Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

X. Capitel. Von der Multiplication und Division der Brüche.

Sehr brauchbar ist dieser Vortheil, wenn die Brüche sehr groß, und der Zähler also wenig vom Nenner unterschieden sind.

Z. B. $\frac{57}{59} - \frac{29}{31} = \frac{(57 - 29)2}{59.\ 31} = \frac{28.\ 2}{59.\ 31}$; hier ist nehmlich $d - c = b - a$, daher kann man die Formel in diesem Fall noch mehr verkürzen, indem man schreibt $\frac{(a - c)(d - c)}{bd}$.

X. Capitel.

Von der Multiplication und Division der Brüche.

§. 101.

Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zähler, und läßt den Nenner unverändert; z. B.

2 mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$, oder 1 Ganzes;
2 mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3 mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$, oder $\frac{1}{2}$;
4 mal $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$.

Hieraus ergiebt sich die Regel: daß ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, wenn man entweder den Zähler damit multiplicirt, oder den Nenner durch die ganze Zahl dividirt; geht das letztere an, so wird die Rechnung dadurch um vieles verkürzt. Z. B. es soll $\frac{8}{9}$ mit 3 multiplicirt werden, so kommt $\frac{24}{9}$ heraus, wenn der Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird, welches so viel als $\frac{8}{3}$ ist; läßt man aber den Zähler unverändert und dividirt den Nenner 9 durch 3, so bekommt man ebenfalls $\frac{8}{3}$; das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Eben so giebt $\frac{13}{24}$ mit 6 multiplicirt $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$.

§. 102.

Wenn also ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hierbey ist zu merken, daß, wenn die ganze Zahl gerade dem Nenner gleich ist, alsdann das Product dem Zähler gleich werde, also:

$\frac{1}{2}$ zweymal genommen giebt 1.
$\frac{2}{3}$ mit 3 mult. giebt 2.
$\frac{3}{4}$ mit 4 mult. giebt 3.

und allgemein, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl b multiplicirt wird, so ist das Product a, wovon der Grund schon vorher (§. 46) gezeigt worden; denn da $\frac{a}{b}$ den Quotienten ausdrückt, der entsteht, wenn der Dividendus a durch den Divisor b dividirt wird, und zugleich bewiesen ist, daß der Quotient mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus gebe, so folgt hieraus, daß $\frac{a}{b}$ mit b multiplicirt, die Zahl a geben müsse.

§. 103.

Da nun gezeigt ist, wie man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicire; so ist noch nöthig zu zeigen, wie man einen Bruch durch eine ganze Zahl dividiren müsse, ehe die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruch gelehrt werden kann. Es ist aber leicht einzusehen, daß wenn man den Bruch $\frac{2}{3}$ durch 2 dividiren soll, $\frac{1}{3}$ heraus komme, eben so wie in dem Fall, da $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ heraus kommen. Hieraus erhellet, daß man nur den Zähler durch die ganze Zahl theilen

müsse,

müsse, da denn der Nenner unverändert bleibt. Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2 div. giebt $\frac{6}{25}$, und
$\frac{12}{25}$ durch 3 div. giebt $\frac{4}{25}$, und
$\frac{12}{25}$ durch 4 div. giebt $\frac{3}{25}$ u. s. f.

§. 104.

Es hat dies also keine Schwierigkeit, wenn sich nur der Zähler durch die vorgegebene Zahl theilen läßt: geht dies aber nicht an, so merke man, daß der Bruch in unendlich viele andere Formen verändert werden könne, unter welchen sich gewiß auch solche finden müssen, deren Zähler sich durch die gegebene Zahl theilen lassen. Also wenn $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, so verwandle man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, so giebt dies $\frac{3}{8}$, wenn es durch 2 dividirt wird.

Eine allgemeine Regel ist folgende: wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c dividirt werden soll, so verwandle man denselben in $\frac{ac}{bc}$, dessen Zähler a c durch c dividirt a giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

§. 105.

