# Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XIII. Capitel. Von den aus eben dieser Quelle entspringenden unmöglichen oder imaginären Zahlen.

§. 137.

Bey der Addition und Subtraction ist nichts besonders zu erinnern, weil die Zahlen nur mit plus und minus verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

§. 138.

Endlich ist noch zu merken, daß man zum Unterschied dieser sogenannten Irrationalzahlen, die gewöhnlichen Zahlen, sowohl Ganze als Brüche, Rationalzahlen zu nennen pflegt.

Wenn also von Rationalzahlen die Rede ist, so werden darunter jedesmal ganze Zahlen, oder auch Brüche, die sich genau angeben lassen, verstanden, dergleichen z. B. die Quadratwurzel aus 16, aus 25 und aus $13\frac{4}{9}$ ist.

---

## XIII. Capitel.

## Von den aus eben dieser Quelle entspringenden unmöglichen oder imaginären Zahlen.

§. 139.

Wir haben schon oben (§. 122) gesehen, daß die Quadrate sowohl der positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus heraus kommen; indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben sowohl $+aa$ giebt, als wenn man $+a$ mit $+a$ mutiplicirt. Und daher sind in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadratwurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen worden.

§. 140.

## §. 140.

Wenn daher aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel gezogen werden soll, so ist man allerdings in einer großen Verlegenheit, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine negative Zahl wäre. Denn wenn man z. B. die Quadratwurzel von der Zahl — 4 verlangt, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt — 4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist aber weder + 2 noch — 2, indem sowohl + 2 als — 2, mit sich selbst multiplicirt allemal + 4 giebt, und nicht — 4.

## §. 141.

Hieraus erkennt man also, daß die Quadratwurzel von einer negativen Zahl weder eine positive, noch negative Zahl seyn könne, weil auch von allen negativen Zahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen + bekommen; folglich muß die verlangte Wurzel von einer ganz besondern Art seyn, indem dieselbe weder zu den positiven, noch negativen Zahlen gerechnet werden kann.

## §. 142.

Da nun oben (§. 19) schon angemerkt ist, daß die positiven Zahlen alle größer sind, als nichts oder 0: die negativen Zahlen hingegen alle kleiner, als nichts, oder 0; also, daß alles, was größer ist als nichts, durch positive Zahlen; hingegen alles, was kleiner ist als nichts, durch negative Zahlen ausgedrückt wird: so sieht man, daß die Quadratwurzel aus negativen Zahlen weder größer noch kleiner als nichts sind. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil 0 mit 0 multiplicirt 0, und also keine negative Zahl giebt.

§. 143.

Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als 0, oder 0 selbst sind; so ist klar, daß die Quadratwurzel von negativen Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen gerechnet werden kann. Folglich muß man behaupten, daß sie unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung statt finden.

§. 144.

Daher bedeuten alle diese Ausdrücke: $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, u. s. f. solche unmögliche oder imaginäre Zahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von negativen Zahlen angezeigt werden.

Von diesen kann man also mit allem Recht behaupten, daß sie weder größer noch kleiner als nichts, und auch nicht einmal nichts selbst sind, folglich müssen sie aus diesem Grunde für unmöglich gehalten werden.

§. 145.

Gleichwohl aber stellen sie sich unserm Verstande dar, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch bloß eingebildete Zahlen genannt werden. Ungeachtet aber diese Zahlen, als z. B. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, so haben wir doch davon einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbst multiplicirt, zum Product $-4$ hervorbringe; und dieser Begriff

ist

ist hinreichend, um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.

## §. 146.

Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen unmöglichen Zahlen, als z. B. von $\sqrt{-3}$, wissen, besteht darin, daß das Quadrat davon, oder das Product, welches herauskommt, wenn $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, $-3$ giebt. Eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$, mult. $-1$. Und überhaupt, wenn man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt, oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

## §. 147.

Da $-a$ so viel ist, als $+a$ mit $-1$ multiplicirt, und die Quadratwurzel aus einem Product gefunden wird, wenn man die Quadratwurzeln aus den Factoren mit einander multiplicirt (§. 121), so ist die Wurzel aus $a$ mal $-1$ oder $\sqrt{-a}$ so viel, als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich das Unmögliche, welches darin vorkommt, allezeit auf $\sqrt{-1}$ bringen. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt: $\sqrt{4}$ aber ist $2$, also ist $\sqrt{-4}$ so viel als $2\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-9}$ so viel als $\sqrt{9}$ mal $\sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-16}$ so viel als $4\sqrt{-1}$.

## §. 148.

Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt, $\sqrt{6}$ geben. Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt $\sqrt{4}$, das ist $2$ geben. Hieraus sieht man, daß zwey unmögliche Zahlen mit ein-

einander multiplicirt, eine mögliche oder wirkliche Zahl hervorbringen.

