Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

II. Capitel. Von der Addition und Subtraction einfacher Größen.

II. Capitel.

Von der Addition und Subtraction einfacher Größen.

§. 8.

Wenn zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addirt werden soll, so wird solches durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und plus ausgesprochen wird.

Also wird durch $5 + 3$ angedeutet, daß zu der Zahl 5 noch 3 addirt werden soll, da man denn weiß, daß 8 heraus kommt: eben so z. B.

$12+7$ ist 19; $25+16$ ist 41; und $25+41$ ist 66. u.s.w.

§. 9.

Durch dieses Zeichen (+) pflegen auch mehrere Zahlen verbunden zu werden, als z. B.

$7 + 5 + 9$, wodurch angezeigt wird, daß zu der Zahl 7 noch 5, und überdies noch 9 addirt werden sollen, welches 21 ausmacht. Hieraus ersieht man, was folgender Ausdruck bedeutet, als:

$$8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 13 + 10,$$

nemlich die Summe aller dieser Zahlen, welche 61 beträgt.

§. 10.

Wie dieses für sich klar ist, so ist noch zu merken, daß auf eine allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, als a, b, c, d, u. s. w. angedeutet werden, wenn man also schreibt $a + b$, so bedeutet dieses die Summe der beyden Zahlen, welche durch a und b ausgedrückt werden, dieselben mögen nun so groß oder klein seyn, als sie wollen. Eben so bedeutet $f + m + b + x$ die Summe der Zahlen, welche durch diese Buchstaben ausgedrückt werden.

Wenn man also nur weiß, was für Zahlen durch Buchstaben angedeutet werden, so findet man durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth von dergleichen Ausdrücken in jedem andern Fall.

§. 11.

Wenn hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen (—) angedeutet, welches man minus oder weniger ausspricht, und vor diejenige Zahl setzt, die subtrahirt werden soll.

So bedeutet z. B. der Ausdruck $8 - 5$ daß von der Zahl 8 die Zahl 5 soll weggenommen werden, da dann, wie bekannt ist, 3 übrig bleibt. Eben so ist $12 - 7$ so viel, als 5, und $20 - 14$, so viel als 6, u. s. w.

§. 12.

Es kann auch geschehen, daß von einer Zahl mehr Zahlen zugleich subtrahirt werden sollen.

z. B. $50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9$.

Welches also zu verstehen ist: nimmt man zuerst 1 von 50 weg, so bleiben 49; davon 3 weggenommen, bleiben 46; davon 5, bleiben 41; davon 7, bleiben 34; davon die letzten 9 weggenommen, bleiben 25; welches der Werth des vorgegebenen Ausdrucks ist. Aber da die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, insgesammt weggenommen werden sollen, so ist es eben so viel, als wenn man ihre Summe, nemlich 25, auf einmal von 50 abzieht, da dann, wie vorher, 25 übrig bleiben.

§. 13.

Eben so läßt sich auch leicht der Werth solcher Ausdrücke bestimmen, in welchen beyde Zeichen + und — vorkommen; z. B.

$12 - 3 - 5 + 2 - 1$ ist so viel als 5.

Oder man darf nur die Summe der Zahlen, die + vor sich haben, besonders nehmen, als:

$12 + 2$ machen 14, und davon die Summe aller Zahlen, die — vor sich haben, welche sind 3, 5, 1, das ist 9 abziehen, da dann, wie vorher, 5 gefunden wird.

§. 14.

Hieraus ist klar, daß es hierbey gar nicht auf die Ordnung der hergesetzten Zahlen ankomme, sondern daß man sie nach Belieben versetzen könne, wenn nur eine jede das ihr vorstehende Zeichen behält. So kann man, anstatt der obigen Formel, setzen:

$12 + 2 - 5 - 3 - 1$ oder $2 - 1 - 3 - 5 + 12$ oder $2 + 12 - 3 - 1 - 5$.

Wobey aber zu merken ist, daß im ersten Ausdruck vor der Zahl 12 das Zeichen + vorgesetzt verstanden werden muß. Denn man pflegt dieses Zeichen beym Anfang eines Ausdrucks gemeiniglich wegzulassen.

