Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XVI. Capitel. Von den Dignitäten oder Potenzen überhaupt.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

§. 167.

Ist die gegebene Zahl negativ, so hat die Cubicwurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadratwurzeln; weil nehmlich die Cubi von negativen Zahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubicwurzeln aus negativen Zahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als -2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$, und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen ($-$), welches hinter dem Cubicwurzelzeichen steht, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also wird man hier auf keine unmögliche oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadratwurzeln der negativen Zahlen.

XVI. Capitel.

Von den Dignitäten oder Potenzen überhaupt.

§. 101.

Wenn eine Zahl mehrmal mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product eine Dignität oder Potenz, zuweilen auch eine Potestät genannt. Im Deutschen könnte man diesen Namen durch Macht ausdrücken. Da nun ein Quadrat entsteht, wenn eine Zahl zweymal, und ein Cubus, wenn die Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt wird, so sind sowohl die Quadrate, als die Cubi, unter dem Namen der Potenzen oder Dignitäten begriffen.

Anmerk. Für Potenz oder Dignität die deutschen Wörter Macht oder Würde zu gebrauchen, ist zwar von einigen neuern Schriftstellern versucht, aber durchaus abzurathen. Dieses gilt fast von allen neueingeführten mathematischen Kunstwörtern.

§. 169.

Diese Potenzen werden nach der Anzahl, wie vielmal eine Zahl mit sich selbst multiplicirt worden, von einander unterschieden. Also wenn eine Zahl zweymal mit sich selbst multiplicirt wird, so heißt das Product ihre zweyte Potenz, welche demnach eben so viel ist, als das Quadrat davon; wird eine Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potenz, welche also einerley Bedeutung mit dem Cubus hat: wird ferner eine Zahl viermal mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potenz genannt, welche man gewöhnlich mit dem Namen des Biquadrats belegt: und hieraus ergiebt sich ferner von selbst, was die fünfte, sechste, siebente Potenz einer Zahl bedeute; welche höhere Potenzen übrigens mit keinem besondern Namen bezeichnet werden.

§. 170.

Um dieses besser zu erläutern, so muß man bemerken, erstlich, daß von der Zahl 1 alle Potenzen immer 1 bleiben; weil, so vielmal man auch 1 mit sich selbst multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Wir wollen daher die Potenzen der Zahl 2 sowohl als der Zahl 3 nach ihrer Ordnung herschreiben. Sie gehen folgendermaßen fort:

Potenzen.	der Zahl 2.	der Zahl 3.
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Vorzüglich merkwürdig sind die Potenzen der Zahl 10, nehmlich

I. II. III. IV. V. VI.
10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000,

weil sich darauf unsere ganze Rechenkunst gründet. Uebrigens ist zu merken, daß die über die Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w. gesetzten römischen Ziffern andeuten, die wievielste Potenz von 10 eine jede dieser Zahlen sey.

§. 171.

Will man die Sache auf eine allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potenzen der Zahl a folgendergestalt verhalten.

I. II. III. IV. V. VI.
a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, u. s. w.

Diese Art zu schreiben hat aber die Unbequemlichkeit, daß, wenn sehr hohe Potenzen geschrieben werden sollen, man eben denselben Buchstaben vielmal hinschreiben müßte, und es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, um zu wissen, die wievielste Potenz dadurch angezeigt werde. Also z. B. würde sich die hundertste Potenz auf diese Art schwerlich schreiben lassen, und noch viel weniger zu erkennen seyn.

§. 172.

Um dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit bequemere Art, solche Potenzen auszudrücken, eingeführt, die daher auf das sorgfältigste erklärt zu werden verdient. Man pflegt nemlich über der Zahl, wovon z. B. die hundertste Potenz angezeigt werden soll, etwas seitwärts zur Rechten die Zahl 100 zu schreiben: also a^{100}, welches ausgesprochen wird, a erhoben zu Hundert. Die oben dabey geschriebene Zahl, als in unserm Fall 100, wird der Exponent der Potenz genannt, welcher Name wohl zu merken ist.

§. 173.

Nach dieser Art deutet also a^2, oder a erhoben zu 2, die zweyte Potenz von a an, und pflegt auch bisweilen anstatt aa geschrieben zu werden; weil beyde Arten gleich leicht zu schreiben und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potenz aaa, nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potenz, a^5 die fünfte, und a^6 die sechste Potenz von a aus, u. s. w.

Anmerk. Da $a^2 = a.a = 1.a.a$; $a^3 = 1.a.a.a$; $a^4 = 1.a.a.a.a$, u. s. f. ist; und überhaupt $a^m = a.a.a \cdots a = 1.a.a.a. \cdots a$ seyn muß, wo a *m* mal vor-

vorkömmt; so bedeutet der Exponent m jeder mten Potenz von a nichts anders, als daß die Einheit so oft mit der Zahl a multiplicirt ist, als m Einheiten enthält, oder daß die Zahl a so vielmal mit sich selbst multiplicirt ist, als der Exponent weniger Eins anzeigt, voraus gesetzt, daß m eine ganze positive Zahl bedeutet.

§. 174.

Nach dieser Art werden alle Potenzen von der Zahl a folgendergestalt vorgestellt,

$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ a^9,\ a^{10},\ a^{11},\ a^{12}$, u. s. f.

woraus man sieht, daß für das erste Glied a füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augen fallen zu machen. Daher ist a^1 nichts anders als a, weil die Einheit anzeigt, daß der Buchstabe a nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potenzen heißt eine geometrische Progression, weil immer ein jedes Glied gleich vielmal größer ist, alsdas vorhergehende.

