Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XII. Capitel. Von den Quadratwurzeln und den daher entspringenden Jrrationalzahlen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

ist die Quadratwurzel davon 2. 4. 6, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadratwurzel von 2304, weil 48. 48 eben so viel ausmacht, als 2304.

§. 122.

Nun ist noch nöthig zu zeigen, was es mit den Zeichen plus und minus bey den Quadraten für eine Bewandniß habe. Es erhellet sogleich, daß, wenn die Wurzel das Zeichen + hat, oder eine positive Zahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine positive Zahl seyn müsse, weil + mit + multiplicirt + giebt. Also wird das Quadrat von + a seyn + aa. Wenn aber die Wurzel eine negative Zahl ist, als — a, so wird ihr Quadrat seyn + aa, eben so, als wenn die Wurzel + a wäre; folglich ist + aa eben so wohl das Quadrat von + a als von — a; und man kann daher von einem jeden Quadrat zwey Quadratwurzeln angeben, deren eine positiv, die andere negativ ist. Also ist die Quadratwurzel von 25 so wohl + 5, als — 5, weil + 5 mit + 5 multiplicirt, und auch — 5 mit — 5 multiplicirt + 25 giebt.

XII. Capitel.

Von den Quadratwurzeln und den daraus entstehenden Irrationalzahlen.

§. 123.

Aus dem vorhergehenden erhellt, daß die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl nichts anders sey, als eine solche Zahl, deren Quadrat der gegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadratwurzel von 4 ist 2, von

9 ist

9 ist sie 3, von 16 ist sie 4, u. s. f. wobey man bemerken muß, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25 ist die Quadratwurzel so wohl $+5$, als -5, weil -5 mit -5 multiplicirt, eben so wohl $+25$ ausmacht, als $+5$ mit $+5$ multiplicirt.

§. 124.

Wenn daher die gegebene Zahl ein Quadrat ist, und man die Quadratzahlen so weit im Gedächtniß hat, so ist es leicht die Quadratwurzel zu finden: z. B. wäre die Zahl 196 gegeben, so weiß man, daß die Quadratwurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen verhält es sich eben so, und aus dem obigen ist klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadratwurzel $\frac{5}{7}$ sey, weil man nur so wohl vom Zähler, als vom Nenner die Quadratwurzel nehmen darf. Ist die gegebene Zahl eine vermischte Zahl, als $12\frac{1}{4}$, so bringe man sie auf einen einzelnen Bruch, nemlich $\frac{49}{4}$, wovon die Quadratwurzel $\frac{7}{2}$, oder $3\frac{1}{2}$ ist. Dies ist also offenbar die Quadratwurzel von $12\frac{1}{4}$.

§. 125.

Ist aber die gegebene Zahl kein Quadrat, als z. B. 12, so ist es auch nicht möglich die Quadratwurzel davon, das ist eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, gerade 12 ausmache, zu finden oder anzugeben. Indessen wissen wir doch, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als 3, weil $3 \cdot 3$ nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil $4 \cdot 4$ schon 16 macht; man weiß auch, daß sie kleiner seyn müsse, als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, denn $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$, und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$. Diese Wurzel läßt sich sogar noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$, denn das Quadrat von

$3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, denn $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

§. 126.

Da nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas größer ist als die Quadratwurzel von 12, so könnte man glauben, daß, wenn man statt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Man nehme also $3\frac{3}{7}$, weil $\frac{3}{7}$ um etwas weniges kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{576}{49}$, und also kleiner ist als 12. Denn 12 beträgt $\frac{588}{49}$, also $\frac{12}{49}$ mehr. Hieraus sieht man also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil $\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$ und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$, in einen Bruch gebracht, $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht, giebt $\frac{1452}{121}$, woraus erhellet, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist und zwar nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man nun setzen, die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 auf gleichen Nenner gebracht, giebt $\frac{2028}{168}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, aber nur um $\frac{3}{169}$, da doch $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

§. 127.