§. 15.

Wenn nun, um die Sache allgemein zu machen, anstatt der gewöhnlichen Zahlen, Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung davon. Z. B.

$a - b - c + d - e$ deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedrückte Zahlen zusammen genommen, und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen — haben, insgesammt weggenommen werden sollen.

§. 16.

Hier kömmt es also hauptsächlich darauf an, was für ein Zeichen eine jede Zahl vor sich stehen hat;

daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen, welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive; diejenigen aber, welche das Zeichen — vor sich haben, verneinende oder negative Größen zu nennen.

§. 17.

Dieses läßt sich sehr gut durch die Art erläutern, wie man das Vermögen einer Person anzuzeigen pflegt; da dasjenige, was jemand wirklich besitzt, durch positive Zahlen mit dem Zeichen +, dasjenige aber, was er schuldig ist, durch negative Zahlen mit dem Zeichen — ausgedrückt wird. Also wenn jemand 100 Rubel hat, dabey aber 50 Rubel schuldig ist, so wird sein Vermögen seyn:

100 — 50, oder, welches einerley
+ 100 — 50, das ist 50.

§. 18.

Da nun die negativen Zahlen als Schulden betrachtet werden können, in so fern die positiven Zahlen die wirklichen Besitzungen anzeigen; so kann man sagen, daß die negativen Zahlen weniger sind, als nichts. Wenn jemand z. B. nichts im Vermögen hat, und noch dazu 50 Rubel schuldig ist, so hat er wirklich 50 Rubel weniger als nichts. Denn wenn ihm jemand 50 Rubel schenken sollte, um seine Schulden zu bezahlen, so würde er alsdann erst nichts haben, da er doch itzt mehr hat, als vorher.

§. 19.

Wie nun die positiven Zahlen unstreitig größer als nichts sind, so müssen die negativen Zahlen kleiner als nichts seyn. Die positiven Zahlen aber entste-

entstehen, wenn man erstlich zu 0, oder Nichts, immerfort Eins zusetzt, da dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen entspringt, nemlich:

$$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$$

und so fort ohne Ende.

Wird aber diese Reihe rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entspringt folgende Reihe der negativen Zahlen.

$$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$$

und so ins unendliche.

§. 20.

Alle diese Zahlen, sowohl positive als negative, führen den bekannten Namen der g a n z e n Z a h l e n, welche also entweder größer oder kleiner sind, als nichts. Man nennet sie ganze Zahlen, um sie von den gebrochenen, und von vielerley andern Zahlen, wovon unten gehandelt werden soll, zu unterscheiden. Denn da z. B. 50 um ein Ganzes größer ist als 49, so begreift man leicht, daß zwischen 49 und 50 noch unendlich viel Mittelzahlen statt finden können, welche alle größer als 49, und doch alle kleiner als 50 sind. Man darf sich zu diesem Ende nur 2 Linien vorstellen, wovon die eine 50 Fuß, die andere aber 49 Fuß lang ist, so wird man leicht begreifen, daß man unendlich viele andere Linien ziehen kann, welche alle länger als 49, und doch kürzer als 50 Fuß sind.

§. 21.

Dieser Begriff von den verneinenden oder negativen Größen ist um so sorgfältiger zu bemerken, da er in der ganzen Algebra von der größten Wichtigkeit ist. Hier wird es genug seyn, zum Voraus noch zu bemerken, daß diese Ausdrücke:

+1

$+1-1, +2-2, +3-3, +4-4,$ u. s. f. alle so viel sind, als 0, oder Nichts: ferner, daß z. B. $+2-5$ so viel ist als -3; denn wenn einer 2 Rubel hat, und 5 Rubel schuldig ist, so hat er nicht nur nichts, sondern bleibt noch 3 Rubel schuldig: eben so ist,

$7 - 12$ so viel als $- 5$
$25 - 40$ so viel als $- 15$.

§. 22.

Eben dieses ist auch zu beobachten, wenn auf eine allgemeine Art anstatt der Zahlen Buchstaben gebraucht werden, da denn immer $+a-a$, so viel ist als 0, oder nichts. Wenn man wissen will, was z. B. $+a-b$ bedeute, so sind zwey Fälle zu erwägen.

