Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

Zweyter Abschnitt. Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

Des

Ersten Theils

Zweyter Abschnitt.

Von

den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Des
Ersten Theils
Zweyter Abschnitt.
Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

I. Capitel.
Von der Addition zusammengesetzter Größen.

§. 256.

Wenn zwey oder mehr Formeln, welche aus vielen Gliedern bestehen, zusammen addirt werden sollen, so pflegt man die Addition zuweilen nur durch gewisse Zeichen anzudeuten, indem man eine jede Formel in Klammern einschließt und dieselben mit dem Zeichen $+$ verbindet. Also wenn die Formeln $a+b+c$ und $d+e+f$ zusammen addirt werden sollen, so wird die Summe also angezeigt:

$$(a+b+c)+(d+e+f).$$

§. 257.

Auf diese Art wird die Addition nur angedeutet, nicht aber vollzogen. Es ist aber leicht einzusehen, daß, um dieselbe zu vollziehen, nur nöthig ist, die Klammern wegzulassen: denn da die Zahl $d+e+f$, zur

zur ersten addirt werden soll, so geschieht solches, wenn man erstlich $+d$, hernach $+e$, und endlich $+f$ hinzuschreibt, da denn die Summe seyn wird:

$$a+b+c+d+e+f.$$

Eben dieses würde auch zu beobachten seyn, wenn einige Glieder das Zeichen $-$ hätten, welche dann gleichfalls mit ihrem Zeichen hinzu geschrieben werden müßten.

§. 258.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir ein Exempel in bloßen Zahlen betrachten, und zu der Formel $12-8$ noch diese $15-6$ addiren.

Man addire also erstlich 15, so hat man $12-8+15$; man hat aber zu viel addirt, weil man nur $15-6$ addiren sollte, und es ergiebt sich, daß man 6 zu viel addirt habe; man nehme also diese 6 wieder weg oder schreibe sie mit ihrem Zeichen dazu, so hat man die wahre Summe:

$$12-8+15-6.$$

Hieraus erhellet, daß man die Summe findet, wenn man alle Glieder, jedes mit seinem Zeichen, an einander schreibt.

§. 259.

Wenn daher zu dieser Formel $a-b+c$ noch diese $d-e-f$ addirt werden soll, so wird die Summe folgendergestalt ausgedrückt:

$$a-b+c+d-e-f.$$

Es ist aber hierbey wohl zu bemerken, daß es hier gar nicht auf die Ordnung der Glieder ankomme, sondern daß dieselben nach Belieben unter einander versetzt werden können, wenn nur ein jedes sein ihm vorgesetztes Zeichen behält. Also könnte die obige Summe auch auf folgende Art geschrieben werden:

$$c-e+a-f+d-b.$$

§. 260.

Folglich hat die Addition nicht die geringste Schwierigkeit, wie auch immer die Glieder aussehen mögen. Also wenn zu dieser Formel $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\log.c$ noch diese $5\sqrt[5]{a} - 7c$ addirt werden sollte, so würde die Summe seyn:

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\log.c + 5\sqrt[5]{a} - 7c;$$

woraus erhellet, daß dieses die Summe sey, und es auch erlaubt ist, diese Glieder nach Belieben unter einander zu versetzen, wenn nur ein jedes sein Zeichen behält.

§. 261.

Es ist aber oft der Fall, daß die solchergestalt gefundene Summe weit kürzer zusammen gezogen werden kann, indem zuweilen zwey oder mehr Glieder sich gänzlich aufheben, z. B. wenn in der Summe diese Glieder $+a-a$, oder solche $3a - 4a + a$ vorkämen. Auch können bisweilen zwey oder mehrere Glieder in eins gebracht werden, wie z. B.

$$3a + 2a = 5a;\ 7b - 3b = +4b;\ -6c + 10c = +4c$$
$$5a - 8a = -3a;\ -7b + b = -6b;\ -3c - 4c = -7c;$$
$$2a - 5a + a = -2a;\ -3b - 5b + 2b = -6b.$$

Diese Abkürzung findet also statt, so oft zwey oder mehr Glieder in Ansehung der Buchstaben völlig einerley sind. Hingegen $2a^2 + 3a$ läßt sich nicht zusammen ziehen, eben so wenig als sich $2b^3 - b^4$ abkürzen läßt.

§. 262.

Wir wollen also einige Exempel von dieser Art betrachten. Erstlich sollen diese zwey Formeln addirt werden $a + b$ und $a - b$, da denn nach obiger Regel herauskommt $a + b + a - b$; nun aber ist $a + a$

$= 2a$ und $b - b = 0$, folglich ist die Summe $= 2a$. Aus diesem Exempel erhellt folgende sehr nützliche Wahrheit:

Wenn zu der Summe zweyer Zahlen $(a+b)$ ihre Differenz $(a-b)$ addirt wird, so kommt die größere Zahl doppelt heraus.

