# Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

## VIII. Capitel. Von den Eigenschaften der Brüche.

## VIII. Capitel.

## Von den Eigenschaften der Brüche.

§. 85.

Wie wir oben (§. 72.) gesehen haben, daß jeder dieser Brüche,

$$\tfrac{2}{2}, \tfrac{3}{3}, \tfrac{4}{4}, \tfrac{5}{5}, \tfrac{6}{6}, \tfrac{7}{7}, \tfrac{8}{8}, \text{ u. s. f.}$$

ein Ganzes ausmache, und folglich alle gleich sind; so sind auch folgende Brüche,

$$\tfrac{2}{1}, \tfrac{4}{2}, \tfrac{6}{3}, \tfrac{8}{4}, \tfrac{10}{5}, \tfrac{12}{6}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, weil jeder zwey Ganze ausmacht: denn es giebt der Zähler eines jeden, durch seine Nenner dividirt, 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$$\tfrac{3}{1}, \tfrac{6}{2}, \tfrac{9}{3}, \tfrac{12}{4}, \tfrac{15}{5}, \tfrac{18}{6}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, weil der Werth eines jeden 3 beträgt.

§. 86.

So läßt sich der Werth aller Brüche auf unendlich vielfältige Art vorstellen. Denn wenn man sowohl den Zähler als den Nenner eines Bruchs durch eine beliebige Zahl, ~~die man~~ multiplicirt, so behält der Bruch immer gleichen Werth. Also sind alle diese Brüche,

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{6}, \tfrac{5}{10}, \tfrac{6}{12}, \tfrac{7}{14}, \tfrac{8}{16}, \tfrac{9}{18}, \tfrac{10}{20}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, und ein jeder so viel als $\tfrac{1}{2}$. Eben so sind auch alle diese Brüche,

$$\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{6}, \tfrac{3}{9}, \tfrac{4}{12}, \tfrac{5}{15}, \tfrac{6}{18}, \tfrac{7}{21}, \tfrac{8}{24}, \tfrac{9}{27}, \tfrac{10}{30}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, und der Werth eines jeden $\tfrac{1}{3}$. Ferner sind auch folgende Brüche, als:

$$\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{6}, \tfrac{6}{9}, \tfrac{8}{12}, \tfrac{10}{15}, \tfrac{12}{18}, \tfrac{14}{21}, \tfrac{16}{24}, \text{ u. s. f.}$$

einan-

einander gleich; daher allgemein der Bruch $\frac{a}{b}$ auf folgende Arten vorgestellt werden kann,

$$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \frac{5a}{5b}, \frac{6a}{6b}$$ u. s. f., wovon jeder so groß ist, als der erste $\frac{a}{b}$.

§. 87.

Um dies zu beweisen, darf man nur statt des Werths des Bruchs $\frac{a}{b}$ einen besondern Buchstaben, als $c$, schreiben, so, daß $c$ der Quotient sey, wenn man $a$ durch $b$ dividirt. Nun aber ist vorher (§. 46) gezeigt worden, daß wenn man den Quotienten $c$ mit dem Divisor $b$ multiplicirt, der Dividendus herauskommen müsse.

Da nun $c$ mit $b$ multiplicirt $a$ giebt, so wird $c$ mit $2b$ multiplicirt $2a$, $c$ mit $3b$ multiplicirt $3a$, und überhaupt $c$ mit $mb$ multiplicirt $ma$ geben.

Macht man hieraus wieder ein Divisionsexempel und dividirt das Product $ma$ durch den einen Factor $mb$, so muß der Quotient dem andern Factor $c$ gleich seyn: aber $ma$ durch $mb$ dividirt, giebt den Bruch $\frac{ma}{mb}$; daher der Werth desselben $c$ ist. Da nun $c$ auch dem Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ gleich ist, so ist offenbar, daß der Bruch $\frac{ma}{mb}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich sey, man mag statt $m$ eine Zahl annehmen, welche man will.

§. 88.

Weil aber jeder Bruch durch unendlich verschiedene Formen von gleichem Werth dargestellt werden kann,

kann, so wird man unstreitig diejenige am leichtesten fassen, welche aus den kleinsten Zahlen besteht. So könnte man z. B. statt $\frac{2}{3}$ einen jeden der folgenden Brüche, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$ u. s. f. nach Willkühr setzen; es wird aber niemand zweifeln, daß nicht die Form $\frac{2}{3}$ von allen die deutlichste sey. Hiebey läßt sich nun noch die Frage aufwerfen, wie man einen Bruch, der nicht in seine kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, als z. B. $\frac{8}{12}$, auf seine kleinste Form, nemlich $\frac{2}{3}$, bringen könne?