1) Wenn a größer ist als b, so subtrahiret man b von a, und der Rest, positiv genommen, ist der gesuchte Werth.

2) Wenn a kleiner ist als b, so subtrahirt man a von b, und der Rest, negativ genommen, oder das Zeichen — vorgesetzt, zeigt den gesuchten Werth an.

1. Zusatz. Die positiven und negativen Größen pflegt man auch überhaupt entgegengesetzte Größen zu nennen, die also in allen denjenigen Fällen statt finden, wo man Größen von einerley Art hat, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden können, vermöge welcher eine die andere vermindert. So sind z. B. Vermögen und Schulden, Einnahme und Ausgabe, vorwärts und rückwärts gehende Bewegung, Steigen und Fallen u. s. w. entgegengesetzte Größen, und es hängt bloß von meiner Willkühr ab, welche ich für positiv annehmen will. Ausgabe ist eine verneinende Einnahme, und Einnahme kann als verneinende Ausgabe angesehen werden. Nenne ich den Weg von Berlin nach Magdeburg positiv, so muß ich den Weg von Magdeburg nach Berlin negativ nennen, und umgekehrt, nenne ich den Weg von Magdeburg nach Berlin positiv, so muß ich den Weg von Berlin nach Magdeburg negativ nennen, und so in allen übrigen Fällen.

2. Zusatz. Aus dem bisher gesagten ist klar, daß die Zeichen (+ —) bey entgegengesetzten Größen bloß das Bejahte und Verneinte ausdrücken, welches man sich bey ihnen denkt: sie beziehen sich nur auf die Bedingungen, und gehen die Größe der Sache gar nichts an.

Der Weg nach Norden sey positiv, so ist der Weg nach Süden negativ. Schreibe ich nun + 3 Meilen und — 3 Meilen, so ist der zweyte Weg eben so gut 3 Meilen als der erste, und durch (+ —) wird man nur erinnert, bey + 3 an den Weg nach Norden, bey — 3 aber an den Weg nach Süden zu denken. Demnach würde man statt positive, oder negative Größe, richtiger positiv oder negativ ausgedrückte Größe sagen.

3. Zusatz. Aus dem vorhergehenden erhellet auch deutlich, daß man sagen könne, die positive Größe sey weniger als nichts; sie ist nemlich weniger als nichts in Absicht auf die entgegengesetzte. Offenbar hat der, welcher 100 Thaler Vermögen hat, weniger als nichts von dem entgegengesetzten, denn um nichts von dem entgegengesetzten zu haben, müßte er 100 Thaler schuldig seyn, er würde also alsdann erst etwas von dem entgegengesetzten haben, wenn er mehr als 100 Thaler schuldig wäre.

Aber nur in diesem Verstande kann man eine positive oder negative Größe weniger als nichts nennen. An sich selbst ist jede von den genannten Größen mehr als nichts, weil sie wirkliche Größen sind. Es kömmt nemlich hier auf eine Bedeutung des Wortes Nichts an, welches in dem obigen Verstande genommen, nur ein relatives, kein absolutes Nichts seyn soll. Auch unter mehreren verneinten Größen einerley Art, als — 1, — 2, — 3, u. s. f. wird man diejenige für kleiner halten, welche als Größe, ohne Rücksicht auf das vorangesetzte Zeichen (—) größer ist; so wird — 7 eine kleinere Zahl als — 6, diese kleiner als — 5 u. s. f. seyn. Je größer nemlich eine Zahl a an sich betrachtet, ist, desto weniger als nichts wird — a von dem Entgegengesetzten bedeuten, weil ein desto größeres Entgegengesetztes + a erfordert wird, wenn es mit — a nichts geben soll.

4. Zusatz. Bisher haben die Mathematiker nur die negativen Größen für weniger als Nichts betrachtet. Wenn daher Vermögen als positiv betrachtet wird, so kann man die Schulden als negatives Vermögen ansehen, und alsdann sind Schulden im obigen Verstande weniger als Nichts vom Vermögen. Betrachtet man aber die Schulden als positiv, und das Vermögen als negativ,

negativ, so ist alsdann das Vermögen weniger als Nichts von den Schulden.

