Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

VI. Capitel. Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler.

VI. Capitel.

Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler.

§. 58.

Da wir gesehen haben, daß sich einige Zahlen durch gewisse Divisoren theilen lassen, andere aber nicht; so ist zur Erkenntniß der Zahlen nöthig, diesen Unterschied wohl zu bemerken, und diejenigen Zahlen, die sich durch irgend einen Divisor theilen lassen, von denjenigen, die sich dadurch nicht theilen lassen, wohl zu unterscheiden, und zugleich auch den Rest, welcher bey der Division der letztern übrig bleibt, wohl anzumerken. Zu dieser Absicht wollen wir die Divisoren

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, u. s. f., etwas genauer betrachten.

§. 59.

Es sey erstlich der Divisor 2. Die Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, sind folgende:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, u. s. f.

welche denn so fort immer um 2 steigen. Diese Zahlen werden insgesammt gerade Zahlen genannt.

Hingegen die übrigen Zahlen:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, u. s. f.

welche sich durch 2 nicht theilen lassen, ohne daß nicht 1 übrig bliebe, heißen ungerade Zahlen, und sind also immer um eins größer, oder kleiner als die geraden Zahlen. Die geraden Zahlen können nun

nun alle in der allgemeinen Formel 2a begriffen werden; denn wenn man für a nach und nach alle Zahlen annimmt, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u. s. f., so lassen sich daraus alle gerade Zahlen herleiten. Hingegen sind alle ungerade Zahlen in der Formel 2a + 1 enthalten; weil 2a + 1 um 1 größer ist, als die gerade Zahl 2a.

§. 60.

Zweytens. Es sey der Divisor 3; so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen lassen, folgende:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, u. s. f.

welche durch die Formel 3a vorgestellt werden können. Denn 3a, durch 3 dividirt, giebt a zum Quotienten, ohne Rest. Die übrigen Zahlen aber, wenn man sie durch 3 theilen will, lassen entweder 1, oder 2, zum Rest übrig, und sind also von zweyerley Art. Diejenigen, welche 1 übrig lassen, sind folgende:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, u. s. f.

und sind in der Formel 3a + 1 enthalten.

Die von der andern Art, welche 2 übrig lassen, sind folgende:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, u. s. f.

welche alle durch die Formel 3a + 2 vorgestellt werden können; so daß alle Zahlen entweder in der Form 3a, oder in dieser 3a + 1, oder in dieser 3a + 2 enthalten sind.

§. 61.

Wenn ferner der Divisor 4 ist, so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen lassen, folgende:

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, u. s. f.

welche immer um 4 steigen, und in der Formel 4a enthalten sind. Die übrigen Zahlen aber, welche

man

man durch 4 nicht theilen kann, lassen entweder 1 zum Rest, und sind um 1 größer als jene, nemlich:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, u. s. f.

welche folglich alle die Formel $4a + 1$ enthält.

Oder sie lassen 2 zum Rest, als:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, u. s. f.

und sind in der Formel $4a + 2$ enthalten.

Oder endlich bleibt 3 zum Rest übrig, wie bey folgenden Zahlen:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, u. s. f.

welche in der Formel $4a + 3$ enthalten sind, so daß alle mögliche Zahlen durch eine von diesen vier Formeln, nemlich durch

$4a$, oder $4a + 1$, oder $4a + 2$, oder $4a + 3$

vorgestellt werden können.

§. 62.

Eben so verhält sich die Sache mit dem Divisor 5, da alle Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, in der Formel $5a$ enthalten sind. Diejenigen aber, welche sich dadurch nicht theilen lassen, sind entweder

$5a + 1$, oder $5a + 2$, oder $5a + 3$, oder $5a + 4$,

und so kann man weiter zu allen größern Divisoren fortschreiten.

Zusatz. Es sey allgemein n der Divisor, so sind alle mögliche Zahlen, welche sich durch n theilen lassen, in der Formel $n . a$, und die sich nicht theilen lassen, in folgender Formel enthalten: $na + 1$, $na + 2$, - - - - $na + (n - 1)$, wo $n - 1$ der größte Rest ist.

§. 63.

Hierbey kömmt nun das zu statten, was oben von der Auflösung der Zahlen in ihre einfachen Factoren gesagt worden ist; weil eine jede Zahl, unter deren Factoren sich entweder

2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 7,
oder eine andere Zahl befindet sich auch durch dieselbe theilen läßt. Da z. B.