Wenn aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$, multiplicirt wird, so bekommt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt allezeit etwas unmögliches.

Zusatz. $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = \sqrt{-a.-b} = \sqrt{ab}$; welches auch so bewiesen werden kann:

$\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}.\sqrt{b}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{ab}.-1 = -1.\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$. Vorhin fanden wir $\sqrt{ab}$, und es kann einen Anfänger sehr ungewiß machen, welches von beyden Resultaten er als richtig anerkennen soll, da doch nur eines davon richtig seyn kann. Folgende Betrachtung wird ihm darüber allen Zweifel benehmen.

$\sqrt{ab}$ kann sowohl positiv als negativ seyn (§. 122). Es frägt sich also nur, welcher Fall hier statt finden muß, und dieses entscheidet der zweyte Beweis, der ganz bestimmt $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$ giebt, welches allerdings eine mögliche Größe ist.

$\sqrt{-a}.\sqrt{b} = \sqrt{-ab} = \sqrt{-1.ab} = \sqrt{ab}.\sqrt{-1}$ oder auch so:
$\sqrt{-a}.\sqrt{b} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}.\sqrt{-1}$, welches eine unmögliche Größe ist.

## §. 149.

Eben so verhält es sich auch mit der Division. Denn da $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt $\sqrt{+4}$ geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt wird geben $\sqrt{-1}$: Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ das ist $\sqrt{-1}$, weil 1 soviel ist, als $\sqrt{+1}$.

Zusatz. Da $(\pm\sqrt{-1})\cdot(\pm\sqrt{-1}) = -1$, so ist

$$(\mp\sqrt{-1})\cdot(\pm\sqrt{-1}) = +1,$$

also $\mp\sqrt{-1} = \frac{1}{\pm\sqrt{-1}}$

woraus man deutlich sieht, daß

$$\frac{1}{+\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$$

und $\frac{1}{-\sqrt{-1}} = +\sqrt{-1}$

Wer nun bloß $\sqrt{-1}$ schreibt, will offenbar dadurch anzeigen, daß er diese Wurzel positiv nimmt, daher ist es bey Euler falsch, wenn $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$ gesetzt wird.

Es erhellet auch schon sehr leicht aus folgenden Schlüssen:

$$\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = -1,$$

folglich $\sqrt{-1} = \frac{-1}{\sqrt{-1}}$ oder $-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$

Euler schließt so:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{+1}{-1}} = \sqrt{-1}$$

Aber bey diesen Schlüssen bleibt man ungewiß, ob die Wurzel positiv oder negativ genommen werden muß, indem Euler mit eben dem Rechte die $\sqrt{+1} = -1$ nehmen könnte.

Anfänger mögen aus diesen Erinnerungen sehen, daß sie selbst die Schriften eines so großen Mathematikers, wie Euler war, mit Vorsicht lesen müssen.

$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\,.\,\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Mehrere Exempel zur Uebung werden unten vorkommen.

## §. 150.

Wie aber jene Anmerkung (§. 122) allezeit statt findet, daß die Quadratwurzel aus einer jeden Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder sowohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z. B. $\sqrt{4}$ sowohl $+2$ als $-2$ ist, und überhaupt für die Quadratwurzel aus a sowohl $+\sqrt{a}$ als $-$

$\sqrt{a}$,

$\sqrt{}a$, geschrieben werden kann, so gilt dies auch bey den unmöglichen Zahlen; und die Quadratwurzel aus $-a$ ist sowohl $+\sqrt{}-a$, als $-\sqrt{}-a$, wobey man die Zeichen $+$ und $-$ welche vor dem $\sqrt{}$ Zeichen gesetzt werden, von dem Zeichen, welches hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

§. 151.

Endlich muß noch der Zweifel gehoben werden, daß, da dergleichen Zahlen unmöglich sind, dieselben auch ganz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein sie ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem oft Fragen vorkommen, von welchen man sogleich nicht wissen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wenn nun ihre Auflösung auf solche unmögliche Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst unmöglich sey. Um dieses mit einem Beispiel zu erläutern, so wollen wir folgende Frage betrachten: man soll die Zahl 12 in zwey solche Theile zerlegen, deren Product 40 ausmache; wenn man nun diese Frage nach den Regeln auflöset, so findet man für die zwey gesuchten Theile $6+\sqrt{}-4$, und $6-\sqrt{}-4$, welche folglich unmöglich sind, und hieraus eben erkennt man, daß diese Frage sich durchaus nicht auflösen läßt. Wollte man aber die Zahl 12 in zwey solche Theile zerfällen, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.