Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XXI. Capitel. Von den Logarithmen überhaupt.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

§. 219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrig ist, nemlich, wenn außer der Potenz c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der ganzen Mathematik so groß ist, daß fast keine weitläufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, und dies wird uns wieder auf ganz neue Arten von Zahlen leiten, welche nicht einmal zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können.

XXI. Capitel.

Von den Logarithmen überhaupt.

§. 220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b = c$, und bemerken dabey ~~wir~~ zuerst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewisse Zahl nach Belieben festgestellet werde, also daß diese immer einen gleichen Werth behalte. Wenn nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potenz a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genannt, und um die Logarithmen anzuzeigen, pflegt man sich entweder der ersten Sylbe oder des ersten Buchstabens von diesem Worte zu bedienen. So schreibt
man

man z. B. b = log. c, oder b = lg. c; oder auch b = lc., und lieset: b ist der Logarithmus von c.

§. 221.

Nachdem also die Wurzel a einmal festgestellt worden, so ist der Logarithmus einer jeden Zahl c nichts anders, als der Exponent derjenigen Potenz von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$, so ist b der Logarithmus der Potenz a^b. Setzt man nun $b = 1$, so ist 1 der Logarithmus von a^1, das ist $\log. a = 1$: setzt man $b = 2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $\log. a^2 = 2$. Eben so wird man haben: $\log. a^3 = 3$, $\log. a^4 = 4$, $\log. a^5 = 5$ u. s. f.

1. Erklärung. Wenn eine Zahl a beständig einerley Werth behält, so kann man annehmen, daß sie zur x Potenz erhoben einer andern gegebenen Zahl gleich werde, wie der Ausdruck $a^x = c$. Sodann pflegt man den zu suchenden Exponenten x den Logarithmen von c, die Zahl a die Basis oder Grundzahl zu nennen.

Wird in dem Ausdrucke $a^x = c$ für c nach und nach eine andere Zahl gesetzt, so muß, wenn a einerley bleibt, der Exponent x, d. i. der Logarithme von c, verändert gefunden werden. Setzt man nun für c die auf einander folgenden natürlichen Zahlen, so wird sodann eine Reihe Logarithmen von diesen Zahlen entstehen. Eine solche Reihe von Logarithmen mit den dazu gehörigen Zahlen für einerley Grundzahl heißt ein logarithmisches System. Es kann demnach unzählich viele verschiedene logarithmische Systeme geben, weil man für die Grundzahl des Systems jede willkührliche Zahl annehmen kann.

2. Erklärung. Logarithmentafeln sind ein Buch, worin die Logarithmen einer Reihe von Zahlen für eine gewisse Basis berechnet worden sind. Bey den gewöhnlichen Logarithmentafeln, welche man auch Tabularlogarithmen oder nach dem Erfinder Briggs, briggische Logarithmen benennet, liegt die Basis 10 zum Grunde.

§. 222.

Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus seyn von a^0: nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $\log. 1 = 0$,

$1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will.

Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; also hat man $\log.\frac{1}{a} = -1$. Eben so bekommt man $\log.\frac{1}{a^2} = -2$, $\log.\frac{1}{a^3} = -3$, $\log.\frac{1}{a^4} = -4$ u. s. f.

§. 223.

Hieraus erhellet, wie die Logarithmen von allen Potenzen der Wurzel a und auch so gar von Brüchen, deren Zähler $= 1$, der Nenner aber eine Potenz von a ist, können angezeigt werden; in welchen Fällen die Logarithmen ganze Zahlen sind. Nimmt man aber für b Brüche an, so werden diese Logarithmen von Irrationalzahlen; wenn nemlich $b = \frac{1}{2}$, so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus von $a^{\frac{1}{2}}$, oder von $\sqrt{a}$. Daher bekommt man $\log.\sqrt{a} = \frac{1}{2}$; eben so $\log.\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $\log.\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, u. s. f.

§. 224.

Wenn aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden soll, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine ganze Zahl noch ein Bruch seyn kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponenten geben, nemlich b, so daß die Potenz a^b der gegebenen Zahl c gleich werde, und alsdann hat man $b = \log.c$. Folglich hat man auf eine allgemeine Art $a^{\log.c.} = c$.

