Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

VII. Capitel. Von den Brüchen überhaupt.

ist, aus Nichts, wenn man es auch noch so oft wiederholt, etwas heraus zu bringen.

Zusatz. Da 2 a jede gerade Zahl bedeutet, so gehört 2.0 oder 0 auch unter die geraden Zahlen.

Ein Satz, der nicht, wie es beym ersten Ansehen scheinen möchte, ein bloßes Wortspiel ist. Er sagt: daß, was von geraden Zahlen wahr ist, auch von 0 gilt, aber nicht, was nur von ungeraden wahr ist. Man sehe die vortrefliche Fortsetzung der Rechenkunst von dem Herrn Hofrath Kästner. Göttingen, 1786. Seite 541 No. 6.

VII. Capitel.

Von den Brüchen überhaupt.

§. 68.

Wenn sich eine Zahl, z. B. 7, durch eine andere, z. B. durch 3, nicht theilen läßt; so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotient nicht durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt, keineswegs aber, daß es überhaupt unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotienten zu machen.

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich seyn sollte, diese Linie in 3 gleiche Theile zu zergliedern, und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

§. 69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotienten, der in solchen Fällen herauskömmt, machen kann, obgleich derselbe keine ganze Zahl ist, so werden wir hierdurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche Brüche oder gebrochene Zahlen genannt werden.

So

So haben wir im obigen Beispiele, wo 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem daher entspringenden Quotienten, und man pflegt denselben auf folgende Art anzuzeigen: $\frac{7}{3}$; wo die oben gesetzte Zahl 7 das Dividend, und die unten gesetzte Zahl 3 der Divisor ist.

§. 70.

Wenn also auf eine allgemeine Art die Zahl a durch die Zahl b getheilt werden soll, so wird der Quotient durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welcher Ausdruck auch ein Bruch genannt wird; daher man sich keinen bessern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man sagt, es werde dadurch der Quotient angezeigt, welcher entspringe, wenn man die obere Zahl durch die untere dividire. Hierbey ist noch zu merken, daß bey allen dergleichen Brüchen die untere Zahl der **Nenner**, welcher beym Dividiren der Divisor heißt, die obere aber, die man als den Dividendus betrachten kann, der **Zähler** genant zu werden pflegt.

§. 71.

In dem oben angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zähler, und 3 der Nenner.

Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$, zwey Drittel. $\frac{3}{4}$, drey Viertel.
$\frac{3}{8}$, drey Achtel. $\frac{12}{100}$, zwölf Hundertel.

Der Bruch $\frac{1}{2}$ wird gemeiniglich ein Halbes, anstatt ein Zweytel, gelesen; denn eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotient, welcher herauskömmt, wenn man 1 in zwey gleiche Theile zerschneidet, da dann, wie bekannt, ein solcher Theil ein Halbes genannt wird.

§. 72.

Um nun die Natur der Brüche recht kennen zu lernen, wollen wir erstlich das Beyspiel $\frac{a}{a}$ betrachten, wo die obere Zahl der untern, oder der Zähler dem Nenner gleich ist. Weil nun dadurch der Quotient angedeutet wird, der herauskömmt, wenn man a durch a dividiret; so ist klar, daß dieser Quotient gerade 1, folglich dieser Bruch $\frac{a}{a}$ so viel als ein Ganzes ist. Daher sind folgende Brüche:

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$ u. s. f.

alle einander gleich, und ein jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Ganzes.

§. 73.

Da nun jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist, Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zähler kleiner sind, als ihre Nenner, weniger als Eins. Denn wenn ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kömmt weniger als 1 heraus. Wenn z. B. eine Linie von 2 Fuß in 3 gleiche Theile zerschnitten werden soll, so wird ein Theil unstreitig kleiner seyn, als ein Fuß; daher sich leicht einsehen läßt, daß $\frac{2}{3}$ weniger ist, als 1, und dies eben deswegen, weil der Zähler 2 kleiner ist, als der Nenner 3.

§. 74.

Ist hingegen der Zähler größer, als der Nenner, so ist der Werth des Bruchs größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1; folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$, nemlich ein Ganzes und noch ein Halbes.

Eben

Eben so ist:

$\frac{4}{3}$ so viel als $1\frac{1}{3}$; ferner $\frac{5}{3}$ so viel $1\frac{2}{3}$; weiter $\frac{7}{3}$ so viel als $2\frac{1}{3}$.

Ueberhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotienten noch einen Bruch hinzusetzen, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$ dividirt man 43 durch 12, und bekömmt 3 zum Quotienten und 7 zum Rest; daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

§. 75.