## §. 89.

Diese Frage läßt sich am leichtesten auflösen, wenn man bedenkt, daß jeder Bruch seinen Werth behält, wenn sowohl Zähler als Nenner mit einerley Zahl multiplicirt werden. Denn daraus folgt, daß, wenn man auch den Zähler und Nenner eines Bruchs durch eben dieselbe Zahl dividirt, der Bruch einen gleichen Werth behalten müsse. Noch leichter ergiebt sich dies aus der allgemeinen Form $\frac{na}{nb}$. Denn wenn man sowohl den Zähler $na$ als den Nenner $nb$ durch die Zahl $n$ dividirt, so kommt der Bruch $\frac{a}{b}$ heraus, der jenem gleich ist, wie schon vorher (§. 87.) gezeigt worden ist.

## §. 90.

Um nun einen vorgegebenen Bruch auf seine kleinste Form zu bringen, muß man solche Zahlen finden, wodurch sich sowohl Zähler als Nenner theilen lassen. Diese Zahl wird der gemeine Theiler genannt, und so lange man zwischen dem Zähler und Nenner einen gemeinen Theiler anzeigen kann, so lange läßt sich der Bruch noch auf eine

kleinere

kleinere Form bringen; findet aber außer 1 kein gemeiner Theiler weiter statt, so ist der Bruch schon auf seine kleinste Form gebracht.

§. 91.

Um dies zu erläutern, wollen wir den Bruch $\frac{48}{120}$ betrachten. Hier sieht man gleich, daß sich Zähler und Nenner durch 2 theilen lassen, woraus der Bruch $\frac{24}{60}$ entsteht. Dieser läßt sich nun noch einmal durch 2 theilen, und so entsteht ein neuer Bruch $\frac{12}{30}$. Auch hier ist 2 nochmal der gemeine Theiler, wodurch man $\frac{6}{15}$ erhält. Man sieht aber leicht, daß Zähler und Nenner sich noch durch 3 theilen lassen, woraus endlich der Bruch $\frac{2}{5}$ entspringt, welcher dem vorgegebenen gleich ist, und sich in seiner kleinsten Form befindet, weil die Zahlen 2 und 5 weiter keinen gemeinschaftlichen Theiler haben als 1, welcher keine Zahl verkleinert.

§. 92.

Diese Eigenschaft der Brüche, daß, wenn man Zähler und Nenner mit Einer Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, der Werth des Bruchs unverändert bleibe, ist von der größten Wichtigkeit und es gründet sich hierauf fast die ganze Lehre von den Brüchen. So lassen sich z. B. zwey Brüche nicht gut addiren, oder von einander subtrahiren, ehe man sie nicht in andere Formen gebracht hat, deren Nenner einander gleich sind; wovon im folgenden Capitel gehandelt werden soll.

§. 93.

Es ist hier nur noch zu bemerken, daß man auch jede ganze Zahl in Form eines Bruchs vorstellen könne. So ist z. B. 6 so viel als $\frac{6}{1}$, weil 6 durch

1 divi-

1 dividirt auch 6 giebt. Und daher entstehen noch folgende Formen,

$$\frac{12}{2},\ \frac{18}{3},\ \frac{24}{4},\ \frac{36}{6},\ \text{u. s. f.}$$

welche alle einen gleichen Werth, nemlich 6, in sich enthalten.

---

## IX. Capitel.

## Von der Addition und Subtraction der Brüche.

### §. 94.

Haben mehrere Brüche gleiche Nenner, so mache ihre Addition und Subtraction keine Schwierigkeit, indem $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ so viel als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{7} - \frac{2}{7}$ so viel als $\frac{2}{7}$ ist. In diesem Fall addirt oder subtrahirt man bloß die Zähler, und schreibt den gemeinschaftlichen Nenner darunter. Also macht

$\frac{7}{100} + \frac{9}{100} - \frac{12}{100} - \frac{15}{100} + \frac{20}{100}$ so viel als $\frac{9}{100}$:
$\frac{24}{50} - \frac{7}{50} - \frac{12}{50} + \frac{31}{50}$ so viel als $\frac{36}{50}$ oder $\frac{18}{25}$:
$\frac{16}{20} - \frac{3}{20} - \frac{11}{20} + \frac{14}{20}$ so viel als $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$:

eben so macht $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ so viel als $\frac{3}{3}$ oder 1, das ist ein Ganzes, und $\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ so viel als $\frac{0}{4}$, das ist nichts, oder 0.

### §. 95.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so ist es jedesmal möglich, sie in andere von gleichem Werth zu verwandeln, deren Nenner gleich sind. Also wenn die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gegeben sind, und zusammen addirt werden sollen, so ist zu bemerken, daß $\frac{1}{2}$ so viel ist, als $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{2}{6}$: man