§. 225.

Wir wollen nun eine andere Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfalls durch log. d angedeutet wird,

wird, also daß $a^{\log.d} = d$. Man multiplicire nun diese Formel mit der vorhergehenden $a^{\log.c} = c$, so bekommt man $a^{\log.c + \log.d} = cd$: nun aber ist der Exponent allezeit der Logarithmus der Potenz, folglich ist $\log.c + \log.d = \log.cd$. Dividirt man aber die erste Formel durch die letztere, so bekommt man $a^{\log.c - \log.d} = \frac{c}{d}$. Folglich wird $\log.c - \log.d = \log.\frac{c}{d}$.

§. 226.

Hierdurch werden wir zu den zwey Haupteigenschaften der Logarithmen geführt, wovon die erste in der Gleichung $\log.c + \log.d = \log.cd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus von einem Product als cd gefunden werde, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Die zweyte Eigenschaft ist in der Gleichung $\log.c - \log.d = \log.\frac{c}{d}$ enthalten und zeiget an, daß der Logarithmus von einem Bruch gefunden werde, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

§. 227.

Und eben hierin bestehet der große Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Denn wenn zwey Zahlen mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen, so hat man nur nöthig, die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offenbar, daß es ungleich viel leichter sey, Zahlen zu addiren oder subtrahiren, als zu multipliciren oder dividiren, besonders wenn die Zahlen sehr groß sind.

§. 228.

§. 228.

Noch wichtiger aber ist der Nutzen bey den Potenzen und der Ausziehung der Wurzeln. Denn wenn $d = c$, so hat man aus der erstern Eigenschaft $\log. c + \log. c = \log. cc$, also ist $\log. c^2 = 2 \log. c$; eben so bekommt man $\log. c^3 = 3 \log. c$ und $\log. c^4 = 4 \log. c$, und allgemein $\log. c^n = n \log. c$.

Nimmt man nun für n gebrochene Zahlen an, so bekommt man $\log. c^{\frac{1}{2}}$, das ist $\log. \sqrt{c} = \frac{1}{2} \log. c$; ferner auch für negative Zahlen $\log. c^{-1}$, das ist $\log. \frac{1}{c} = -\log. c$, und $\log. c^{-2}$, das ist $\log. \frac{1}{c^2} = -2 \log. c$, u. s. f.

§. 229.

Wenn man also solche Tabellen hat, worin für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, so kann man durch Hülfe derselben die schwersten Rechnungen, wo große Multiplicationen und Divisionen oder auch Erhebungen zu Potenzen und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mit leichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln so wohl für jede Zahl ihre Logarithmen, als auch für einen jeden Logarithmus die Zahl selbst, finden kann. Also wenn man aus einer Zahl c die Quadratwurzel finden soll, so sucht man erstlich den Logarithmus der Zahl c, welcher ist $\log. c$, hernach nimmt man davon die Hälfte, welche ist $\frac{1}{2} \log. c$, und diese ist der Logarithmus der gesuchten Quadratwurzel; also die Zahl, die diesem Logarithmus zukommt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadratwurzel selbst.

§. 230.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, u. s. f. und folglich alle positive

Zahlen

Zahlen Logarithmen der Wurzel a und ihrer positiven Potenzen sind; das ist von Zahlen, die größer sind, als Eins.

Hingegen die negativen Zahlen, als: — 1, — 2 u. s. f. sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ u. s. f., welche kleiner als Eins, aber gleichwohl noch größer als Null sind.

Hieraus folgt, daß wenn der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer größer sey als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber größer als Null. Folglich können für negative Zahlen keine Logarithmen angezeigt werden, oder die Logarithmen von negativen Zahlen sind unmöglich und gehören zu dem Geschlecht der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

§. 231.

Um dieses besser zu erläutern, wird es gut seyn, für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen, und zwar diejenige, nach welcher die gebräuchlichen logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darin die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die ganze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür eine jede andere Zahl, die nur größer ist als Eins, angenommen werden könnte; denn wenn man $a = 1$ setzen wollte, so würden alle Potenzen davon als $a^b = 1$, und immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl, als c, gleich werden können.