner oder Divisor (m) anzeigt, und von diesen gleichen Factoren soll man so viel behalten, als der Zähler oder der Dividendus (n) anzeigt. Z. B. $a^{\frac{2}{5}}$; hier stelle man sich vor, a sey = xxxxx, und von diesen 5 gleichen Factoren behält man nur 2, also xx, so hat man $a^{\frac{2}{5}}$.

Denn hier ist $x = \sqrt[5]{a}$, folglich $x^2 = (\sqrt[5]{a})^2 = \sqrt[5]{a}.\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}}$.

§. 202.

Wenn der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1, so läßt sich der Werth auch auf folgende

folgende Art bestimmen. Es sey gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches heraus kommt, wenn man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{}a$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{}a$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$, eben so viel als $a^3\sqrt[3]{}a$; und $a^{\frac{15}{4}}$, das ist $a^{3\frac{3}{4}}$, ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{}a^3$. Aus diesem allen zeigt sich hinlänglich der herrliche Gebrauch der gebrochenen Exponenten.

§. 203.

Auch in Brüchen hat dies seinen großen Nutzen. Es sey z. B. gegeben $\frac{1}{\sqrt{a}}$, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Wir haben aber oben gesehen, daß ein solcher Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so wird $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ seyn $a^{-\frac{1}{3}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ wird verwandelt in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, woraus entspringet a^2, multiplicirt mit $a^{-\frac{3}{4}}$, welches ferner verwandelt wird in $a^{\frac{5}{4}}$, das ist $a^{1\frac{1}{4}}$, und das ist ferner $a\sqrt[4]{}a$. Dergleichen Reductionen werden durch Uebung gar merklich erleichtert.

§. 204.

Endlich ist noch zu merken, daß eine jede solche Wurzel auf vielerley Art kann vorgestellt werden. Denn da $\sqrt{}a$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, u. s. f. verwandelt werden kann; so ist klar, daß $\sqrt{}a$ so viel ist als $\sqrt[4]{}a^2$, imgleichen auch $\sqrt[6]{}a^3$ und $\sqrt[8]{}a^4$ u. s. f. Eben

so

so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$, oder $\sqrt[9]{a^3}$, oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzelzeichen ausgedrückt werden könne:

$$\sqrt[2]{a^2}, \text{ oder } \sqrt[3]{a^3}, \text{ oder } \sqrt[4]{a^4}, \text{ oder } \sqrt[5]{a^5}, \text{ u. s. f.}$$

§. 205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. B. wenn $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. So bekommt man gleiche Wurzelzeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daraus erhellet, weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt, $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ giebt. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$, und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Sollte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

XX. Capitel.

Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung überhaupt.

§. 206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungsarten, als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potenzen, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.

Daher wird es zur bessern Erläuterung dienen, wenn wir den Ursprung dieser Rechnungsarten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man daraus schließen könne, ob noch andere dergleichen Arten möglich sind oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redensart, *ist so viel als*, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun =, und wird ausgesprochen, *ist gleich*. Also wenn geschrieben wird $a=b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sey als b, oder daß a dem b gleich sey; also ist z. B. $3 \cdot 5 = 15$.

§. 207.

Die erste Rechnungsart, welche sich unserm Verstand darstellt, ist unstreitig die Addition, durch welche zwey Zahlen zusammen addirt, oder die Summe derselben gefunden werden soll. Es seyen demnach a und b die zwey gegebenen Zahlen und ihre Summe werde durch den Buchstaben c angedeutet, so hat man $a+b=c$. Also wenn die beyden Zahlen a und b bekannt sind, so lehrt die Addition, wie man daraus die Zahl c finden soll.

§. 208.

Man behalte diese Vergleichung $a+b=c$, kehre aber jetzt die Frage um, und frage, wenn die Zahlen a und c bekannt sind, wie man die Zahl b finden soll.

Man frägt also, was man für eine Zahl zu der Zahl a addiren müsse, damit die Zahl c herauskomme. Es sey z. B. $a=3$ und $c=8$, also daß $3+b=8$ seyn müßte, so ist klar, daß b gefunden wird, wenn man 3 von 8 subtrahirt. Ueberhaupt also, um b zu finden, so muß man a von c subtrahiren

hiren und da wird $b = c - a$. Denn wenn a dazu addirt wird, so bekommt man $c - a + a$, das ist c.

Hierin besteht also der Ursprung der Subtraction.

§. 209.

