Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XXIII. Capitel. Von der Art die Logarithmen darzustellen.

wollen den Buchstaben y für log. 3 setzen, und daher würden wir haben:

$\log.30 = y+1$, $\log.300 = y+2$, $\log.3000 = y+3$, u. s. f.

$\log.9 = 2y$, $\log.27 = 3y$, $\log.81 = 4y$, $\log.243 = 5y$, u. s. f.

Daher kann man noch weiter finden:

$\log.6 = x+y$, $\log.12 = 2x+y$, $\log.18 = x+2y$, imgleichen auch $\log.15 = \log.3 + \log.5 = y+1-x$.

§. 241.

Wir haben oben (§. 41.) gesehen, daß alle Zahlen aus den so genannten Primzahlen durch die Multiplication hervor gebracht werden. Also wenn nur die Logarithmen der Primzahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen blos durch die Addition finden; als z. B. von der Zahl 210, welche aus folgenden Factoren besteht, 2. 3. 5. 7, wird seyn der Logarithmus $= \log.2 + \log.3 + \log.5 + \log.7$: eben so, da $360 = 2.2.2.3.3.5 = 2^3\, 3^2.5$, so wird $\log.360 = 3\log.2 + 2\log.3 + \log.5$, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Primzahlen die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bey Verfertigung der Logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen der Primzahlen gefunden werden.

XXIII. Capitel.

Von der Art die Logarithmen darzustellen.

§. 242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwey Brüchen fallen müsse, wenn die Potenz der Zahl 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen, was man immer für einen will, so wird die Potenz immer eine Irrationalzahl und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, daher sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen, den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmerklich werde. Hierzu bedient man sich der so genannten Decimalbrüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlicher erklärt zu werden verdient.

§. 243.

Man weiß, daß bey der gewöhnlichen Art, alle Zahlen mit den zehn Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

zu schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihre natürliche Bedeutung haben, und daß auf der zweyten Stelle ihre Bedeutung 10 mal größer werde, auf der dritten aber 100 mal, auf der vierten 1000 mal u. s. f. auf einer jeden folgenden Stelle 10 mal größer, als auf der vorhergehenden.

Also in dieser Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur Rechten die Ziffer 5, die auch wirklich 5 bedeutet, auf der zweyten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern 10. 6 oder 60 anzeigt; die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet 100. 7 oder 700, und endlich das 1 auf der vierten Stelle bedeutet 1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen, indem man sagt:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechzig, und Fünf.

§. 244.

Wie nun von der Rechten zur Linken die Bedeutung der Ziffern immer 10 mal größer und folglich von

von der Linken zur Rechten immer 10 mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetz noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da denn die Bedeutung der Ziffern immer fort 10 mal kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemerken, wo die Ziffern ihren natürlichen Werth haben. Dieses geschieht durch ein Comma, welches hinter diese Stelle gesetzt wird. Wenn man daher folgende Zahl findet, als 36, 54892, so ist dieselbe also zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, ~~und die~~ Ziffer 3 auf der zweyten Stelle von der Rechten bedeutet 30. Aber nach dem Comma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$, die folgenden 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9, $\frac{9}{10000}$ und die Ziffer 2, $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Bedeutungen immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie für nichts zu achten sind.

§. 245.

Diese Art, die Zahlen auszudrücken, heißt nun ein Decimalbruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellt. Daselbst wird z. B. der Logarithmus von 2 also ausgedrückt: 0,3010300. Folglich ist hierbey zu merken, daß, weil vor dem Comma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Ganzes betrage, und daß sein Werth $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$ sey. Man hätte also wohl die zwey hintersten 0 weglassen können, allein dieselben dienen, um zu zeigen, daß von diesen Theilchen wirklich keine vorhanden sind. Hierdurch wird aber nicht behauptet, daß nicht weiterhin noch kleinere Theilchen folgen sollten, aber diese werden wegen ihrer Kleinheit für nichts geachtet.

§. 246.

Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt: 0,4771213; woraus man sieht, daß derselbe kein Ganzes betrage, sondern daß er aus diesen Brüchen bestehe:

$$\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{2}{100000}+\frac{1}{1000000}+\frac{3}{10000000}.$$

Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus auf diese Art ganz genau ausgedrückt sey. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch wirklich so klein ist, daß man ihn in den meisten Rechnungen aus der Acht lassen kann.

§. 247.

Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0,0000000, weil derselbe wirklich 0 ist; von 10 aber heißt der Logarithmus 1,0000000, woraus man erkennt, daß derselbe gerade 1 sey. Von 100 aber ist der Logarithmus 2,0000000, oder gerade 2, woraus man sehen kann, daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder welche mit zwey Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten seyn müssen, und folglich durch 1 und einen Decimalbruch ausgedrückt werden. Also ist log. 50 = 1, 6989700, derselbe ist also 1 und noch überdies $\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{10000}+\frac{7}{100000}$. Von den Zahlen aber über hundert bis 1000 enthalten die Logarithmen 2 nebst einem Decimalbruch, als log. 800=2, 9030900. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4 u. s. f.

§. 248.

Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Ganzes, und deswegen steht vor dem Comma eine 0. Bey einem jeden Logarithmus sind also zwey Theile zu bemerken. Der erste Theil, den man die Charakteristik oder Kennziffer zu nennen pflegt, steht vor dem Comma und zeigt die Ganzen an, wenn dergleichen vorhanden sind; der andere Theil aber zeigt die Decimalbrüche an, die zu dem Ganzen noch gesetzt werden müssen, und wird Mantisse genannt. Also ist es leicht, den ersten oder ganzen Theil des Logarithmus einer jeden Zahl anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen, die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Er ist ferner 2 für diejenigen, so aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um eins kleiner als die Anzahl der Ziffern. Wenn man also den Logarithmus von 1766 verlangt, so weiß man schon, daß der erstere oder ganze Theil davon 3 seyn muß.

§. 249.

Umgekehrt also, sobald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, so weiß man, aus wie viel Figuren die Zahl selbst bestehen werde, weil die Anzahl der Figuren immer um eins größer ist als der ganze Theil des Logarithmus. Wenn man also für eine unbekannte Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6, 4771213, so wüßte man sogleich, daß dieselbe Zahl aus 7 Figuren bestehe und also größer seyn müsse als 1000000. Diese Zahl ist auch wirklich 3000000: denn log. 3000000 = log. 3 + log. 1000000. Nun aber ist log. 3 = 0, 4771213 und

und log. 1000000 = 6, welche zwey Logarithmen zusammen addirt 6, 4771213 geben.

§. 250.

Bey einem jeden Logarithmus kommt also die Hauptsache auf den nach dem Comma folgenden Decimalbruch an, und wenn dieser einmal bekannt ist, so kann er für viele Zahlen dienen. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten, dessen erster Theil unstreitig 2 ist; für den andern Theil aber, nemlich den Decimalbruch, wollen wir der Kürze halber den Buchstaben x schreiben, also daß $\log. 365 = 2 + x$; hieraus erhalten wir, wenn wir immerfort mit 10 multipliciren, $\log. 3650 = 3 + x$; $\log. 36500 = 4 + x$; $\log. 365000 = 5 + x$. Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren, so bekommen wir $\log. 36,5 = 1 + x$; $\log. 3,65 = 0 + x$; $\log. 0,365 = -1 + x$; $\log. 0,0365 = -2 + x$; $\log. 0,00365 = -3 + x$ u. s. f.

§. 251.

Bey den Logarithmen aller dieser Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen 0 hinter oder vor sich haben, bleibt einerley Decimalbruch in ihren Logarithmen und der Unterschied befindet sich nur in der ganzen Zahl vor dem Comma, und wie wir gesehen haben, so kann diese auch negativ werden, wenn nemlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gemeinen Rechner nicht gut mit den negativen Zahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die ganze Zahl der Logarithmen um 10 vermehret, und anstatt 0 vor dem Comma, pflegt man 10 zu schreiben, da man denn 9 anstatt — 1 bekommt; anstatt — 2 bekommt man 8; anstatt — 3 bekommt man 7 u. s. f. Hier muß aber gar nicht aus der Acht gelassen werden, daß die ganzen

Zahlen

Zahlen vor dem Comma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe, die Zahl bestehe aus 10 oder 9 oder 8 Figuren, sondern daß die Zahl erst nach dem Comma entweder auf der ersten Stelle, wenn 9 vorhanden, oder auf der zweyten Stelle, wenn 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wenn 7 vom Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen vorgestellt.

§. 252.

In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimalbrüche für die Logarithmen in sieben Figuren, wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher seyn, daß dieselben um kein einziges solches Theilchen von der Wahrheit abweichen, welcher Fehler gemeiniglich nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen in noch mehr als sieben Figuren vorgestellt werden, welches in den großen Vlacqschen Tabellen geschieht, wo die Logarithmen auf zehn Figuren berechnet sind.

§. 253.

Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt oder angezeigt, sondern man findet daselbst nur die sieben Figuren des Decimalbruchs, welche den zweyten Theil ausmachen. In den englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis auf 100000 ausgedrückt und wenn größere Zahlen noch vorkommen, so sind kleine Täfelchen beygefügt, woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Figuren noch zu den Logarithmen addirt werden müsse.

§. 254.

Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus hinwiederum die ihm zukommende Zahl aus den Tabellen nehmen soll. Um die Sache besser zu erläutern, so wollen wir z. B. diese Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun die Logarithmen davon addirt werden müssen, so kommt die Rechnung also zu stehen:

$$\left.\begin{array}{l} \log. 343 = 2,\ 5352941 \\ \log. 2401 = 3,\ 3803922 \end{array}\right\}\ \text{addirt}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5,\ 9156863 \\ 6847 \end{array}\right\}\ \text{subtrahirt}$$

Giebt also 823543. 16

Diese Summe ist nun der Logarithmus des gesuchten Products, und aus seinem ersten Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Figuren bestehe, welche aus dem Decimalbruch vermittelst der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist wirklich das gesuchte Product.

§. 255.

Da bey Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen besonders einen wichtigen Vortheil leisten, so wollen wir auch dieses mit einem Exempel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadratwurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig den Logarithmus von 10, welcher 1, 0000000 ist, durch 2 zu dividiren, so wird der Quotient 0, 5000000, der Logarithmus der gesuchten Wurzel seyn. Daher die Wurzel selbst aus den Tabellen 3, 16228 gefunden wird, wovon auch wirklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilchen größer ist als 10.

Ende des ersten Abschnitts.

Des