Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

III. Capitel. Von der Multiplication mit einfachen Größen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

stellungen zu rechtfertigen, zu welchen gewisse Rechnungen zu führen scheinen: es ist daher auch rathsam, diese unmathematische Sprache überall, wo es sich thun läßt, zu vermeiden, oder recht zu gebrauchen, wo sie nicht vermieden werden kann. Nimmt man den Ausdruck, weniger als nichts, nicht in dem Verstande, als solcher im 3ten Zusatz erklärt worden ist, so ist er falsch, und hat wirklich Mathematikverständige zu irrigen Vorstellungen von den verneinenden Größen verführet.

III. Capitel.

Von der Multiplication mit einfachen Größen.

§. 23.

Wenn zwey oder mehr gleiche Zahlen zusammen addirt werden, so läßt sich die Summe auf eine kürzere Art ausdrücken. Denn so ist

$a + a$ so viel als $2 . a$, und
$a + a + a$ so viel als $3 . a$, ferner
$a + a + a + a$ so viel als $4 . a$, u. s. w.

Woraus der Begriff von der Multiplication entspringt, da nämlich

$2 . a$ so viel ist, als 2 mal a, und
$3 . a$ so viel als 3 mal a, ferner
$4 . a$ so viel als 4 mal a, u. s. f.

1. Zusatz. Das Multiplicationszeichen ist (.) oder ($\times$). Also 5 mal 6, kann ich auch so andeuten: $5 . 6$ oder 5×6.

2. Zusatz. Aus der gemeinen Rechenkunst ist bekannt, daß die Zahlen, die mit einander multiplicirt werden, den gemeinschaftlichen Nahmen Factoren haben, was herauskommt, heißt alsdann das Factum, oder Product, auch nennt man besonders den einen von zwey Factoren, der multipliciret

werden

werden soll, den Multiplicandus, und den, womit multiplicirt wird, den Multiplicator.

§. 24.

Wenn also eine durch einen Buchstaben ausgedrückte Größe mit einer beliebigen Zahl multipliciret werden soll, so wird die Zahl bloß vor den Buchstaben geschrieben. Z. B.

a mit 20 multiplicirt giebt, 20 a, und
b mit 30 multiplicirt giebt, 30 b, u. s. w.

Solchergestalt ist ein c, einmal genommen, oder 1 c, so viel als c.

§. 25.

Dergleichen Producte können auch noch weiter leicht mit andern Zahlen multiplicirt werden. Z. B.

2 mal 3a macht 6a
3 mal 4b macht 12b
5 mal 7x macht 35x

welche noch ferner mit andern Zahlen sich multipliciren lassen.

§. 26.

Wenn die Zahl, mit welcher multipliciret werden soll, auch durch einen Buchstaben ausgedrückt wird, so pflegt man diesen Buchstaben dem andern Buchstaben unmittelbar vorzusetzen. Z. B. wenn b mit a multipliciret werden soll, so heißt das Product ab, und pq ist das Product, welches entstehet, wenn man die Zahl q mit p multiplicirt. Will man pq noch ferner mit a multipliciren, so kömmt heraus apq.

§. 27.

Hiebey ist wohl zu merken, daß es auch hier nicht auf die Ordnung der an einander gesetzten Buch-

Buchstaben ankomme, indem ab eben so viel ist, als ba; oder b und a mit einander multiplicirt, macht eben so viel, als a mit b multiplicirt. Um dieses zu begreifen, darf man nur für a und b bekannte Zahlen, als 3 und 4 nehmen, so giebt es sich von selbst: nemlich 3 mal 4 ist eben so viel, als 4 mal 3.

1. Zusatz. Daß ab gleich ba ist, davon überzeugt man sich ganz allgemein, wenn man so viel Punkte in einer Reihe vor sich hinschreibt, als der eine Factor z. B. a, Einheiten hat, und unter diese Reihe noch so viel solche Reihen, weniger eine, darunter setzt, als der andere Factor, hier b Einheiten hat, hiedurch wird man deutlich überführt, daß b Reihen über oder unter einander stehen, wovon jede a Punkte enthält, demnach alle Reihen zusammen ab Punkte enthalten; ferner neben einander stehen a Reihen, in jeder b Punkte, mithin in allen a Reihen zusammen ba Punkte. Folglich ist ab = ba.

2. Zusatz. Da ab = ba, so ist auch abcd = bacd = = bcad = bcda u. s. w. Dieses gilt, wie man leicht siehet, wenn auch mehrere Factoren vorhanden sind; demnach ist der Satz allgemein wahr, daß einerley Factoren in veränderter Ordnung einerley Product geben.

§. 28.

Wenn statt der Buchstaben, welche unmittelbar an einander geschrieben sind, Ziffern gesetzt werden sollen, so sieht man leicht, daß dieselben alsdann nicht unmittelbar hinter einander geschrieben werden können. Denn wenn man statt 3 mal 4 schreiben wollte 34, so würde solches nicht zwölf, sondern vier und dreißig heißen. Wenn daher eine Multiplication mit bloßen Zahlen angedeutet werden soll, so pflegt man einen Punkt oder das Zeichen $\times$ zwischen dieselben zu setzen. Z. B.