Die Subtraction entsteht also, wenn die Frage, welche bey der Addition vorkommt, umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl, welche abgezogen werden soll, größer ist, als diejenige, von der sie abgezogen werden soll: als wenn z. B. 9 von 5 abgezogen werden sollte; so erhalten wir daher den Begriff von einer neuen Art Zahlen, welche negativ genannt werden, weil $5 - 9 = -4$.

§. 210.

Wenn viele Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so wird ihre Summe durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdenn das Product. Also bedeutet ab das Product, welches entsteht, wenn die Zahl a mit der Zahl b multiplicirt wird. Wenn wir nun dieses Product mit dem Buchstaben c andeuten, so haben wir $ab = c$, und die Multiplication lehrt, wenn die Zahlen a und b bekannt sind, wie man daraus die Zahl c finden solle.

§. 211.

Man werfe nun folgende Frage auf: **wenn die Zahlen c und a bekannt sind, wie soll man daraus die Zahl b finden?** Es sey z. B. $a = 3$ und $c = 15$, so daß $3b = 15$, und es werde gefragt, **mit was für einer Zahl man 3 multipliciren müsse, damit 15 herauskomme?** Dieses geschieht nun durch die Division und wird daher überhaupt die Zahl b gefunden, wenn

 man

man c durch a dividirt; woraus folglich diese Gleichung entsteht $b = \frac{c}{a}$.

§. 212.

Weil es sich nun oft zutragen kann, daß sich die Zahl c nicht wirklich durch die Zahl a theilen läßt, und gleichwohl der Buchstaben b einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche Brüche genannt werden. Also wenn wir annehmen $a = 4$, und $c = 3$, also daß $4b = 3$, so sieht man wohl, daß b keine ganze Zahl seyn kann, sondern ein Bruch ist, nemlich $b = \frac{3}{4}$.

§. 213.

Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden ist, wenn viele Zahlen, die addirt werden sollen, einander gleich waren, so wollen wir jetzt auch bey der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potenzen, welche auf eine allgemeine Art durch diese Form a^b vorgestellt werden, wodurch angezeigt wird, daß die Zahl a so viele mal mit sich selbst multiplicirt werden müsse, als die Zahl b anweiset. Hier wird, wie oben schon erklärt worden, a die Wurzel, b der Exponent und a^b die Potenz genannt.

§. 214.

Laßt uns nun diese Potenz selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$, worin also drey Buchstaben, a, b, c, vorkommen. Dieses vorausgesetzt, so wird in der Lehre von den Potenzen gezeiget, wie man, wenn die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potenz selbst,

selbst, das ist den Buchstaben c bestimmen soll. Es sey z. B. $a = 5$ und $b = 3$, also $c = 5^3$: woraus man sieht, daß von 5 die dritte Potenz genommen werden müsse, welche 125 ist; also wird $c = 125$.

Hier wird also gelehrt, wie man aus der Wurzel a und dem Exponenten b die Potenz c finden soll.

§. 215.

Wir wollen nun auch hier sehen, wie die Frage umgekehrt oder verändert werden kann, also daß aus zweyen von diesen dreyen Zahlen a, b, c, die dritte gefunden werden soll, welches auf zweyerley Art geschehen kann, indem nebst dem c, entweder a oder b, für bekannt angenommen wird. Wobey zu merken, daß in den obigen Fällen bey der Addition und Multiplication nur eine Veränderung statt findet, weil im ersten Fall, wo $a + b = c$, es gleich viel ist, ob man nebst dem c noch a oder b für bekannt annimmt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe $a + b$ oder $b + a$; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $ab = c$ oder $ba = c$, wo die Buchstaben a und b ebenfalls verwechselt werden können. Allein dieses findet nicht bey den Potenzen statt, indem für a^b keinesweges gesetzt werden kann b^a, welches aus einem einzigen Exempel leicht zu ersehen; wenn z. B. $a = 5$ und $b = 3$ gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr weit von 125 verschieden ist.

§. 216.

Hieraus ergiebt sich, daß hier wirklich noch zwey Fragen angestellt werden können, wovon die erste ist: wenn nebst der Potenz c noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll? Die zweyte

Frage aber ist: wenn nebst der Potenz c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll?

§. 217.

Im obigen ist nur die erste von diesen zwey Fragen erörtert worden, und zwar im 18ten Capitel in der Lehre von den Wurzeln u. s. w. Denn wenn man z. B. $b = 2$ und $a^2 = c$, so muß a eine solche Zahl seyn, deren Quadrat dem c gleich sey, und da wird $a = \sqrt{c}$. Eben so, wenn $b = 3$, so hat man $a^3 = c$; da muß also der Cubus von a der gegebenen Zahl c gleich seyn, und da erhält man $a = \sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf eine allgemeine Art verstehen, wie man aus den beyden Buchstaben c und b den Buchstaben a finden müsse. Es wird nemlich seyn $a = \sqrt[b]{c}$.

