Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XV. Capitel. Von den Cubicwurzeln und den daher entspringenden Jrrationalzahlen.

27 ist, mit dem Cubus von 4, nehmlich 64, und so bekommt man 1728, und dieses ist der Cubus von 12. Hieraus ist ferner klar, daß der Cubus von 2 a ist 8aaa, und also 8 mal größer, als der Cubus von a; eben so ist von 3 a der Cubus 27aaa, und also 27 mal größer, als der Cubus von a.

§. 157.

Betrachtet man nun auch hier die Zeichen + und —, so ist für sich klar, daß von einer positiven Zahl + a der Cubus + a a a und folglich auch positiv seyn müsse. Wenn aber von einer negativen Zahl, als — a, der Cubus genommen werden soll, so nehme man erstlich das Quadrat, welches ist + aa, und, da solches nochmals mit — a multiplicirt werden soll, so wird der gesuchte Cubus — aaa und folglich auch negativ seyn. Daher es mit den Cubis eine ganz andere Bewandniß hat als mit den Quadraten, welche allezeit positiv herauskommen. Also ist von — 1, der Cubus — 1, von — 2, der Cubus — 8; von — 3, ist er — 27, u. s. f.

XV. Capitel.

Von den Cubicwurzeln und den daher entspringenden Irrationalzahlen.

§. 158.

Da vorher gezeigt worden, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden werden soll, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche dreymal mit sich selbst multiplitiplicirt dieselbe Zahl hervorbringet: und diese wird in Ansehung jener ihre **Cubicwurzel** genannt. Also ist die Cubicwurzel aus einer gegebenen Zahl eine solche Zahl, deren Cubus der gegebenen Zahl gleich ist.

§. 159.

Wenn also die gegebene Zahl eine wirkliche Cubiczahl ist, dergleichen im obigen Capitel gefunden, so ist es leicht, die Cubicwurzel davon zu finden. Also ist von 1 die Cubicwurzel 1; von 8 ist sie 2; von 27 ist sie 3; von 64 ist sie 4, u. s. w.

Eben so ist auch von — 27 die Cubicwurzel — 3; von — 125 ist sie — 5. Wenn die Zahl gebrochen ist, so ist von $\frac{8}{27}$ die Cubicwurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner wenn es eine vermischte Zahl ist, als $2\frac{10}{27}$, welche in einem einzelnen Bruch $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubicwurzel davon $\frac{4}{3}$, das ist $1\frac{1}{3}$.

§. 160.

Wenn aber die gegebene Zahl kein wirklicher Cubus ist, so läßt sich auch die Cubicwurzel davon weder durch ganze noch gebrochene Zahlen ausdrücken. Also da 43 keine Cubiczahl ist, so kann unmöglich weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen eine Zahl angezeigt werden, deren Cubus genau 43 ausmache. Inzwischen aber ist doch so viel bekannt, daß die Cubicwurzel davon größer sey, als 3, weil der Cubus davon nur 27 ausmacht, und doch kleiner als 4, weil der Cubus davon schon 64 ist. Folglich muß die verlangte Cubicwurzel zwischen den Zahlen 3 und 4 enthalten seyn.

§. 161.

Wollte man nun zu 3, weil die Cubicwurzel aus 43 größer ist als 3, noch einen Bruch hinzusetzen,

setzen, so könnte man der Wahrheit zwar näher kommen, da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so kann derselbe niemals genau 43 werden. Man setze z. B. die gesuchte Cubicwurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$, so würde der Cubus davon seyn $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43.

§. 162.

Dies beweiset also deutlich, daß sich die Cubicwurzel aus 43 auf keinerley Weise durch ganze Zahlen und Brüche ausdrücken lasse; da wir aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben haben, so bedient man sich, um dieselbe anzuzeigen, des bey den Quadratwurzeln üblichen Zeichens, in welches man aber, um die Cubicwurzel von der Quadratwurzel zu unterscheiden, die Ziffer 3 zu setzen pflegt. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$ die Cubicwurzel von 43, das heißt, eine solche Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche dreymal mit sich selbst multiplicirt, 43 giebt.

Anmerk. Die Ursache, warum man eine 3 in das Wurzelzeichen setzt, wenn man dadurch Cubicwurzeln anzeigen will, ist die, weil man die Cubiczahlen als Producte von 3 gleichen Factoren betrachten kann; denn von a ist der Cubus aaa.

§. 163.

Man kann also dergleichen Ausdrücke durchaus nicht zu den Rationalzahlen rechnen, sondern muß sie als eine besondere Art von Irrationalgrößen darstellen. Sie haben auch mit den Quadratwurzeln keine Gemeinschaft, und es ist nicht möglich, eine solche Cubicwurzel durch eine Quadratwurzel, als etwa $\sqrt{12}$ auszudrücken: denn da von $\sqrt{12}$, das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$, also noch irrational, folglich kann derselbe nicht 43 seyn.

§. 164.

Ist aber die gegebene Zahl ein wirklicher Cubus, so werden diese Ausdrücke rational, also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt[3]{aaa}$ so viel als a.

§. 165.

Sollte man eine Cubicwurzel, als $\sqrt[3]{a}$, mit einer andern multipliciren, als mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; denn wir wissen, daß die Cubicwurzel aus einem Product ab gefunden wird, wenn man die Cubicwurzeln aus den Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wenn $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotient $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

§. 166.

Daher läßt sich einsehen, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 gleich ist $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Also auch umgekehrt, wenn die Zahl hinter dem Zeichen einen Factor hat, der ein Cubus ist, so kann die Cubicwurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden. Also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folgt, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 gleich 8.2 ist.

§. 167.

Ist die gegebene Zahl negativ, so hat die Cubicwurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadratwurzeln; weil nehmlich die Cubi von negativen Zahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubicwurzeln aus negativen Zahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als -2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$, und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen (—), welches hinter dem Cubicwurzelzeichen steht, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also wird man hier auf keine unmögliche oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadratwurzeln der negativen Zahlen.

XVI. Capitel.

Von den Dignitäten oder Potenzen überhaupt.

§. 101.

Wenn eine Zahl mehrmal mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product eine Dignität oder Potenz, zuweilen auch eine Potestät genannt. Im Deutschen könnte man diesen Namen durch Macht ausdrücken. Da nun ein Quadrat entsteht, wenn eine Zahl zweymal, und ein Cubus, wenn die Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt wird, so sind sowohl die Quadrate, als die Cubi, unter dem Namen der Potenzen oder Dignitäten begriffen.