Hieraus sieht man, wie Brüche, deren Zähler größer sind, als ihre Nenner, in zwey Glieder aufgelöst werden können, wovon das erste eine ganze Zahl ausmacht, das andere aber einen Bruch, dessen Zähler kleiner ist, als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, wo der Zähler größer ist als der Nenner, unächte oder Bastardbrüche genannt; weil sie eins, oder mehr Ganze in sich begreifen. Hingegen sind die ächten Brüche solche, deren Zähler kleiner sind, als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist, als Eins, oder weniger als ein Ganzes.

§. 76.

Man pflegt sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, wodurch die Sache nicht wenig erläutert wird. Wenn man z. B. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar, daß derselbe 3mal größer ist, als $\frac{1}{4}$. Nun aber bestehet die Bedeutung des Bruchs $\frac{1}{4}$ darinn, daß, wenn man 1 in 4 gleiche Theile zertheilt, ein solcher Theil den Werth desselben anzeiget. Wenn man daher drey solcher

Theile zusammen nimmt, so erhält man den Werth des Bruchs $\frac{3}{4}$.

Eben so kann man einen jeden andern Bruch betrachten, z. B. $\frac{7}{12}$: wenn man 1 in 12 gleiche Theile zerschneidet, so machen 7 dergleichen Theile den Werth des vorgelegten Bruches aus.

§. 77.

Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwähnten Namen des Zählers und Nenners entsprungen. Denn weil in dem vorigen Bruch $\frac{3}{4}$ die untere Zahl 4 anzeiget, daß die Einheit in vier gleiche Theile zertheilt werden müsse, und also diese Theile benennet, so wird dieselbe füglich der Nenner genannt.

Da aber die obere Zahl, nemlich 3, anzeigt, daß für den Werth des Bruchs 3 dergleichen Theile zusammen genommen werden müssen, und also dieselbe gleichsam darzählet, so wird die obere Zahl der Zähler genannt.

§. 78.

Betrachten wir nun die Brüche, deren Zähler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift, was $\frac{3}{4}$ bedeutet, wenn man weiß, was $\frac{1}{4}$ ist, so sind dergleichen Brüche folgende:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}$ u. s. f.

Hierbey ist zu merken, daß diese Brüche immer kleiner werden; denn in je mehr Theile ein Ganzes zerschnitten wird, desto kleiner werden auch die Theile. So ist z. B. $\frac{1}{100}$ kleiner als $\frac{1}{10}$, und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$; ferner $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$; und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$.

§. 79.

Hieraus sieht man nun, daß, je mehr bey solchen Brüchen der Nenner vergrößert werde, der Werth derselben um so viel kleiner werden müsse. Hiebey entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gänzlich verschwinde, und zu nichts werde? Dieses aber wird mit Recht verneint. Denn in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. B. die Länge eines Fußes, zertheilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewisse Größe, und sind folglich nicht nichts.

§. 80.

Es ist zwar wahr, daß, wenn man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile zertheilt, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. So bald man sie aber durch ein gutes Vergrößerungsglas betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilchen könnten zertheilt werden.

Hier ist aber die Rede keinesweges von dem, was wirklich kann verrichtet werden, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von demjenigen, was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewiß, daß, so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch gleichwohl nicht gänzlich verschwinde, oder in nichts, oder 0, verwandelt werde.

§. 81.

Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehret würde, niemals gänzlich zu nichts kömmt, sondern diese Brüche noch immer einige Größe behalten, und also die oben gesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne Ende fortgesetzt werden kann; so pflegt man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß seyn müßte, wenn endlich der Bruch zu 0 oder nichts werden sollte. Denn das Wort unendlich will hier eben so viel sagen, als daß man mit dem erwähnten Bruche niemals zu Ende komme.

§. 82.

Um nun diesen Begriff, welcher allerdings fest gegründet ist, vorzustellen, bedient man sich des Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet; und daher kann man sagen, daß dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein wirkliches Nichts sey, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemals Nichts werden kann, so lange der Nenner noch nicht ins Unendliche vermehret worden ist.

§. 83.

Dieser Begriff von dem Unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemerken, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkenntniß hergeleitet worden ist, und in dem folgenden von der größten Wichtigkeit seyn wird. Es lassen sich schon hier daraus solche Folgen ziehen, welche unsere Aufmerksamkeit verdienen, da dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ den Quotienten anzeigt, wenn man das Dividend 1 durch den Divisor ∞ dividirt. Nun wissen wir schon, daß, wenn man das Dividend 1 durch den Quotienten, welcher $\frac{1}{\infty}$ oder 0 ist, wie wir gesehen haben, dividirt, alsdann der Divisor, nemlich ∞, herauskomme. Daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nemlich daß dasselbe herauskomme, wenn man 1 durch 0 dividirt. Folglich kann man mit Grunde sagen, daß $\frac{1}{0}$, d. i. durch 0 dividiret, eine unendlich große Zahl, oder ∞ anzeige.