§. 218.

So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl c nicht wirklich eine solche Potenz ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben (§. 128) bemerkt worden, daß die verlangte Wurzel a weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational- oder surdische Zahlen genannt werden; von welchen es nach der Mannigfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns diese Betrachtung noch auf eine ganz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden.

§. 219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrig ist, nemlich, wenn außer der Potenz c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der ganzen Mathematik so groß ist, daß fast keine weitläufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, und dies wird uns wieder auf ganz neue Arten von Zahlen leiten, welche nicht einmal zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können.

XXI. Capitel.

Von den Logarithmen überhaupt.

§. 220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b = c$, und bemerken dabey ~~wir~~ zuerst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewisse Zahl nach Belieben festgestellet werde, also daß diese immer einen gleichen Werth behalte. Wenn nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potenz a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genannt, und um die Logarithmen anzuzeigen, pflegt man sich entweder der ersten Sylbe oder des ersten Buchstabens von diesem Worte zu bedienen. So schreibt

man

man z. B. $b = \log. c$, oder $b = \lg. c$; oder auch $b = lc.$, und lieset: b ist der Logarithmus von c.

§. 221.

Nachdem also die Wurzel a einmal festgestellt worden, so ist der Logarithmus einer jeden Zahl c nichts anders, als der Exponent derjenigen Potenz von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$, so ist b der Logarithmus der Potenz a^b. Setzt man nun $b = 1$, so ist 1 der Logarithmus von a^1, das ist $\log. a = 1$: setzt man $b = 2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $\log. a^2 = 2$. Eben so wird man haben: $\log. a^3 = 3$, $\log. a^4 = 4$, $\log. a^5 = 5$ u. s. f.

1. Erklärung. Wenn eine Zahl a beständig einerley Werth behält, so kann man annehmen, daß sie zur x Potenz erhoben einer andern gegebenen Zahl gleich werde, wie der Ausdruck $a^x = c$. Sodann pflegt man den zu suchenden Exponenten x den Logarithmen von c, die Zahl a die Basis oder Grundzahl zu nennen.

Wird in dem Ausdrucke $a^x = c$ für c nach und nach eine andere Zahl gesetzt, so muß, wenn a einerley bleibt, der Exponent x, d. i. der Logarithme von c, verändert gefunden werden. Setzt man nun für c die auf einander folgenden natürlichen Zahlen, so wird sodann eine Reihe Logarithmen von diesen Zahlen entstehen. Eine solche Reihe von Logarithmen mit den dazu gehörigen Zahlen für einerley Grundzahl heißt ein logarithmisches System. Es kann demnach unzählich viele verschiedene logarithmische Systeme geben, weil man für die Grundzahl des Systems jede willkührliche Zahl annehmen kann.

2. Erklärung. Logarithmentafeln sind ein Buch, worin die Logarithmen einer Reihe von Zahlen für eine gewisse Basis berechnet worden sind. Bey den gewöhnlichen Logarithmentafeln, welche man auch Tabularlogarithmen oder nach dem Erfinder Briggs, briggische Logarithmen benennet, liegt die Basis 10 zum Grunde.

§. 222.

Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus seyn von a^0: nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $\log. 1 = 0$,

$1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will.

Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; also hat man $\log. \frac{1}{a} = -1$. Eben so bekommt man $\log. \frac{1}{a^2} = -2$, $\log. \frac{1}{a^3} = -3$, $\log. \frac{1}{a^4} = -4$ u. s. f.

§. 223.

Hieraus erhellet, wie die Logarithmen von allen Potenzen der Wurzel a und auch so gar von Brüchen, deren Zähler $= 1$, der Nenner aber eine Potenz von a ist, können angezeigt werden; in welchen Fällen die Logarithmen ganze Zahlen sind. Nimmt man aber für b Brüche an, so werden diese Logarithmen von Irrationalzahlen; wenn nemlich $b = \frac{1}{2}$, so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus von $a^{\frac{1}{2}}$, oder von $\sqrt{a}$. Daher bekommt man $\log. \sqrt{a} = \frac{1}{2}$; eben so $\log. \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $\log. \sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, u. s. f.

§. 224.

Wenn aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden soll, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine ganze Zahl noch ein Bruch seyn kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponenten geben, nemlich b, so daß die Potenz a^b der gegebenen Zahl c gleich werde, und alsdann hat man $b = \log. c$. Folglich hat man auf eine allgemeine Art $a^{\log. c.} = c$.