Dieses rechtfertiget mich, wenn ich sage, positive Größen sind weniger als nichts, denn von ihnen läßt sich gewiß dasselbe als von negativen Größen, behaupten.

5. Zusatz. Der bekannte Grundsatz der Arithmetik, daß, wenn man von zween ungleichen Zahlen eine und eben dieselbe dritte Zahl abziehet, die größere Zahl einen größeren und die kleinere einen kleinern Rest giebt, mag ein Beyspiel geben, daß man durch ganz gemeine Rechnungen veranlaßt werden kann, sich solche Vorstellungen von bejahten und verneinten Zahlen zu machen, wobey man jene für größer, und diese für kleiner als nichts hält, und daß dies nur in der vorhin erklärten Bedeutung genommen werden kann.

Was auch a, b, c immer für Zahlen sind, so ist doch allemahl

$$a < a + b: \text{ also auch}$$

$$a - (a + b) < a + b - (a + b), \text{ oder}$$

$$a - a - b < 0, \text{ oder } - b < 0$$

Es ist ferner auch $a < a + b + c$, folglich auch

$$a - (a + b) < a + b + c - (a + b), \text{ oder}$$

$$- b < + c$$

Das heißt: jede verneinte Zahl $- b$ ist kleiner als Null, und kleiner als jede bejahte Zahl $+ c$

Dieses scheint nun unwiderleglich dargethan. Allein will man alles genau nehmen, so muß man bekennen, daß die vorhin gemachten Schlüsse nichts anders beweisen, als daß man oft einen arithmetischen Grundsatz da anwendet, wo er gar nicht anwendbar ist, oder von ihm mehr verlangt, als er wirklich geben kann: der Grundsatz setzt nemlich die Möglichkeit der Abziehung, und der dadurch zu erhaltenden Reste voraus, da doch dieses hier unmöglich ist, indem eine größere Zahl $a + b$ von einer kleinern a abgezogen werden soll, und $- b$, die hier zum Resultat herauskömmt, bedeutet nichts anders, als eine Zahl b, welche abgezogen werden müßte, wenn eine da wäre, wovon der Abzug geschehen könnte.

Anmerk. Aus allem, was im 3, 4 und 5ten Zusatz gesagt worden ist, erhellet, wie, so zu sagen, unmathematisch man reden muß, um die im 5. Zusatz enthaltenen Vorstellungen

stellungen zu rechtfertigen, zu welchen gewisse Rechnungen zu führen scheinen: es ist daher auch rathsam, diese unmathematische Sprache überall, wo es sich thun läßt, zu vermeiden, oder recht zu gebrauchen, wo sie nicht vermieden werden kann. Nimmt man den Ausdruck, weniger als nichts, nicht in dem Verstande, als solcher im 3ten Zusatz erklärt worden ist, so ist er falsch, und hat wirklich Mathematikverständige zu irrigen Vorstellungen von den verneinenden Größen verführet.

III. Capitel.

Von der Multiplication mit einfachen Größen.

§. 23.

Wenn zwey oder mehr gleiche Zahlen zusammen addirt werden, so läßt sich die Summe auf eine kürzere Art ausdrücken. Denn so ist

$a + a$ so viel als $2 . a$, und
$a + a + a$ so viel als $3 . a$, ferner
$a + a + a + a$ so viel als $4 . a$, u. s. w.

Woraus der Begriff von der Multiplication entspringt, da nämlich

$2 . a$ so viel ist, als 2 mal a, und
$3 . a$ so viel als 3 mal a, ferner
$4 . a$ so viel als 4 mal a, u. s. f.

1. Zusatz. Das Multiplicationszeichen ist (.) oder ($\times$). Also 5 mal 6, kann ich auch so andeuten: $5 . 6$ oder 5×6.

2. Zusatz. Aus der gemeinen Rechenkunst ist bekannt, daß die Zahlen, die mit einander multiplicirt werden, den gemeinschaftlichen Nahmen Factoren haben, was herauskommt, heißt alsdann das Factum, oder Product, auch nennt man besonders den einen von zwey Factoren, der multipliciret

werden