3 . 4, bedeutet 3 mal 4, das ist 12. Eben so ist 1 . 2 oder 1 $\times$ 2 so viel als 2, und 1 . 2 . 3 ist 6. Ferner 1 . 2 . 3 . 4 . 56, ist 1344, und 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10, ist 3628800. u. s. f.

§. 29.

Hieraus ergiebt sich nun auch, was ein solcher Ausdruck 5.7.8.abcd bedeute; nemlich die Zahl 5 wird erstlich mit 7 multiplicirt, das Product ferner mit 8, dieses Product hernach mit a, und dieses wieder mit b, sodann mit c, und endlich mit d; wobey zu merken, daß statt 5.7.8, der Werth davon, nemlich die Zahl 5 mal 7, ist 35, und 8 mal 35 das ist 280 geschrieben werden kann.

§. 30.

Ferner ist zu merken, daß solche Ausdrücke, die aus der Multiplication mehrerer Zahlen entstehen, Producte genannt werden, Zahlen oder Buchstaben aber, welche einzeln sind, pflegt man Factoren zu nennen. Siehe §. 23. 2ter Zusatz.

§. 31.

Bis hieher haben wir nur positive Zahlen betrachtet, und da ist gar kein Zweifel, daß die daher entstehenden Producte nicht auch positiv seyn sollten. Nemlich + a mit + b multiplicirt, giebt unstreitig + ab. Was aber heraus komme, wenn + a mit — b, oder — a mit — b multiplicirt werde, erfordert eine besondere Erklärung.

§. 32.

Wir wollen erstlich — a mit 3 oder + 3 multipliciren. Weil nun — a als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß, wenn diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden müsse. Folglich wird das gesuchte Product — 3a seyn. Und wenn daher — a mit b, das ist, mit + b multiplicirt werden soll, so wird heraus kommen — ba, oder, welches einerley ist, — ab.

— ab. Hieraus ziehen wir den Schluß, daß, wenn eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde; woher sich diese Regel ergiebt: Positives mit Positivem, oder + mit + multiplicirt, giebt +, oder ein positives Product. Hingegen + mit —, oder — mit +, d. i. Positives mit Negativem, oder Negatives mit Positivem multiplicirt, giebt —, oder ein negatives Product.

§. 33.

Nun ist also noch ein Fall zu bestimmen übrig, nemlich, wenn — mit —, z. B. — a mit — b multiplicirt wird. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, ab; ob aber das Zeichen + oder — davor zu setzen sey, ist noch ungewiß; doch so viel ist gewiß, daß es entweder das eine, oder das andere seyn müsse. Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen — seyn. Denn — a mit + b multiplicirt, giebt — ab; und also — a mit — b multiplicirt, kann nicht eben das geben, was — a mit + b giebt; sondern es muß das Gegentheil herauskommen, nemlich das Product, + ab. Hieraus entsteht diese Regel: Negatives mit Negativem, oder — mit — multiplicirt, giebt + eben sowohl, als + mit +.

§. 34.

Diese Regeln pflegen auch zusammen gezogen und kurz mit diesen Worten ausgedrückt zu werden: Zwey gleiche Zeichen mit einander multiplicirt, geben +, zwey ungleiche Zeichen aber geben —. Wenn also diese Größen:

$+a, -b, -c, +d,$

mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt erstlich $+a$ mit $-b$ mult. $-ab$, dieses mit $-c$, giebt $+abc$, und dieses endlich mit $+d$ multiplicirt, giebt $+abcd$.

§. 35.

Da nun die Sache in Ansehung der Zeichen keine Schwierigkeit hat, so ist noch übrig zu zeigen, wie zwey Zahlen, die schon Producte sind, mit einander multiplicirt werden sollen. Wenn die Zahl ab mit der Zahl cd multiplicirt werden soll, so ist das Product $abcd$, und entsteht also, wenn man erstlich ab mit c, und das, was man durch die Multiplication gefunden, ferner mit d multiplicirt.

Weil bestimmte Zahlen solches am besten erläutern, so sey z. B. die Zahl 36 mit 12 zu multipliciren; weil nun 12 so viel ist, als 3 mal 4, so hat man nur nöthig 36, erstlich mit 3 und das gefundene, nemlich 108, ferner mit 4 zu multipliciren, da man denn erhält:

432. welches so viel ist, als 12 mal 36.

§. 36.

Will man aber $5ab$ mit $3cd$ multipliciren, so könnte man auch wohl sagen $3cd5ab$; da es aber hier nicht auf die Ordnung der mit einander multiplicirten Zahlen ankömmt, so pflegt man die Ziffern zuerst zu setzen, und schreibt das Product $5 \cdot 3 \cdot abcd$, oder $15abcd$; weil 5 mal 3 so viel ist, als 15.

Eben so, wenn $12pqr$ mit $7xy$, multipliciret werden soll, erhält man $12 \cdot 7pqrxy$, oder $84pqrxy$.

IV. Ca-