§. 225.

Wir wollen nun eine andere Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfalls durch log. d angedeutet wird,

wird, also daß $a^{\log.d} = d$. Man multiplicire nun diese Formel mit der vorhergehenden $a^{\log.c} = c$, so bekommt man $a^{\log.c + \log.d} = cd$: nun aber ist der Exponent allezeit der Logarithmus der Potenz, folglich ist $\log.c + \log.d = \log.cd$. Dividirt man aber die erste Formel durch die letztere, so bekommt man $a^{\log.c - \log.d} = \frac{c}{d}$. Folglich wird $\log.c - \log.d = \log.\frac{c}{d}$.

§. 226.

Hierdurch werden wir zu den zwey Haupteigenschaften der Logarithmen geführt, wovon die erste in der Gleichung $\log.c + \log.d = \log.cd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus von einem Product als cd gefunden werde, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Die zweyte Eigenschaft ist in der Gleichung $\log.c - \log.d = \log.\frac{c}{d}$ enthalten und zeiget an, daß der Logarithmus von einem Bruch gefunden werde, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

§. 227.

Und eben hierin bestehet der große Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Denn wenn zwey Zahlen mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen, so hat man nur nöthig, die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offenbar, daß es ungleich viel leichter sey, Zahlen zu addiren oder subtrahiren, als zu multipliciren oder dividiren, besonders wenn die Zahlen sehr groß sind.

§. 228.

§. 228.

Noch wichtiger aber ist der Nutzen bey den Potenzen und der Ausziehung der Wurzeln. Denn wenn $d = c$, so hat man aus der erstern Eigenschaft $\log. c + \log. c = \log. cc$, also ist $\log. c^2 = 2 \log. c$; eben so bekommt man $\log. c^3 = 3 \log. c$ und $\log. c^4 = 4 \log. c$, und allgemein $\log. c^n = n \log. c$.

Nimmt man nun für n gebrochene Zahlen an, so bekommt man $\log. c^{\frac{1}{2}}$, das ist $\log. \sqrt{c} = \frac{1}{2} \log. c$; ferner auch für negative Zahlen $\log. c^{-1}$, das ist $\log. \frac{1}{c} = - \log. c$, und $\log. c^{-2}$, das ist $\log. \frac{1}{c^2} = - 2 \log. c$, u. s. f.

§. 229.

Wenn man also solche Tabellen hat, worin für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, so kann man durch Hülfe derselben die schwersten Rechnungen, wo große Multiplicationen und Divisionen oder auch Erhebungen zu Potenzen und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mit leichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln so wohl für jede Zahl ihre Logarithmen, als auch für einen jeden Logarithmus die Zahl selbst, finden kann. Also wenn man aus einer Zahl c die Quadratwurzel finden soll, so sucht man erstlich den Logarithmus der Zahl c, welcher ist $\log. c$, hernach nimmt man davon die Hälfte, welche ist $\frac{1}{2} \log. c$, und diese ist der Logarithmus der gesuchten Quadratwurzel; also die Zahl, die diesem Logarithmus zukommt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadratwurzel selbst.

§. 230.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, u. s. f. und folglich alle positive Zahlen

Zahlen Logarithmen der Wurzel a und ihrer positiven Potenzen sind; das ist von Zahlen, die größer sind, als Eins.

Hingegen die negativen Zahlen, als: — 1, — 2 u. s. f. sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ u. s. f., welche kleiner als Eins, aber gleichwohl noch größer als Null sind.

Hieraus folgt, daß wenn der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer größer sey als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber größer als Null. Folglich können für negative Zahlen keine Logarithmen angezeigt werden, oder die Logarithmen von negativen Zahlen sind unmöglich und gehören zu dem Geschlecht der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

§. 231.

Um dieses besser zu erläutern, wird es gut seyn, für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen, und zwar diejenige, nach welcher die gebräuchlichen logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darin die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die ganze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür eine jede andere Zahl, die nur größer ist als Eins, angenommen werden könnte; denn wenn man $a = 1$ setzen wollte, so würden alle Potenzen davon als $a^b = 1$, und immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl, als c, gleich werden können.

XXII. Capitel.
Von den gebräuchlichen Logarithmischen Tabellen.

§. 232.