Man betrachte zur Uebung noch folgende Exempel:

$$\begin{array}{r|r} 3a - 2b - c & a^3 - 2a^2b + 2ab^2 \\ 5b - 6c + a & -a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline 4a + 3b - 7c & a^3 - 3a^2b + 4ab^2 - b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3a - 2b + c - 12m \\ 5a + 4b - 3c + 6m \\ -7a + 5b - 7c + 2m \\ 2a - 7b + 9c - 5f \\ \hline 3a - 4m - 5f \end{array}$$

II. Capitel.

Von der Subtraction zusammengesetzter Größen.

§. 263.

Wenn man die Subtraction nur andeuten will, so schließt man eine jede Formel in Klammern ein, und diejenige, welche abgezogen werden soll, wird mit Vorsetzung des Zeichen $-$ an diejenige angehänget, von welcher sie abgezogen werden soll. Z. B. wenn von dieser Formel $a - b + c$ diese $d - e + f$ abgezogen werden soll, so wird der gesuchte Rest also angedeutet:

$$(a - b + c) - (d - e + f)$$

woraus man ersehen kann, daß die letztere Formel von der ersten abgezogen werden soll.

§. 264.

§. 264.

Um aber die Subtraction wirklich zu vollziehen, so ist fürs erste zu merken, daß, wenn von einer Größe als a eine andere positive Größe als + b abgezogen werden soll, man a — b bekommen werde.

Soll hingegen eine negative Zahl als — b von a abgezogen werden, so wird man bekommen a + b, weil eine Schuld wegnehmen eben so viel ist als etwas schenken.

§. 265.

Laßt uns nun annehmen, man soll von dieser Formel a — c, diese b — d subtrahiren; so nehme man erstlich b weg, welches a — c — b giebt; wir haben aber zu viel weggenommen, denn wir sollten nur b — d wegnehmen, und zwar um d zu viel: wir müssen also d wieder hinzusetzen, da wir denn erhalten:

$$a - c - b + d,$$

woraus sich deutlich folgende Regel ergiebt: daß die Glieder derjenigen Formel, welche subtrahirt werden sollen, mit verkehrten Zeichen hinzugeschrieben werden müssen.

§. 266.

Mit Hülfe dieser Regel ist es also ganz leicht, die Subtraction zu verrichten, indem die Formel, von welcher subtrahirt werden soll, ordentlich hingeschrieben, diejenige Formel aber, welche subtrahirt werden soll, mit umgekehrten oder verwechselten Zeichen angehänget wird. Da also im ersten Exempel von a — b + c diese Formel d — e + f abgezogen werden soll, so bekommt man:

$$a - b + c - d + e - f.$$

Um dieses mit bloßen Zahlen zu erläutern, so subtrahire man von $9 - 3 + 2$, diese Formel $6 - 2 + 4$, da man denn bekömmt:

$$9 - 3 + 2 - 6 + 2 - 4 = 0.$$

welches auch sogleich in die Augen fallt; denn $9 - 3 + 2 = 8$, $6 - 2 + 4 = 8$, und $8 - 8 = 0$.

§. 267.

Da nun die Subtraction selbst weiter keine Schwierigkeit hat, so ist nur noch übrig zu bemerken, daß, wenn in dem gefundenen Rest zwey oder mehr Glieder vorkommen, welche in Ansehung der Buchstaben einerley sind, die Abkürzung nach eben denselben Regeln vorgenommen werden könne, welche oben bey der Addition gegeben worden.

§. 268.

Soll von $a + b$, wodurch die Summe zweyer Zahlen angedeutet wird, ihre Differenz $a - b$ subtrahiret werden, so bekommt man erstlich $a + b - a + b$; nun aber ist $a - a = 0$ und $b + b = 2b$, folglich ist der gesuchte Rest $2b$, das ist die kleinere Zahl b doppelt genommen.

§. 269.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Exempel beyfügen:

$$\begin{array}{c|c} a^2 + ab + b^2 & 3a - 4b + 5c \\ a^2 - ab + b^2 & -6a + 2b + 4c \\ \hline 2ab & 9a - 6b + c \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ \hline 6a^2b + 2b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{a} + 2\sqrt{b} \\ \sqrt{a} - 3\sqrt{b} \\ \hline + 5\sqrt{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12a + 4b - 3m - 8f + 2c \\ 6a - 9b + 2m - 3f + 7d \\ \hline 6a + 13b - 5m - 5f + 2c - 7d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 8\sqrt{n} + \sqrt{c} \\ \sqrt{a} - 3\sqrt{b} - 12\sqrt{n} - \sqrt{c} \\ \hline 5\sqrt{b} + 4\sqrt{n} + 2\sqrt{c} \end{array}$$

Zusatz. Will man die Richtigkeit einer solchen Rechnung prüfen, so darf man nur auf die gewöhnliche Art den gefundenen Rest zu der subtrahirten Zahl addiren, und sehen, ob die Summe derjenigen Zahl oder Formel gleich sey, von welcher subtrahirt worden.