60 so viel ist als: 2 . 2 . 3 . 5;

so ist klar, daß sich 60 durch 2, durch 3, und auch durch 5 theilen lasse.

Anmerk. Weiter unten werden Kennzeichen angegeben werden, um zu entscheiden, ob eine Zahl durch eine andere theilbar oder nicht theilbar sey.

§. 64.

Da überhaupt der Ausdruck abcd sich nicht nur durch a und b und c und d, sondern auch durch folgende

ab, ac, ad, bc, bd, cd; ferner durch
abc, abd, acd, bcd; und endlich auch durch
abcd, d. i. durch sich selbst, theilen läßt,

so muß sich gleichfalls 60, d. i. 2.2.3.5, außer den einfachen Zahlen, auch durch die theilen lassen, die aus zwey einfachen zusammengesetzt sind, nemlich durch

4, 6, 10, 15,

ferner auch durch die, welche aus dreyen bestehen, als:

12, 20, 30,

und endlich auch durch 60, d. i. durch sich selbst.

§. 65.

Wenn man also eine beliebige Zahl durch ihre einfachen Factoren vorgestellt hat, so ist es sehr leicht, alle diejenigen Zahlen anzuzeigen, wodurch sich dieselbe theilen läßt. Denn man darf nur erstlich einen jeden von den einfachen Factoren für sich selbst nehmen, hernach je zwey, je drey, je vier, und so fort mit einander multipliciren, bis man auf die gegebene Zahl selbst kommt.

§. 66.

§. 66.

Vor allen Dingen ist hier zu merken, daß sich eine jede Zahl durch 1, so wie auch durch sich selbst, theilen läßt; also daß eine jede Zahl zum wenigsten zwey Theiler oder Divisoren hat, nemlich 1, und sich selbst. Welche Zahlen nun außer diesen beyden Theilern keine andere haben, sind eben diejenigen, welche oben einfache oder Primzahlen genannt wurden.

Alle zusammen gesetzte Zahlen aber haben, außer 1 und sich selbst, noch andere Divisoren, wie aus folgender Tafel zu sehen ist, wo unter jeder Zahl alle ihre Theiler stehen, deren Anzahl zugleich bemerkt worden ist. Die Primzahlen werden durch den Buchstaben p angedeutet.

Tafel,

welche die Theiler der ganzen Zahlen von 1 bis 20 enthält (§. 59.).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

§. 67.

Endlich ist noch zu merken, daß 0 als eine solche Zahl angesehen werden kann, welche sich durch alle mögliche Zahlen theilen läßt; weil der Quotient, wenn man 0 durch eine beliebige Zahl oder Größe, z. B. durch 2, 3, 4 oder a dividirt, allezeit wieder 0 ist. Denn zweymal 0 ist 0, dreymal 0 ist 0, viermal 0 ist 0, und a mal 0 ist 0, da es unmöglich ist, aus Nichts, wenn man es auch noch so oft wiederholt, etwas heraus zu bringen.

Zusatz. Da 2 a jede gerade Zahl bedeutet, so gehört 2.0 oder 0 auch unter die geraden Zahlen.

Ein Satz, der nicht, wie es beym ersten Ansehen scheinen möchte, ein bloßes Wortspiel ist. Er sagt: daß, was von geraden Zahlen wahr ist, auch von 0 gilt, aber nicht, was nur von ungeraden wahr ist. Man sehe die vortrefliche Fortsetzung der Rechenkunst von dem Herrn Hofrath Kästner. Göttingen, 1786. Seite 541 No. 6.

VII. Capitel.

Von den Brüchen überhaupt.

§. 68.

Wenn sich eine Zahl, z. B. 7, durch eine andere, z. B. durch 3, nicht theilen läßt; so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotient nicht durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt, keineswegs aber, daß es überhaupt unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotienten zu machen.

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich seyn sollte, diese Linie in 3 gleiche Theile zu zergliedern, und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

§. 69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotienten, der in solchen Fällen herauskömmt, machen kann, obgleich derselbe keine ganze Zahl ist, so werden wir hierdurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche Brüche oder gebrochene Zahlen genannt werden.

So