In diesen Tabellen wird, wie schon oben gesagt worden, angenommen, daß die Wuzel $a = 10$ sey; also ist der Logarithmus von einer jeden Zahl c derjenige Exponent, welcher anzeigt, zu was für einer Potenz man die Zahl 10 erheben müsse, um die Zahl c zu erhalten. Oder wenn der Logarithmus der Zahl c durch $\log. c$ angedeutet wird, so hat man immer $10^{\log. c} = c$.

§. 233.

Wir haben schon bemerkt, daß von der Zahl 1 der Logarithmus immer 0 sey, weil $10^0 = 1$; also ist $\log. 1 = 0$, $\log. 10 = 1$, $\log. 100 = 2$, $\log. 1000 = 3$, $\log. 10000 = 4$, $\log. 100000 = 5$, $\log. 1000000 = 6$. Ferner $\log. \frac{1}{10} = -1$, $\log. \frac{1}{100} = -2$, $\log. \frac{1}{1000} = -3$, $\log. \frac{1}{10000} = -4$, $\log. \frac{1}{100000} = -5$, $\log. \frac{1}{1000000} = -6$.

§. 234.

Wie sich nun die Logarithmen von diesen Hauptzahlen von selbst ergeben, so schwer ist es, die Logarithmen aller übrigen dazwischen liegenden Zahlen zu finden, welche gleichwohl in den Tabellen müssen angezeigt werden. Hier ist auch noch nicht der Ort, eine hinlängliche Anweisung zu geben, wie diese gefunden werden können, daher wollen wir nur überhaupt bemerken, was dabey zu beobachten vorkommt.

§. 235.

Da nun log. $1 = 0$, und log. $10 = 1$, so ist leicht zu erachten, daß von allen Zahlen zwischen 1 und 10, die Logarithmen zwischen 0 und 1 enthalten seyn müssen, oder sie sind größer als 0, und doch kleiner als 1.

Laßt uns nur die Zahl 2 betrachten, so ist gewiß, daß ihr Logarithmus, den wir durch den Buchstaben x andeuten wollen, also log. $2 = x$, größer sey als 0, und doch kleiner als 1. Es muß aber eine solche Zahl seyn, daß 10^x genau der Zahl 2 gleich werde.

Man kann auch leicht sehen, daß x viel kleiner seyn müsse als $\frac{1}{2}$, oder daß $10^{\frac{1}{2}}$ größer sey als 2, denn wenn man von beyden die Quadrate nimmt, so wird das Quadrat von $10^{\frac{1}{2}} = 10$: das Quadrat von 2 aber wird 4, also viel kleiner. Eben so ist auch $\frac{1}{3}$ für x noch zu groß, oder $10^{\frac{1}{3}}$ ist größer als 2. Denn der Cubus von $10^{\frac{1}{3}} = 10$, der Cubus von 2 aber ist nur 8. Hingegen ist $\frac{1}{4}$ für x angenommen zu klein: denn $10^{\frac{1}{4}}$ ist kleiner als 2, weil die vierte Potenz von jenem 10 ist, von diesem aber 16. Hieraus sieht man also, daß x oder der log. 2 kleiner ist als $\frac{1}{3}$ und doch größer als $\frac{1}{4}$; man kann auch für einen jeden andern Bruch, der zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist, finden, ob derselbe zu groß oder zu klein sey. Also ist $\frac{2}{7}$ kleiner als $\frac{1}{3}$ und größer als $\frac{1}{4}$; wollte man nun $\frac{2}{7}$ für x nehmen, so müßte $10^{\frac{2}{7}} = 2$ seyn; fände aber dieses statt, so müssen auch die siebenten Potenzen einander gleich seyn: es ist aber von $10^{\frac{2}{7}}$ die siebente Potenz $= 10^2 = 100$, welche der siebenten Potenz von 2 gleich seyn müßte; da nun die siebente Potenz von $2 = 128$ und also größer

größer als jene ist, so ist auch $10^{\frac{2}{7}}$ kleiner als 2, und also $\frac{2}{7}$ kleiner als log. 2: oder log. 2 ist größer als $\frac{2}{7}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

Ein Bruch nun, der kleiner als $\frac{1}{3}$, aber größer als $\frac{2}{7}$, ist $\frac{3}{10}$; sollte nun $10^{\frac{3}{10}} = 2$ seyn, so müßten auch die zehnten Potenzen einander gleich seyn: es ist aber von $10^{\frac{3}{10}}$ die zehnte Potenz $= 10^3 = 1000$, von 2 aber ist die zehnte Potenz $= 1024$; woraus wir schließen, daß $\frac{3}{10}$ noch zu klein ist, oder daß log. 2 größer sey als $\frac{3}{10}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

§. 236.

