Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XX. Capitel. Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung überhaupt.

so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$, oder $\sqrt[9]{a^3}$, oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzelzeichen ausgedrückt werden könne:

$\sqrt[2]{a^2}$, oder $\sqrt[3]{a^3}$, oder $\sqrt[4]{a^4}$, oder $\sqrt[5]{a^5}$, u. s. f.

§. 205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. B. wenn $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. So bekommt man gleiche Wurzelzeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daraus erhellet, weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt, $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ giebt. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$, und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Sollte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

XX. Capitel.

Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung überhaupt.

§. 206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungsarten, als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potenzen, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.

Daher wird es zur bessern Erläuterung dienen, wenn wir den Ursprung dieser Rechnungsarten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man daraus schließen könne, ob noch andere dergleichen Arten möglich sind oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redensart, ist so viel als, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun =, und wird ausgesprochen, ist gleich. Also wenn geschrieben wird $a=b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sey als b, oder daß a dem b gleich sey; also ist z. B. $3 . 5 = 15$.

§. 207.

Die erste Rechnungsart, welche sich unserm Verstand darstellt, ist unstreitig die Addition, durch welche zwey Zahlen zusammen addirt, oder die Summe derselben gefunden werden soll. Es seyen demnach a und b die zwey gegebenen Zahlen und ihre Summe werde durch den Buchstaben c angedeutet, so hat man $a + b = c$. Also wenn die beyden Zahlen a und b bekannt sind, so lehrt die Addition, wie man daraus die Zahl c finden soll.

§. 208.

Man behalte diese Vergleichung $a+b = c$, kehre aber jetzt die Frage um, und frage, wenn die Zahlen a und c bekannt sind, wie man die Zahl b finden soll.

Man frägt also, was man für eine Zahl zu der Zahl a addiren müsse, damit die Zahl c herauskomme. Es sey z. B. $a = 3$ und $c = 8$, also daß $3 + b = 8$ seyn müßte, so ist klar, daß b gefunden wird, wenn man 3 von 8 subtrahirt. Ueberhaupt also, um b zu finden, so muß man a von c subtrahiren

hiren und da wird $b = c - a$. Denn wenn a dazu addirt wird, so bekommt man $c - a + a$, das ist c.

Hierin besteht also der Ursprung der Subtraction.

§. 209.

Die Subtraction entsteht also, wenn die Frage, welche bey der Addition vorkommt, umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl, welche abgezogen werden soll, größer ist, als diejenige, von der sie abgezogen werden soll: als wenn z. B. 9 von 5 abgezogen werden sollte; so erhalten wir daher den Begriff von einer neuen Art Zahlen, welche negativ genannt werden, weil $5 - 9 = - 4$.

§. 210.

Wenn viele Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so wird ihre Summe durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdenn das Product. Also bedeutet ab das Product, welches entsteht, wenn die Zahl a mit der Zahl b multiplicirt wird. Wenn wir nun dieses Product mit dem Buchstaben c andeuten, so haben wir $ab = c$, und die Multiplication lehrt, wenn die Zahlen a und b bekannt sind, wie man daraus die Zahl c finden solle.

§. 211.

Man werfe nun folgende Frage auf: wenn die Zahlen c und a bekannt sind, wie soll man daraus die Zahl b finden? Es sey z. B. $a = 3$ und $c = 15$, so daß $3b = 15$, und es werde gefragt, mit was für einer Zahl man 3 multipliciren müsse, damit 15 herauskomme? Dieses geschieht nun durch die Division und wird daher überhaupt die Zahl b gefunden, wenn man c durch a dividirt; woraus folglich diese Gleichung entsteht $b = \frac{c}{a}$.

§. 212.

Weil es sich nun oft zutragen kann, daß sich die Zahl c nicht wirklich durch die Zahl a theilen läßt, und gleichwohl der Buchstaben b einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche Brüche genannt werden. Also wenn wir annehmen $a = 4$, und $c = 3$, also daß $4b = 3$, so sieht man wohl, daß b keine ganze Zahl seyn kann, sondern ein Bruch ist, nemlich $b = \frac{3}{4}$.

§. 213.

Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden ist, wenn viele Zahlen, die addirt werden sollen, einander gleich waren, so wollen wir jetzt auch bey der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potenzen, welche auf eine allgemeine Art durch diese Form a^b vorgestellt werden, wodurch angezeigt wird, daß die Zahl a so viele mal mit sich selbst multiplicirt werden müsse, als die Zahl b anweiset. Hier wird, wie oben schon erklärt worden, a die Wurzel, b der Exponent und a^b die Potenz genannt.

§. 214.

Laßt uns nun diese Potenz selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$, worin also drey Buchstaben, a, b, c, vorkommen. Dieses vorausgesetzt, so wird in der Lehre von den Potenzen gezeiget, wie man, wenn die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potenz selbst,

selbst, das ist den Buchstaben c bestimmen soll. Es sey z. B. $a = 5$ und $b = 3$, also $c = 5^3$: woraus man sieht, daß von 5 die dritte Potenz genommen werden müsse, welche 125 ist; also wird $c = 125$.

Hier wird also gelehrt, wie man aus der Wurzel a und dem Exponenten b die Potenz c finden soll.

§. 215.

Wir wollen nun auch hier sehen, wie die Frage umgekehrt oder verändert werden kann, also daß aus zweyen von diesen dreyen Zahlen a, b, c, die dritte gefunden werden soll, welches auf zweyerley Art geschehen kann, indem nebst dem c, entweder a oder b, für bekannt angenommen wird. Wobey zu merken, daß in den obigen Fällen bey der Addition und Multiplication nur eine Veränderung statt findet, weil im ersten Fall, wo $a + b = c$, es gleich viel ist, ob man nebst dem c noch a oder b für bekannt annimmt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe $a + b$ oder $b + a$; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $ab = c$ oder $ba = c$, wo die Buchstaben a und b ebenfalls verwechselt werden können. Allein dieses findet nicht bey den Potenzen statt, indem für a^b keinesweges gesetzt werden kann b^a, welches aus einem einzigen Exempel leicht zu ersehen; wenn z. B. $a = 5$ und $b = 3$ gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr weit von 125 verschieden ist.

§. 216.

Hieraus ergiebt sich, daß hier wirklich noch zwey Fragen angestellt werden können, wovon die erste ist: **wenn nebst der Potenz c noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll?** Die zweyte

Frage aber ist: wenn nebst der Potenz c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll?

§. 217.

Im obigen ist nur die erste von diesen zwey Fragen erörtert worden, und zwar im 18ten Capitel in der Lehre von den Wurzeln u. s. w. Denn wenn man z. B. $b = 2$ und $a^2 = c$, so muß a eine solche Zahl seyn, deren Quadrat dem c gleich sey, und da wird $a = \sqrt{c}$. Eben so, wenn $b = 3$, so hat man $a^3 = c$; da muß also der Cubus von a der gegebenen Zahl c gleich seyn, und da erhält man $a = \sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf eine allgemeine Art verstehen, wie man aus den beyden Buchstaben c und b den Buchstaben a finden müsse. Es wird nemlich seyn $a = \sqrt[b]{c}$.

§. 218.

So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl c nicht wirklich eine solche Potenz ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben (§. 128) bemerkt worden, daß die verlangte Wurzel a weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational- oder surdische Zahlen genannt werden; von welchen es nach der Mannigfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns diese Betrachtung noch auf eine ganz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden.

§. 219.

§. 219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrig ist, nemlich, wenn außer der Potenz c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der ganzen Mathematik so groß ist, daß fast keine weitläufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, und dies wird uns wieder auf ganz neue Arten von Zahlen leiten, welche nicht einmal zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können.

XXI. Capitel.

Von den Logarithmen überhaupt.

§. 220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b = c$, und bemerken dabey ~~wir~~ zuerst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewisse Zahl nach Belieben festgestellet werde, also daß diese immer einen gleichen Werth behalte. Wenn nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potenz a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genannt, und um die Logarithmen anzuzeigen, pflegt man sich entweder der ersten Sylbe oder des ersten Buchstabens von diesem Worte zu bedienen. So schreibt man