Es läßt sich aber leicht begreifen, daß, was man auch immer für einen Bruch zu 3 hinzusetzen mag, das Quadrat davon jedesmal einen Bruch in sich fassen müsse, und also niemals genau 12 betragen könne. Also, ungeachtet wir wissen, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als $3\frac{6}{13}$, aber kleiner als $3\frac{7}{15}$, so muß man doch gestehen, daß es nicht möglich sey, zwischen diesen zwey Brüchen einen solchen ausfindig zu machen, welcher zu 3 addirt, die Quadratwurzel von 12 genau ausdrückte. Inzwischen läßt sich doch nicht behaupten, daß die Quadratwurzel von 12 an und für sich selbst unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem angeführten nur so viel, daß diese Zahl durch Brüche nicht ausgedrückt werden kann, ungeachtet sie nothwendig eine bestimmte Größe haben muß.

§. 128.

Dies leitet auf eine neue Art von Zahlen, welche sich keinesweges durch Brüche ausdrücken lassen und gleichwohl eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadratwurzel der Zahl 12 sehen. Diese neue Art von Zahlen werden nun Irrationalzahlen genannt, und sie entstehen, so oft man die Quadratwurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadratwurzel aus 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, genau 2 hervorbringt, eine Irrationalzahl. Zuweilen pflegt man solche Zahlen auch surdische zu nennen.

§. 129.

Ungeachtet sich nun solche Irrationalzahlen durch keinen Bruch darstellen lassen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Denn z. B. die Quadratwurzel aus 12 mag auch immer noch so verborgen scheinen, so ist doch bekannt, daß sie eine solche Zahl ist, welche mit sich selbst multiplicirt, gerade 12 hervorbringt. Und diese Eigenschaft ist hinlänglich, einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, besonders da man immer näher zu dem Werth derselben gelangen kann.

§. 130.

§. 130.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrationalzahlen haben, so bedient man sich eines gewissen Zeichens, um die Quadratwurzel solcher Zahlen, die keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat diese Figur $\surd$, und wird mit dem Wort Quadratwurzel ausgesprochen. Also $\surd 12$ bedeutet diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt 12 giebt, oder mit einem Wort die Quadratwurzel aus 12. Eben so bedeutet $\surd 2$ die Quadratwurzel aus 2, $\surd 3$ die Quadratwurzel aus 3: ferner $\surd \frac{2}{3}$ die Quadratwurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\surd a$, die Quadratwurzel aus der Zahl a. So oft man also aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadratwurzel anzeigen soll, so bedient man sich dieses Zeichens $\surd$, welches vor jene Zahl geschrieben wird.

§. 131.

Der jetzt erklärte Begriff von den Irrationalzahlen führt nun sogleich auf einen Weg, die gewöhnlichen Rechnungen damit anzustellen. Weil nemlich die Quadratwurzel aus 2 mit sich selbst multiplicirt 2 geben muß, so wissen wir, daß, wenn $\surd 2$ mit $\surd 2$ multiplicirt wird, nothwendig 2 heraus komme: eben so giebt $\surd 3$ mit $\surd 3$ multiplicirt 3; und $\surd 5$ mit $\surd 5$, 5; imgleichen $\surd \frac{2}{3}$ mit $\surd \frac{2}{3}$ giebt $\frac{2}{3}$; und überhaupt $\surd a$ mit $\surd a$ multiplicirt, giebt a.

§. 132.

Wenn aber $\surd a$ mit $\surd b$ multiplicirt werden soll, so ist das Product $\surd ab$, weil oben gezeigt ist (§. 121), daß, wenn ein Quadrat Factoren hat, die Wurzel davon auch aus den Wurzeln der Factoren

 entsteht.

entsteht. Daher findet man die Quadratwurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wenn man die Quadratwurzel von a, das ist $\sqrt{a}$ mit der Quadratwurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus erhellet sogleich, daß wenn b gleich a wäre, alsdenn $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{aa}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a, weil aa das Quadrat von a ist.