Dies dient dazu, um zu zeigen, daß log. 2 seine bestimmte Größe habe, weil wir wissen, daß derselbe gewiß größer ist als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$. Weiter läßt sich hier noch nicht gehen, und weil wir den wahren Werth noch nicht wissen, so wollen wir für denselben den Buchstaben x gebrauchen, also, daß log. $2 = x$, und zeigen, wenn derselbe gefunden wäre, wie man daraus von unzählig vielen andern Zahlen die Logarithmen finden könne; wozu die oben gegebene Gleichung dienet log. $cd =$ log. $c +$ log. d, oder daß der Logarithmus von einem Product gefunden werde, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. (§. 225).

§. 237.

Da nun log. $2 = x$, und log. $10 = 1$, so bekommen wir log. $20 = x + 1$, und log. $200 = x + 2$, ferner log. $2000 = x + 3$, weiter log. $20000 = x + 4$ und log. $200000 = x + 5$ u. s. f.

§. 238.

Da ferner $\log. c^2 = 2 \log. c$ und $\log. c^3 = 3 \log. c$, $\log. c^4 = 4 \log. c$ u. s. f. so erhalten wir daher $\log. 4 = 2x$, $\log. 8 = 3x$, $\log. 16 = 4x$, $\log. 32 = 5x$, $\log. 64 = 6x$ u. s. f.

Hieraus erhalten wir ferner $\log. 40 = 2x + 1$, $\log. 400 = 2x + 2$, $\log. 4000 = 2x + 3$, $\log. 40000 = 2x + 4$ u. s. f.
$\log. 80 = 3x + 1$, $\log. 800 = 3x + 2$, $\log. 8000 = 3x + 3$, $\log. 80000 = 3x + 4$ u. s. f.
$\log. 160 = 4x + 1$, $\log. 1600 = 4x + 2$, $\log. 16000 = 4x + 3$, $\log. 160000 = 4x + 4$ u. s. f.

§. 239.

Da ferner gefunden worden $\log. \frac{c}{d} = \log. c - \log. d$, so setze man $c = 10$, und $d = 2$, und weil $\log. 10 = 1$ und $\log. 2 = x$, so bekommen wir $\log. \frac{10}{2}$, das ist $\log. 5 = 1 - x$, daher erhalten wir
$\log. 50 = 2 - x$, $\log. 500 = 3 - x$, $\log. 5000 = 4 - x$ u. s. f.

Ferner $\log. 25 = 2 - 2x$, $\log. 125 = 3 - 3x$, $\log. 625 = 4 - 4x$ u. s. f.

Auf diese Art gelangen wir weiter zu folgenden:
$\log. 250 = 3 - 2x$, $\log. 2500 = 4 - 2x$, $\log. 25000 = 5 - 2x$ u. s. f., ferner
$\log. 1250 = 4 - 3x$, $\log. 12500 = 5 - 3x$, $\log. 125000 = 6 - 3x$ u. s. f., ferner
$\log. 6250 = 5 - 4x$, $\log. 62500 = 6 - 4x$, $\log. 625000 = 7 - 4x$ u. s. f.

§. 140.

Hätte man auch den Logarithmus von 3 gefunden, so könnte man daher noch von unendlich vielen andern Zahlen die Logarithmen bestimmen. Wir wollen

wollen den Buchstaben y für log. 3 setzen, und daher würden wir haben:

log. 30 = y + 1, log. 300 = y + 2, log. 3000 = y + 3, u. s. f.
log. 9 = 2y, log. 27 = 3y, log. 81 = 4y, log. 243 = 5y, u. s. f.

Daher kann man noch weiter finden:

log. 6 = x + y, log. 12 = 2x + y, log. 18 = x + 2y,
imgleichen auch log. 15 = log. 3 + log. 5 = y + 1 — x.

§. 241.

Wir haben oben (§. 41.) gesehen, daß alle Zahlen aus den so genannten Primzahlen durch die Multiplication hervor gebracht werden. Also wenn nur die Logarithmen der Primzahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen blos durch die Addition finden; als z. B. von der Zahl 210, welche aus folgenden Factoren besteht, 2. 3. 5. 7, wird seyn der Logarithmus = log. 2 + log. 3 + log. 5 + log. 7: eben so, da 360 = 2. 2. 2. 3. 3. 5 = $2^3\,3^2.\,5$, so wird log. 360 = 3 log. 2 + 2 log. 3 + log. 5, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Primzahlen die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bey Verfertigung der Logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen der Primzahlen gefunden werden.

XXIII. Capitel.

Von der Art die Logarithmen darzustellen.