§. 175.

Wie in dieser Reihe der Potenzen ein jedes Glied gefunden wird, wenn man das vorhergehende mit a multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird; so wird auch aus einem jeglichen Gliede das vorhergehende gefunden, wenn man jenes durch a dividirt, als wodurch der Exponent um eins vermindert wird. Hieraus sieht man, daß das dem ersten Glied a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ seyn müsse, das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe a^0 seyn, woraus diese merkwürdige Eigenschaft folgt, daß a^0 allezeit 1 seyn müsse, die Zahl a mag auch so groß oder so klein seyn, als sie immer will, ja so gar auch, wenn a nichts ist, also daß 0^0 gewiß 1 ausmacht.

§. 176.

Diese Reihe von Potenzen läßt sich noch weiter rückwärts fortsetzen, und zwar auf eine doppelte Weise. Einmal, indem immer das Glied durch a getheilt wird; hernach aber auch, indem man den Exponenten um eins vermindert oder eins davon subtrahirt. Und es ist gewiß, daß nach beyden Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese doppelte Art rückwärts vorstellen, welche auch rückwärts von der Rechten zur Linken gelesen werden muß:

1ste	$\frac{1}{aaaaaa}$ $\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{aaaaa}$ $\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{aaaa}$ $\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{aaa}$ $\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{aa}$ $\frac{1}{a_2}$	$\frac{1}{a}$ $\frac{1}{a^1}$	1	a
2te	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

§. 177.

Hierdurch lernt man also solche Potenzen kennen, deren Exponenten negative Zahlen sind; und man ist im Stande den Werth derselben genau anzuzeigen. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, folgendergestalt vor Augen legen:

Erstlich a^0, ist so viel als 1.

— a^{-1} — — $\frac{1}{a}$

— a^{-2} — — $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$

— a^{-3} — — $\frac{1}{a^3}$

— a^{-4} — — $\frac{1}{a^4}$ u. s. f.

Anmer-

Anmerk. Die Einheit *m* mal mit a multipliciren, und sie *m* mal mit a dividiren, sind entgegengesetzte Bedingungen: also ist auch $\frac{1}{aaa\ldots a}$ das Entgegengesetzte von 1. a. a. a - - - - a, wenn bey jeder für sich genommenen Beziehung a *m* mal vorkömmt. So wie daher 1. a. a. a - - - a durch a^m angezeigt wird, eben so kann man $\frac{1}{a.a.a\ldots a} = \frac{1}{a^m}$ mit Recht durch a^{-m} anzeigen. Bey einer Bezeichnung, wie a^{-m}, müßte nemlich der Exponent $-m$ durch seine Einheiten anzeigen, wie oft Eins mit a dividirt ist, also gerade das Entgegengesetzte von a^m.

Zwischen $+1$ und -1 liegt 0: da nun bey a^1 oder a die Einheit einmal mit a multiplicirt, und bey $a^{-1} = \frac{1}{a}$ dieselbe mit a dividirt ist, so muß bey a^0 die Einheit mit a weder multiplicirt noch dividirt, sondern ungeändert gelassen werden, das heißt: wenn man sich bey a^0 durch 0 einen Exponenten, und durch a^0 eine Potenz von a denken will, so muß man allemal $a^0 = 1$ setzen.

§. 178.

Hieraus ist auch klar, wie die Potenzen von einem Product, als ab, gefunden werden müssen. Diese sind nemlich:

ab oder a^1b^1, a^2b_2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6, u. s. f.

Eben so werden auch die Potenzen von Brüchen gefunden, als von dem Bruch $\frac{a}{b}$ sind die Potenzen folgende:

$$\frac{a^1}{b^1},\ \frac{a^2}{b^2},\ \frac{a^3}{b^3},\ \frac{a^4}{b^4},\ \frac{a^5}{b^5},\ \frac{a^6}{b^6},\ \frac{a^7}{b^7},\ \text{u. s. f.}$$

§. 179.

Endlich kommen auch noch hier die Potenzen von negativen Zahlen vor. Es sey demnach gegeben die negative Zahl $-a$, so werden ihre Potenzen der Ordnung nach also auf einander folgen:

$-a, +a^2, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6, -a^7$ u. s. f.

woraus erhellet, daß nur diejenigen Potenzen, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; hingegen sind diejenigen Potenzen, deren Exponenten gerade sind, alle positiv. Also müssen die dritte, fünfte, siebente, neunte Potenz der negativen Zahlen alle das Zeichen — haben.

Die zweyte, vierte, sechste, achte Potenz hingegen alle das Zeichen +.

XVII. Capitel.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

§. 180.

Bey der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemerken, indem verschiedene Potenzen nur mit dem Zeichen + und — verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summe von der dritten und zweyten Potenz der Zahl a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wenn von der fünften Potenz die vierte abgezogen wird, und beydes läßt sich nicht kürzer ausdrücken. Wenn aber gleiche Potenzen vorkommen, so ergiebt sich, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$ u. s. f.

§. 181.

Bey der Multiplication solcher Potenzen aber kommt verschiedenes zu bemerken vor. Erstlich, wenn eine jede Potenz von a mit der Zahl a selbst multiplicirt werden soll, so kommt die folgende Potenz heraus, deren Exponent um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt, giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt, giebt a^4 u. s. f. Eben so mit denjenigen, deren