§. 133.

Eben so, wenn $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt werden soll, so bekömmt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$, wobey es möglich ist, daß im Quotienten die Irrationalität verschwindet. Also wenn $\sqrt{18}$ durch $\sqrt{8}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\sqrt{\frac{18}{8}}$. Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$ und die Quadratwurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

§. 134.

Wenn die Zahl, vor welche das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ gesetzt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrükken. Also ist $\sqrt{4}$ so viel als 2; $\sqrt{9}$ ist 3; $\sqrt{36}$ ist 6; und $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ist $\sqrt{\frac{49}{4}}$: das ist $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist daher die Irrationalität nur scheinbar, und fällt von selbst weg.

§. 135.

Es ist auch leicht, solche Irrationalzahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multipliciren. Also ist 2 mal $\sqrt{5}$ so viel als $2\sqrt{5}$; und $\sqrt{2}$ mit 3 multiplicirt, giebt $3\sqrt{2}$; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{9}$, so giebt auch $\sqrt{9}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt, folgende Form, nemlich $\sqrt{18}$, so daß $\sqrt{18}$ eben so viel ist, als $3\sqrt{2}$. Eben so ist $2\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{4a}$, und $3\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{9a}$. Und auf eine allgemeine Art ist $b\sqrt{a}$ so viel als die Quadratwurzel aus bba oder $\sqrt{abb}$; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesetzt werden kann; als $b\sqrt{a}$ anstatt $\sqrt{bba}$. Hieraus werden folgende Reductionen klar seyn:

$\sqrt{8}$, oder $\sqrt{2 . 4}$, ist so viel als $2\sqrt{2}$.
$\sqrt{12}$, oder $\sqrt{3 . 4}$, — — — $2\sqrt{3}$.
$\sqrt{18}$, oder $\sqrt{2 . 9}$, — — — $3\sqrt{2}$.
$\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6 . 4}$, — — — $2\sqrt{6}$.
$\sqrt{32}$, oder $\sqrt{2 . 16}$, — — — $4\sqrt{2}$.
$\sqrt{75}$, oder $\sqrt{3 . 25}$, — — — $5\sqrt{3}$. u. s. f.

§. 136.

Mit der Division hat es gleiche Bewandniß: $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt, giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, das ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Auf eben diese Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als $\sqrt{\frac{8}{2}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ist $\sqrt{\frac{18}{2}}$, oder $\sqrt{9}$, oder 3.

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ist $\sqrt{\frac{12}{3}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ ist $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt{\frac{4}{2}}$, oder $\sqrt{2}$.

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{3}}$, oder $\sqrt{3}$.

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ ist $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, oder $\sqrt{\frac{144}{6}}$, oder $\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6.4}$, das ist $2\sqrt{6}$.

§. 137.

Bey der Addition und Subtraction ist nichts besonders zu erinnern, weil die Zahlen nur mit plus und minus verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

§. 138.

Endlich ist noch zu merken, daß man zum Unterschied dieser sogenannten Irrationalzahlen, die gewöhnlichen Zahlen, sowohl Ganze als Brüche, **Rationalzahlen** zu nennen pflegt.

Wenn also von Rationalzahlen die Rede ist, so werden darunter jedesmal ganze Zahlen, oder auch Brüche, die sich genau angeben lassen, verstanden, dergleichen z. B. die Quadratwurzel aus 16, aus 25 und aus $13\frac{4}{9}$ ist.

XIII. Capitel.

Von den aus eben dieser Quelle entspringenden unmöglichen oder imaginären Zahlen.

§. 139.

Wir haben schon oben (§. 122) gesehen, daß die Quadrate sowohl der positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus heraus kommen; indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben sowohl $+aa$ giebt, als wenn man $+a$ mit $+a$ mutipsicirt. Und daher sind in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadratwurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen worden.

§. 140.