III. Capitel.

Von der Multiplication zusammengesetzter Größen.

§. 270.

Wenn die Multiplication zusammengesetzter Größen bloß angezeigt werden soll, so wird eine jede von den Formeln, welche mit einander multiplicirt werden sollen, in Klammern eingeschlossen, und entweder ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesetzten Punkt an einander gehängt.

Also wenn diese beyde Formeln $a - b + c$ und $d - e + f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product auf folgende Art angezeigt: $(a-b+c).(d-e+f)$ oder $(a-b+c)(d-e+f)$.

Diese Art wird sehr häufig gebraucht, weil man daraus sogleich sieht, aus was für Factoren ein solches Product zusammen gesetzt ist.

Zusatz. Statt der Klammern bedienen sich einige auch eines Querstrichs, der über die Größen gesetzt wird, die zusammen genommen einen Factor ausmachen; z. B.

$$\overline{a - b + c} \,.\, \overline{d - e + f}$$

§. 271.

Um aber zu zeigen, wie eine solche Multiplication wirklich angestellt werden müsse, so ist erstlich zu merken, daß, wenn eine solche Formel $a - b + c$, z. B. mit 2 multiplicirt werden soll, ein jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden müsse, und also herauskommen werde:

$$2a - 2b + 2c.$$

Eben dies gilt auch von allen andern Zahlen. Wenn also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll, so bekommt man:

$$ad - bd + cd.$$

§. 272.

Hier haben wir vorausgesetzt, daß die Zahl d positiv sey: wenn aber mit einer negativen Zahl als $-e$ multiplicirt werden soll, so ist die oben (§. 32) gegebene Regel zu beobachten, daß nemlich zwey ungleiche Zeichen multiplicirt $-$, zwey gleiche aber $+$ geben. Daher bekommt man:

$$-ae + be - ce.$$

§. 273.

Um nun zu zeigen, wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt seyn, als A, durch eine zusammengesetzte, als $d - e$, multiplicirt werden soll, so wollen wir erstlich bloße Zahlen betrachten, und anneh-

annehmen, daß A mit $7 - 3$ multiplicirt werden solle. Hier ist nun klar, daß man das vierfache von A verlange; nimmt man nun erstlich das siebenfache, so muß man hernach das dreyfache davon subtrahiren. Also auch überhaupt, wenn man mit $d - e$ multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hernach mit e und subtrahirt das letztere Product von dem erstern, also daß herauskommt $dA - eA$. Laßt uns nun setzen $A = a - b$, welches mit $d - e$ multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$\begin{array}{r} dA = ad - bd \\ eA = ae - be \\ \hline ad - bd - ae + be \end{array}$$

welches das verlangte Product ist.

§. 274.

Da wir nun das Product $(a - b).(d - e)$ gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplications-Exempel folgendergestalt deutlich vor Augen stellen:

$$\begin{array}{c} a - b \\ d - e \\ \hline ad - bd - ae + be \end{array}$$

woraus wir sehen, daß ein jedes Glied der obern Formel mit einem jeden der untern multiplicirt werden müsse, und daß wegen der Zeichen die oben gegebene Regel durchaus Statt habe, und hierdurch von neuem bestätiget werde, wenn etwa jemand noch irgend einen Zweifel darüber gehabt hätte.

§. 275.

Nach dieser Regel wird es also leicht seyn, folgendes Exempel auszurechnen; $a + b$ soll multiplicirt werden mit $a - b$:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline aa + ab \\ - ab - bb \\ \hline \end{array}$$

das Product wird seyn $aa - bb$

§. 276.

Wenn also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so leitet uns dieses Exempel auf folgende Wahrheit: wenn die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt wird, so ist das Product die Differenz ihrer Quadrate; dies kann auf folgende Art vorgestellt werden:

$$(a + b)(a - b) = aa - bb.$$

Folglich ist wiederum die Differenz zwischen zwey Quadratzahlen immer ein Product, oder sie läßt sich so wohl durch die Summe als durch die Differenz der Wurzeln theilen, und ist also keine Primzahl.

§. 277.

