Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XVII. Capitel. Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

woraus erhellet, daß nur diejenigen Potenzen, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; hingegen sind diejenigen Potenzen, deren Exponenten gerade sind, alle positiv. Also müssen die dritte, fünfte, siebente, neunte Potenz der negativen Zahlen alle das Zeichen — haben.

Die zweyte, vierte, sechste, achte Potenz hingegen alle das Zeichen +.

XVII. Capitel.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

§. 180.

Bey der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemerken, indem verschiedene Potenzen nur mit dem Zeichen + und — verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summe von der dritten und zweyten Potenz der Zahl a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wenn von der fünften Potenz die vierte abgezogen wird, und beydes läßt sich nicht kürzer ausdrücken. Wenn aber gleiche Potenzen vorkommen, so ergiebt sich, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$ u. s. f.

§. 181.

Bey der Multiplication solcher Potenzen aber kommt verschiedenes zu bemerken vor. Erstlich, wenn eine jede Potenz von a mit der Zahl a selbst multiplicirt werden soll, so kommt die folgende Potenz heraus, deren Exponent um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt, giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt, giebt a^4 u. s. f. Eben so mit denjenigen, deren

ren Exponenten negativ sind, wenn diese mit a multiplicirt werden sollen, darf man nur zu dem Exponenten 1 addiren. Also a^{-2} mit a multiplicirt, giebt a^{0}, das ist 1, welches daraus erhellet, weil a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ (§. 176) ist, welches mit a multiplicirt, $\frac{a}{a}$ giebt, das ist 1. Eben so a^{-2}, wenn solches mit a multiplicirt werden soll, giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt, giebt a^{-9}, u. s. f.

§. 182.

Wenn aber eine Potenz mit aa, oder mit der zweyten Potenz multiplicirt werden soll, so wird der Exponent um 2 größer; also a^2 mit a^2 multiplicirt, giebt a^4, und a^3 mit a^2 multiplicirt, giebt a^5; ferner a^4 mit a multiplicirt, giebt a^6, und überhaupt a^n mit a^2 multiplicirt, giebt a^{n+2}. Eben so mit negativen Exponenten, als a^{-1} mit a^2 multiplicirt, giebt a^1, das ist a, welches sich daraus ergiebt, weil a^{-1} ist $\frac{1}{a}$, dieses mit aa multiplicirt, giebt $\frac{aa}{a}$, das ist a. Eben so giebt a^{-2} mit a^2 multiplicirt, a^0, das ist 1, ferner a^{-3} mit a^2 multiplicirt, giebt a^{-1}.

§. 183.

Eben so beweiset man, daß, wenn eine jede Potenz der Wurzel a mit der dritten Potenz von a, oder mit a^3 multiplicirt werden soll, der Exponent derselben um 3 vermehrt werden müsse; oder a^n mit a^3 multiplicirt, giebt a^{n+3}. Und überhaupt, wenn zwey Potenzen von a mit einander multiplicirt werden sollen, so ist das Product wieder eine Potenz von a, deren Exponent die Summe von jenen Exponenten ist. Also a^4 mit a^5 multiplicirt, giebt a^9,

und

und a^{12} mit a^7 multiplicirt, giebt a^{19}, oder a^n mit a^m multiplicirt, giebt a^{n+m}.

§. 184.

Aus diesem Grunde können die hohen Potenzen von bestimmten Zahlen ziemlich leicht gefunden werden; wenn man z. B. die 24ste Potenz von 2 haben wollte, so würde man dieselbe finden, wenn man die 12te Potenz mit der 12ten Potenz multiplicirte, weil 2^{24} so viel ist, als 2^{12} mit 2^{12} multiplicirt. Nun aber ist 2^{12}, wie wir oben gesehen haben, 4096: daher multiplicirt man 4096 mit 4096, so wird das Product 16777216 die verlangte Potenz, nemlich 2^{24} anzeigen.

§. 185.

Bey der Division ist folgendes zu merken. Erstlich wenn eine Potenz von a durch a dividirt werden soll, so wird ihr Exponent um 1 kleiner, oder man muß 1 davon subtrahiren. Also a^5 durch a dividirt, giebt a^4, und a^0, das ist 1, durch a dividirt, giebt a^{-1} oder $\frac{1}{a}$. Ferner a^{-3} durch a dividirt, giebt a^{-4}.

§. 186.

Wenn aber eine Potenz von a durch a^2 dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten derselben 2 abziehen, und wollte man dieselbe durch a^3 dividiren, so müßte man von ihrem Exponenten 3 abziehen. Also überhaupt, was für eine Potenz auch immer von a durch eine andere dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten der erstern den Exponenten der andern subtrahiren. Also a^{15} durch a^7 dividirt, giebt a^8, und a^6 durch a^7 dividirt, giebt a^{-1}. Ferner auch a^{-3} durch a^4 dividirt, giebt a^{-7}.

§. 187.

Hieraus ist leicht zu begreifen, wie Potenzen von Potenzen gefunden werden müssen, weil solches durch die Multiplication geschieht. Also wenn man die zweyte Potenz oder das Quadrat von a^3 verlangt, so ist dasselbe a^6, und die dritte Potenz, oder der Cubus von a^4 wird seyn a^{12}; woraus erhellet, daß, um das Quadrat einer Potenz zu finden, man den Exponenten derselben nur zu verdoppeln brauche. Also von a^n ist das Quadrat a^{2n}, und der Cubus oder die dritte Potenz von a^n wird seyn a^{3n}. Eben so wird auch die siebente Potenz von a^n gefunden a^{7n}, u. s. f.

§. 188.

Das Quadrat von a^2 ist a^4, das ist die vierte Potenz von a, welche daher das Quadrat des Quadrats ist. Hieraus erhellet, warum man die vierte Potenz ein Biquadrat oder auch ein Quadratoquadrat nennet.

Weil ferner von a^3 das Quadrat a^6 ist, so pflegt man auch die sechste Potenz einen Quadrato-Cubus zu nennen.

Endlich, weil der Cubus von a^3 ist a^9, das ist die neunte Potenz von a, so pflegt dieselbe deswegen auch ein Cubocubus genannt zu werden. Mehrere Namen sind heut zu Tage nicht üblich.

Anmerk. Die Rechenmeister drücken sich in der Potenzenrechnung sehr unbequem aus, ihre sehr zusammengesetzten Benennungen und Beziehungen sind jetzo nur als Antiquität merkwürdig. Man findet solche noch in Martini getreuem arithmetischen Wegweiser. Berlin 1741, 494 S. und in Marpurg Progressionalcalcul, Berlin 1774. 40 S.

XVIII. Ca-