Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XI. Capitel. Von den Quadratzahlen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$, wo denn $\frac{ab}{ab}$, das ist 1, heraus kommt.

§. 113.

Es ist jetzt noch übrig, eine Redensart zu erklären, die sehr oft gebraucht wird: z. B. fragt man, was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so heißt das so viel, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so, wenn man fragt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$ sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da denn $\frac{10}{24}$ heraus kommt; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, welches $\frac{27}{64}$ giebt. Dies ist wohl zu merken, so oft diese Redensart vorkommt.

§. 114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen + und − eben das zu bemerken, was oben bey den ganzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder + 1.

XI. Capitel.

Von den Quadratzahlen.

§. 115.

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ein Quadrat genannt, so wie in Ansehung dessen die Zahl, daraus es entstanden, seine Quadratwurzel heißt.

Also

Also, wenn man z. B. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadratzahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats, d. i. eines gleichseitigen und rechtwinklichten Vierecks, gefunden wird, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.

§. 116.

Daher findet man alle Quadratzahlen durch die Multiplication, wenn man nehmlich die Wurzel mit sich selbst multiplicirt.

Also, weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; hingegen 2 die Quadratwurzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadratwurzel von 9. Wir wollen daher die Quadrate der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hersetzen, in welcher man die Zahlen oder Wurzeln in der ersten, die Quadrate aber in der zweyten Reihe findet.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

Anmerk. Wir haben sehr vollständige Tafeln für die Quadrate der natürlichen Zahlen unter dem Titel: Tetragonometria Tabularia &c. auctore I. Jobo Ludolfo. Amstelodami, 1690. 4. Diese Tafeln enthalten die Quadrate von allen Zahlen von 1 bis 100000. In der Einleitung werden verschiedene Anwendungen dieser Tafeln gezeigt, unter andern auch die Producte von jeden zwey Factoren zu finden, die kleiner als 100000 sind. Von diesem Werke besitze ich, außer der genannten Ausgabe, noch folgende zwey: Erffordiae 1709 und Jenae 1712.

§. 117.

§. 117.

Bey diesen der Ordnung nach fortschreitenden Quadratzahlen bemerkt man sogleich folgende Eigenschaft, daß, wenn man ein jedes Quadrat von dem folgenden subtrahiret, die Reste in dieser Ordnung fortgehen.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, u. s. f.

welche immer um zwey steigen, und alle ungrade Zahlen der Ordnung nach enthalten.

§. 118.

Auf gleiche Weise werden die Quadrate von Brüchen gefunden, wenn man nemlich einen Bruch mit sich selbst multiplicirt. Also ist von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$,

von $\frac{1}{3}$ ist das Quadrat $\frac{1}{9}$,
von $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$,
von $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$,
von $\frac{3}{4}$ $\frac{9}{16}$ u. s. f.

Man darf nemlich nur das Quadrat des Zählers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so bekommt man das Quadrat des Bruchs. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{8}$ und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die Wurzel von $\frac{25}{64}$.

§. 119.

Wenn man das Quadrat von einer vermischten Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man sie nur zu einem unächten Bruch machen, und das Quadrat davon nehmen. Also um das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ zu finden, so ist erstlich $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$, welches $6\frac{1}{4}$ beträgt. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so um das Quadrat von $3\frac{1}{4}$ zu finden, so bemerke man, daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist als $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$ ist, welches 10 und $\frac{9}{16}$ ausmacht. Wir wollen z. B. die Quadrate der Zahlen, welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen, betrachten, als:

Zahlen	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quadr.	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Woraus man leicht abnehmen kann, daß, wenn die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalte. Also wenn die Wurzel ist $1\frac{5}{12}$, so wird das Quadrat derselben gefunden $\frac{289}{144}$, welches $2\frac{1}{144}$, und also nur um sehr wenig größer als 2 ist.

§. 120.

Auf eine allgemeine Art, wenn die Wurzel a ist, so ist das Quadrat aa: ferner von der Wurzel $2a$ ist das Quadrat $4aa$. Hieraus sieht man, daß, wenn die Wurzel 2 mal so groß genommen wird, das Quadrat 4 mal größer werde. Ferner ist von der Wurzel $3a$ das Quadrat $9aa$, und von der Wurzel $4a$ ist das Quadrat $16aa$ u. s. f. Heißt aber die Wurzel ab, so ist ihr Quadrat $aabb$, und wenn abc die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat $aabbcc$.

§. 121.

Wenn daher die Wurzel aus 2 oder mehrern Factoren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wenn das Quadrat aus 2 oder mehrern Factoren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzeln derselben mit einander zu multipliciren. Also da 2304 so viel ist, als 4. 16. 36; so

ist

ist die Quadratwurzel davon 2. 4. 6, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadratwurzel von 2304, weil 48. 48 eben so viel ausmacht, als 2304.

§. 122.

Nun ist noch nöthig zu zeigen, was es mit den Zeichen plus und minus bey den Quadraten für eine Bewandniß habe. Es erhellet sogleich, daß, wenn die Wurzel das Zeichen + hat, oder eine positive Zahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine positive Zahl seyn müsse, weil + mit + multiplicirt + giebt. Also wird das Quadrat von + a seyn + aa. Wenn aber die Wurzel eine negative Zahl ist, als — a, so wird ihr Quadrat seyn + aa, eben so, als wenn die Wurzel + a wäre; folglich ist + aa eben so wohl das Quadrat von + a als von — a; und man kann daher von einem jeden Quadrat zwey Quadratwurzeln angeben, deren eine positiv, die andere negativ ist. Also ist die Quadratwurzel von 25 so wohl + 5, als — 5, weil + 5 mit + 5 multiplicirt, und auch — 5 mit — 5 multiplicirt + 25 giebt.

XII. Capitel.

Von den Quadratwurzeln und den daraus entstehenden Irrationalzahlen.

§. 123.

Aus dem vorhergehenden erhellt, daß die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl nichts anders sey, als eine solche Zahl, deren Quadrat der gegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadratwurzel von 4 ist 2, von

9 ist