§. 242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwey Brüchen fallen müsse, wenn die Potenz der Zahl 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen, was man immer für einen will, so wird die Potenz immer eine Irrationalzahl und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, daher sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen, den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmerklich werde. Hierzu bedient man sich der so genannten Decimalbrüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlicher erklärt zu werden verdient.

§. 243.

Man weiß, daß bey der gewöhnlichen Art, alle Zahlen mit den zehn Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

zu schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihre natürliche Bedeutung haben, und daß auf der zweyten Stelle ihre Bedeutung 10 mal größer werde, auf der dritten aber 100 mal, auf der vierten 1000 mal u. s. f. auf einer jeden folgenden Stelle 10 mal größer, als auf der vorhergehenden.

Also in dieser Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur Rechten die Ziffer 5, die auch wirklich 5 bedeutet, auf der zweyten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern 10. 6 oder 60 anzeigt; die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet 100. 7 oder 700, und endlich das 1 auf der vierten Stelle bedeutet 1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen, indem man sagt:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechzig, und Fünf.

§. 244.

Wie nun von der Rechten zur Linken die Bedeutung der Ziffern immer 10 mal größer und folglich von der Linken zur Rechten immer 10 mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetz noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da denn die Bedeutung der Ziffern immer fort 10 mal kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemerken, wo die Ziffern ihren natürlichen Werth haben. Dieses geschieht durch ein Comma, welches hinter diese Stelle gesetzt wird. Wenn man daher folgende Zahl findet, als 36, 54892, so ist dieselbe also zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, ~~und die~~ Ziffer 3 auf der zweyten Stelle von der Rechten bedeutet 30. Aber nach dem Comma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$, die folgenden 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9, $\frac{9}{10000}$ und die Ziffer 2, $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Bedeutungen immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie für nichts zu achten sind.

§. 245.

Diese Art, die Zahlen auszudrücken, heißt nun ein Decimalbruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellt. Daselbst wird z. B. der Logarithmus von 2 also ausgedrückt: 0,3010300. Folglich ist hierbey zu merken, daß, weil vor dem Comma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Ganzes betrage, und daß sein Werth $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$ sey. Man hätte also wohl die zwey hintersten 0 weglassen können, allein dieselben dienen, um zu zeigen, daß von diesen Theilchen wirklich keine vorhanden sind. Hierdurch wird aber nicht behauptet, daß nicht weiterhin noch kleinere Theilchen folgen sollten, aber diese werden wegen ihrer Kleinheit für nichts geachtet.

§. 246.

Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt: 0,4771213; woraus man sieht, daß derselbe kein Ganzes betrage, sondern daß er aus diesen Brüchen bestehe:

$$\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{1}{1000000} + \frac{3}{10000000}.$$

Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus auf diese Art ganz genau ausgedrückt sey. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch wirklich so klein ist, daß man ihn in den meisten Rechnungen aus der Acht lassen kann.

§. 247.

Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0,0000000, weil derselbe wirklich 0 ist; von 10 aber heißt der Logarithmus 1,0000000, woraus man erkennt, daß derselbe gerade 1 sey. Von 100 aber ist der Logarithmus 2,0000000, oder gerade 2, woraus man sehen kann, daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder welche mit zwey Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten seyn müssen, und folglich durch 1 und einen Decimalbruch ausgedrückt werden. Also ist log. 50 = 1, 6989700, derselbe ist also 1 und noch überdies $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{7}{100000}$. Von den Zahlen aber über hundert bis 1000 enthalten die Logarithmen 2 nebst einem Decimalbruch, als log. 800 = 2, 9030900. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4 u. s. f.

§. 248.

§. 248.

Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Ganzes, und deswegen steht vor dem Comma eine 0. Bey einem jeden Logarithmus sind also zwey Theile zu bemerken. Der erste Theil, den man die Charakteristik oder Kennziffer zu nennen pflegt, steht vor dem Comma und zeigt die Ganzen an, wenn dergleichen vorhanden sind; der andere Theil aber zeigt die Decimalbrüche an, die zu dem Ganzen noch gesetzt werden müssen, und wird Mantisse genannt. Also ist es leicht, den ersten oder ganzen Theil des Logarithmus einer jeden Zahl anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen, die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Er ist ferner 2 für diejenigen, so aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um eins kleiner als die Anzahl der Ziffern. Wenn man also den Logarithmus von 1766 verlangt, so weiß man schon, daß der erstere oder ganze Theil davon 3 seyn muß.

§. 249.

