Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XIX. Capitel. Von der Bezeichnung der Jrrationalzahlen durch gebrochene Exponenten.

XIX. Capitel.

Von der Bezeichnung der Irrationalzahlen durch gebrochene Exponenten.

§. 195.

Wir haben oben im XVII. Capitel von den Rechnungsarten mit den Potenzen (§. 187) gezeigt, daß man das Quadrat von einer jeden Potenz finde, wenn man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweyte Potenz von a^n, a^{2n} sey. Daher ist hinwiederum von der Potenz a^{2n} die Quadratwurzel a^n, und wird folglich gefunden, wenn man den Exponenten derselben halbirt oder durch 2 dividirt.

§. 196.

Also ist von a^2 die Quadratwurzel a^1, von a^4 ist die Quadratwurzel a^2, und von a^6 ist die Quadratwurzel a^3, u. s. f. Weil nun dieses eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, wenn die Quadratwurzel von a^3 gefunden werden soll, daß dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ seyn werde. Eben so wird von a^5 die Quadratwurzel seyn $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbst oder von a^1 wird die Quadratwurzel seyn $a^{\frac{1}{2}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel sey als $\sqrt{a}$, welche neue Art die Quadratwurzel anzudeuten wohl zu bemerken ist.

§. 197.

Es ist ferner gezeigt, daß, um den Cubus von einer Potenz, als a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multipliciren müsse, und also der Cubus davon a^{3n} ist.

Wenn also rückwärts von der Potenz a^{3n} die dritte oder die Cubicwurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig, den Exponenten jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubicwurzel a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3, u. s. f.

§. 198.

Dieses muß nun auch wahr seyn, wenn sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubicwurzel seyn $a^{\frac{2}{3}}$. Und von a^4 ist dieselbe $a^{\frac{4}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbst, das ist von a^1, die Cubic- oder dritte Wurzel seyn $a^{\frac{1}{3}}$. Hieraus sieht man, daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel sey als $\sqrt[3]{a}$.

§. 199.

Eben so verhält es sich auch mit den höhern Wurzeln, und die vierte Wurzel von a wird seyn $a^{\frac{1}{4}}$, welches folglich eben so viel ist als $\sqrt[4]{a}$. Gleicher Weise wird die fünfte Wurzel von a seyn $a^{\frac{1}{5}}$, welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$, und dieses ist auch von allen höhern Wurzeln zu verstehen.

§. 200.

Man könnte nun also die schon längst eingeführten Wurzelzeichen gänzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen; allein da man einmal an jene Zeichen gewöhnt ist, und diese in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam, sie ganz abzuschaffen. Doch wird diese neue Art jetzt auch häufig gebraucht, weil sie die Natur der Sache deutlich in sich faßt. Denn

daß

daß $a^{\frac{1}{2}}$ wirklich die Quadratwurzel von a sey, sieht man gleich, wenn man nur das Quadrat davon nimmt, welches geschieht, wenn man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da denn offenbar herauskommt a^1, das ist a.

§. 201.

Hieraus ersieht man auch, wie alle übrige gebrochene Exponenten verstanden werden müssen; als wenn man $a^{\frac{4}{3}}$ hat, so muß von der Zahl a erstlich ihre vierte Potenz a^4 genommen, und hernach die Cubic- oder dritte Wurzel gezogen werden, also daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gemeinen Art $\sqrt[3]{a^4}$. Eben so wird der Werth von $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wenn man erstlich den Cubus oder die dritte Potenz von a sucht, welche a^3 ist und hernach aus derselben die vierte Wurzel ziehet: so daß also $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist, als $\sqrt[4]{a^3}$. Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ eben so viel, als $\sqrt[5]{a^4}$ u. s. f.

Anmerk. Bey Potenzen, wie $a^{\frac{n}{m}}$ mit gebrochenen Exponenten, kann man sich die Sache auch so vorstellen: die gegebene Wurzel (a) soll in so viel gleiche Factoren zertheilt werden, als der Nenner oder Divisor (m) anzeigt, und von diesen gleichen Factoren soll man so viel behalten, als der Zähler oder der Dividendus (n) anzeigt. Z. B. $a^{\frac{2}{5}}$; hier stelle man sich vor, a sey = xxxxx, und von diesen 5 gleichen Factoren behält man nur 2, also xx, so hat man $a^{\frac{2}{5}}$.

Denn hier ist $x = \sqrt[5]{a}$, folglich $x^2 = (\sqrt[5]{a})^2 = \sqrt[5]{a}.\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}}$.

§. 202.

Wenn der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1, so läßt sich der Werth auch auf fol-

folgende Art bestimmen. Es sey gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches heraus kommt, wenn man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{a}$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{a}$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$, eben so viel als $a^3\sqrt[3]{a}$; und $a^{\frac{15}{4}}$, das ist $a^{3\frac{3}{4}}$, ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Aus diesem allen zeigt sich hinlänglich der herrliche Gebrauch der gebrochenen Exponenten.

§. 203.

Auch in Brüchen hat dies seinen großen Nutzen. Es sey z. B. gegeben $\frac{1}{\sqrt{a}}$, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Wir haben aber oben gesehen, daß ein solcher Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so wird $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ seyn $a^{-\frac{1}{3}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ wird verwandelt in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, woraus entspringet a^2, multiplicirt mit $a^{-\frac{3}{4}}$, welches ferner verwandelt wird in $a^{\frac{5}{4}}$, das ist $a^{1\frac{1}{4}}$, und das ist ferner $a\sqrt[4]{a}$. Dergleichen Reductionen werden durch Uebung gar merklich erleichtert.

§. 204.

Endlich ist noch zu merken, daß eine jede solche Wurzel auf vielerley Art kann vorgestellt werden. Denn da $\sqrt{a}$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, u. s. f. verwandelt werden kann; so ist klar, daß $\sqrt{a}$ so viel ist als $\sqrt[4]{a^2}$, imgleichen auch $\sqrt[6]{a^3}$ und $\sqrt[8]{a^4}$ u. s. f. Eben

so

so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$, oder $\sqrt[9]{a^3}$, oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzelzeichen ausgedrückt werden könne:

$$\sqrt[2]{a^2}, \text{ oder } \sqrt[3]{a^3}, \text{ oder } \sqrt[4]{a^4}, \text{ oder } \sqrt[5]{a^5}, \text{ u. s. f.}$$

§. 205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. B. wenn $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. So bekommt man gleiche Wurzelzeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daraus erhellet, weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt, $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ giebt. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$, und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Sollte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

XX. Capitel.

Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung überhaupt.

§. 206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungsarten, als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potenzen, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.