§. 84.

Hier ist es nöthig, noch einen sehr gewöhnlichen Irrthum aus dem Wege zu räumen, indem viele behaupten, eine unendliche Größe könne weiter nicht vermehret werden. Aber dies kann mit obigen richtigen Gründen nicht bestehen.

Denn da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl andeutet, und $\frac{2}{0}$ unstreitig zweymal, $\frac{3}{0}$ dreymal, und $\frac{4}{0}$ viermal so groß ist, als $\frac{1}{0}$; so folgt hieraus, daß auch so gar eine unendlich große Zahl weit größer werden könne.

Anmerk. Dem Anfänger ist es gewiß nicht zu verdenken, wenn er die Begriffe vom Unendlichen nicht so ganz leicht findet. Große Mathematikverständige selbst sind hierüber verschiedener Meynung, und nicht selten sind einige von ihnen dadurch auf ungereimte Behauptungen gekommen. Wer Beruf hat Mathematik zu studiren, darf die Kästnerischen Schriften nicht ungelesen lassen, diese vortreflichen Lehrbücher allein geben ihm gewiß den vollständigsten und richtigsten Begriff vom Unendlichen, und wer Gefühl für Wahrheit hat, wird diese Schriften nie ohne Begeisterung, und Hochachtung für diesen verehrungswürdigen Greis lesen. Im folgenden Zusatz werde ich das nöthige darüber mittheilen.

Zusatz. Daß ich jemand Nichts gebe, wenn ich ihm einmal Nichts gebe, und daß er nicht mehr bekömmt, wenn ich ihm zweymal, dreymal u. s. w. Nichts gebe, das läßt sich auch wohl einem Kinde spielend begreiflich machen.

Also: 0 ein Faktor, ist nichts weiter als ein ganz leichter Begriff der natürlichen Rechenkunst wissenschaftlich ausgedrückt. Aber vor einem Bruch fürchten sich schon Erwachsene; und noch mehr vor einem Bruche, dessen Nenner nicht etwa 2; 3; 4; oder eine große ganze Zahl, sondern selbst ein Bruch ist, z. E.

$$\frac{1}{\frac{1}{1000000000}}$$

Wer sich also einen Begriff von $\frac{1}{0}$ machen sollte, würde wohl zuerst darauf fallen, sich statt des Nenners oder Divisors einen sehr kleinen Bruch vorzustellen, da er dann einsähe, daß der Quo-

Quotient eine sehr große Zahl seyn müsse, die immer größer wird, je kleiner er den Divisor macht. Also kann er bey $\frac{1}{0}$ nichts denken, als etwas Größers als alle Zahlen, die er denken kann.

Diese Vorstellung, wenn man nun auch das Unendlich brauchen will, ist gewiß nicht so leicht, als die vom Nichts. Man könnte also wohl verstehen, was o als Faktor bedeutet, ohne zu verstehen, was es als Divisor bedeutet.

Und eigentlich läßt sich das letzte gar nicht verstehn. Niemand versteht: wie oft Nichts in Etwas enthalten ist, obgleich jedermann versteht, daß, Etwas, keinmal gegeben, Nichts gegeben heißt.

Alle Nullen oder Nichtse sind einerley, also $a \cdot 0 = b \cdot 0 = 0$; denn bey Nichts denkt man sich bestimmt: keine Größe. Ein Nichts ist nicht mehr noch weniger als das andere — dieses müssen sich Anfänger der Algebra wohl merken, damit sie nicht zu Fehlschlüssen verleitet werden.

Unendlich groß ist kein bestimmter Begriff, jede Größe, von der man einen solchen Begriff hat, ist bestimmt. Wer eine nicht mehr zählbare Menge denkt, denkt sie nicht als nur eine, eigentlich ist sein Begriff nur verneint: nicht mehr zählbar. Nach dem Geständnisse aller Mathematiker ist dieser Begriff viel schwerer als der vom Nichts. Auch hat man nie über das Nichts gestritten, aber viel über das Unendliche.

Daß man bey $2 \cdot 0$; $3 \cdot 0$ nichts anders denkt, als bey $1 \cdot 0$, habe ich oben gezeigt. Aber bey $2 \cdot \infty$; $3\ \infty$ u. s. w. denkt man gewiß etwas anders, als bey $1 \cdot \infty$. Das ist, was ich damit sagen will, wer eine unzählbare Menge denkt, denkt sie nicht als nur eine. Leipz. Mag. für reine und angewandte Mathematik. Drittes Stück 1786, Seite 419.

VIII. Ca-