Hieraus sieht man, daß, wenn ein Bruch, als $\frac{a}{b}$, durch eine ganze Zahl c dividirt werden soll, man nur den Nenner b mit dieser ganzen Zahl zu multipliciren brauche, ohne den Zähler verändern zu lassen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividirt, giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{16}$ durch 5 dividirt, giebt $\frac{9}{80}$. Wenn sich aber der Zähler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter, z. B. $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilt,

theilt, giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$, welches so viel als $\frac{3}{16}$ ist. Denn 3 mal 3 ist 9, und 3 mal 16 ist 48.

§. 106.

Nun ist es möglich zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden soll. Man darf nur bedenken, daß $\frac{c}{d}$ so viel ist als c getheilt durch d: und also darf man nur den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit c multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ heraus kommt; hernach durch d dividiren, da es denn $\frac{ac}{bd}$ giebt; und hieraus folgt die Regel: daß, um zwey Brüche mit einander zu multipliciren, man erst die Zähler, und hernach die Nenner besonders mit einander multipliciren müsse.

Also: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ mult. giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$: ferner
$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ mult. giebt $\frac{8}{15}$; und
$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ mult. giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u. s. f.

§. 107.

Nun ist nur noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll. Hiebey ist erstlich zu merken, daß wenn die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur an den Zählern verrichtet werde: weil z. B. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so vielmal enthalten ist, als 3 in 9, das ist 3 mal. Daher wenn $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$ dividirt werden soll, so darf man nur 8 und 9 dividiren; dies giebt $\frac{8}{9}$. Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ ist 3 mal: $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ ist 7 mal: $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$: eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

§. 108.

§. 108.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weiß man, wie dieselben auf gleiche Nenner gebracht werden müssen. Z. B. soll man den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, und bringt man diese Brüche unter gleiche Benennung, so bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ zu dividiren, wo denn eben so viel heraus kommen muß, als wenn man den ersten Zähler ad durch den letztern bc dividirt: Folglich wird der gesuchte Quotient seyn $\frac{ad}{bc}$.

Hieraus entspringt diese Regel: man muß den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zähler, und dieses den Nenner zum Quotienten geben.

§. 109.

Wenn also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so bekommt man nach dieser Regel $\frac{15}{16}$ zum Quotienten: Wenn ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$, das ist $1\frac{1}{2}$. Ferner wenn durch $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

§. 110.

Man pflegt diese Regel für die Division auch bequemer auf folgende Art vorzutragen: man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll, um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zähler unten schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher getheilt werden soll, mit diesem umgekehrten Bruch, so erhält man den gesuchten Quotienten. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multiplicirt, woraus entsteht $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Eben so $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, welches $\frac{15}{16}$ giebt: ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, welches $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$ giebt.

Man sieht also überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividiren eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$, das ist mit 2 multipliciren: und durch $\frac{1}{3}$ dividiren, eben so viel, als mit $\frac{3}{1}$, das ist mit 3 multipliciren.

§. 111.

Wenn daher die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es 200; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ dividirt, giebt 3000. Wenn ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$ dividirt werden soll, so kommt 1000; und 1 durch $\frac{1}{100000}$ dividirt, giebt 100000; woraus sich erklären läßt, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müsse, weil, wenn man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{1000000000}$ dividirt, die große Zahl 1000000000 herauskommt.

§. 112.

Wenn ein Bruch durch sich selbst dividirt werden soll, so versteht sich von selbst, daß der Quotient 1 seyn werde, weil eine jede Zahl durch sich selbst dividirt 1 giebt: eben dieses zeigt auch unsere Regel. Wenn z. B. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$, da dann $\frac{12}{12}$, das ist 1, herauskommt. Und wenn $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt

werden

werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$, wo denn $\frac{ab}{ab}$, das ist 1, heraus kommt.

§. 113.

Es ist jetzt noch übrig, eine Redensart zu erklären, die sehr oft gebraucht wird: z. B. fragt man, was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so heißt das so viel, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so, wenn man fragt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$ sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da denn $\frac{10}{24}$ heraus kommt; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, welches $\frac{27}{64}$ giebt. Dies ist wohl zu merken, so oft diese Redensart vorkommt.

§. 114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen + und — eben das zu bemerken, was oben bey den ganzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder + 1.

XI. Capitel.

Von den Quadratzahlen.

§. 115.

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ein Quadrat genannt, so wie in Ansehung dessen die Zahl, daraus es entstanden, seine Quadratwurzel heißt.

Also