Umgekehrt also, sobald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, so weiß man, aus wie viel Figuren die Zahl selbst bestehen werde, weil die Anzahl der Figuren immer um eins größer ist als der ganze Theil des Logarithmus. Wenn man also für eine unbekannte Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6, 4771213, so wüßte man sogleich, daß dieselbe Zahl aus 7 Figuren bestehe und also größer seyn müsse als 1000000. Diese Zahl ist auch wirklich 3000000: denn $\log. 3000000 = \log. 3 + \log. 1000000$. Nun aber ist $\log. 3 = 0,\ 4771213$

und log. 1000000 = 6, welche zwey Logarithmen zusammen addirt 6, 4771213 geben.

§. 250.

Bey einem jeden Logarithmus kommt also die Hauptsache auf den nach dem Comma folgenden Decimalbruch an, und wenn dieser einmal bekannt ist, so kann er für viele Zahlen dienen. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten, dessen erster Theil unstreitig 2 ist; für den andern Theil aber, nemlich den Decimalbruch, wollen wir der Kürze halber den Buchstaben x schreiben, also daß log. 365 = 2 + x; hieraus erhalten wir, wenn wir immerfort mit 10 multipliciren, log. 3650 = 3 + x; log. 36500 = 4 + x; log. 365000 = 5 + x. Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren, so bekommen wir log. 36, 5 = 1 + x; log. 3, 65 = 0 + x; log. 0, 365 = − 1 + x; log. 0, 0365 = − 2 + x; log. 0, 00365 = − 3 + x u. s. f.

§. 251.

Bey den Logarithmen aller dieser Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen 0 hinter oder vor sich haben, bleibt einerley Decimalbruch in ihren Logarithmen und der Unterschied befindet sich nur in der ganzen Zahl vor dem Comma, und wie wir gesehen haben, so kann diese auch negativ werden, wenn nemlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gemeinen Rechner nicht gut mit den negativen Zahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die ganze Zahl der Logarithmen um 10 vermehret, und anstatt 0 vor dem Comma, pflegt man 10 zu schreiben, da man denn 9 anstatt — 1 bekommt; anstatt — 2 bekommt man 8; anstatt — 3 bekommt man 7 u. s. f. Hier muß aber gar nicht aus der Acht gelassen werden, daß die ganzen

Zahlen

Zahlen vor dem Comma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe, die Zahl bestehe aus 10 oder 9 oder 8 Figuren, sondern daß die Zahl erst nach dem Comma entweder auf der ersten Stelle, wenn 9 vorhanden, oder auf der zweyten Stelle, wenn 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wenn 7 vom Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen vorgestellt.

§. 252.

In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimalbrüche für die Logarithmen in sieben Figuren, wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher seyn, daß dieselben um kein einziges solches Theilchen von der Wahrheit abweichen, welcher Fehler gemeiniglich nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen in noch mehr als sieben Figuren vorgestellt werden, welches in den großen Vlacqschen Tabellen geschieht, wo die Logarithmen auf zehn Figuren berechnet sind.

§. 253.

Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt oder angezeigt, sondern man findet daselbst nur die sieben Figuren des Decimalbruchs, welche den zweyten Theil ausmachen. In den englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis auf 100000 ausgedrückt und wenn größere Zahlen noch vorkommen, so sind kleine Täfelchen beygefügt, woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Figuren noch zu den Logarithmen addirt werden müsse.

§. 254.

Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus hinwiederum die ihm zukommende Zahl aus den Tabellen nehmen soll. Um die Sache besser zu erläutern, so wollen wir z. B. diese Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun die Logarithmen davon addirt werden müssen, so kommt die Rechnung also zu stehen:

$$\left.\begin{array}{l} \log. 343 = 2,\ 5352941 \\ \log. 2401 = 3,\ 3803922 \end{array}\right\}\ \text{addirt}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5,\ 9156863 \\ 6847 \end{array}\right\}\ \text{subtrahirt}$$

Giebt also 823543. 16

Diese Summe ist nun der Logarithmus des gesuchten Products, und aus seinem ersten Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Figuren bestehe, welche aus dem Decimalbruch vermittelst der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist wirklich das gesuchte Product.

§. 255.

Da bey Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen besonders einen wichtigen Vortheil leisten, so wollen wir auch dieses mit einem Exempel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadratwurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig den Logarithmus von 10, welcher 1, 0000000 ist, durch 2 zu dividiren, so wird der Quotient 0, 5000000, der Logarithmus der gesuchten Wurzel seyn. Daher die Wurzel selbst aus den Tabellen 3, 16228 gefunden wird, wovon auch wirklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilchen größer ist als 10.

Ende des ersten Abschnitts.

Des