Wir wollen nun noch ferner folgende Exempel ausrechnen:

I.)
$$\begin{array}{r} 2a - 3 \\ a + 2 \\ \hline 2a^2 - 3a \\ + 4a - 6 \\ \hline 2a^2 + a - 6 \end{array}$$

II.)
$$\begin{array}{r} 4a^2 - 6a + 9 \\ 2a + 3 \\ \hline 8a^3 - 12a^2 + 18a \\ + 12a^2 - 18a + 27 \\ \hline 8a^3 + 27 \end{array}$$

III.)
$$\begin{array}{r} 3a^2 - 2ab - b^2 \\ 2a - 4b \\ \hline 6a^3 - 4a^2b - 2ab^2 \\ - 12a^2b + 8ab^2 + 4b^3 \\ \hline 6a^3 - 16a^2b + 6ab^2 + 4b^3 \end{array}$$

IV.)
$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + 2b^2 \\ a^2 - 2ab + 2b^2 \\ \hline a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 \\ - 2a^3b - 4a^2b^2 - 4ab^3 \\ + 2a^2b^2 + 4ab^3 + 4b^4 \\ \hline a^4 + 4b^4. \end{array}$$

V.) $2a^2$

$$\begin{array}{l} \text{V.)}\ 2a^2 - 3ab - 4b^2 \\ \quad 3a^2 - 2ab + b^2 \\ \hline \quad 6a^4 - 9a^3b - 12a^2b^2 \\ \qquad\quad - 4a^3b + 6a^2b^2 + 8ab^3 \\ \qquad\qquad\quad + 2a^2b^2 - 3ab^3 - 4b^4. \\ \hline \quad 6a^4 - 13a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{VI.)}\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \\ \quad a + b + c \\ \hline \quad a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - a^2c - abc \\ \quad - ab^2 - ac^2 + a^2b + a^2c - abc + b^3 + bc^2 - b^2c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - abc \qquad - bc^2 + b^2c + c^3 \\ \hline \quad a^3 - 3abc + b^3 + c^3. \end{array}$$

§. 278.

Wenn mehr als zwey Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht, daß, nachdem man zwey davon mit einander multiplicirt hat, das Product nach und nach auch durch die übrigen multiplicirt werden müsse, und daß es gleichviel sey, was für eine Ordnung darin beobachtet werde. Es soll z. B. folgendes Product, welches aus vier Factoren besteht, gefunden werden:

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ (a+b) & (a^2+ab+b^2) & (a-b) & (a^2-ab+b^2) \end{array}$$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

$$\begin{array}{l} \text{II.}\ a^2 + ab + b^2 \\ \text{I.}\ a + b \\ \hline \quad a^3 + a^2b + ab^2 \\ \qquad + a^2b + ab^2 + b^3 \\ \hline \text{I. II.}\ a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \end{array}$$

Hernach multiplicirt man den III. und IV. Factor:

$$\begin{array}{rl}
\text{IV.} & a^2 - ab + b^2 \\
\text{III.} & a - b \\
\hline
 & a^3 - a^2b + ab^2 \\
 & \quad\;\; - a^2b + ab^2 - b^3 \\
\hline
\text{III. IV.} & a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3
\end{array}$$

Nun ist nur noch übrig jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren:

$$\begin{array}{rl}
\text{I. II.} = & a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\text{III. IV.} = & a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
\hline
 & a^6 + 2a^5b + 2a^4b^2 + a^3b^3 \\
 & \quad - 2a^5b - 4a^4b^2 - 4a^3b^3 - 2a^2b^4 \\
 & \qquad + 2a^4b^2 + 4a^3b^3 + 4a^2b^4 + 2ab^5 \\
 & \qquad\quad - a^3b^3 - 2a^2b^4 - 2ab^5 - b^6 \\
\hline
 & a^6 - b^6
\end{array}$$

dieses ist nun das gesuchte Product.

§. 279.

Wir wollen nun bey eben diesem Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und dann die II. mit der IV. multipliciren:

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & a + b \\
\text{III.} & a - b \\
\hline
 & a^2 + ab \\
 & \quad\;\; - ab - b^2 \\
\hline
\text{I. III.} = & a^2 - b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{II.} & a^2 + ab + b^2 \\
\text{IV.} & a^2 - ab + b^2 \\
\hline
 & a^4 + a^3b + a^2b^2 \\
 & \quad - a^3b - a^2b^2 - ab^3 \\
 & \qquad + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\
\hline
\text{II. IV.} = & a^4 + a^2b^2 + b^4
\end{array}$$

Nun muß nur noch das Product II. IV. mit dem I. III. multiplicirt werden:

$$
\begin{array}{l}
\text{II. IV.} = a^4 + a^2b^2 + b^4 \\
\text{I. III.} = a^2 - b^2 \\
\hline
a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 \\
\quad - a^4b^2 - a^2b^4 - b^6 \\
\hline
a^6 - b^6
\end{array}
$$

welches das gesuchte Product ist.

§. 280.

Endlich wollen wir die Rechnung noch nach einer dritten Ordnung anstellen und erstlich die I. Formel mit der IV. und hernach die II. mit der III. multipliciren:

$$
\begin{array}{ll}
\text{IV. } a^2 - ab + b^2 & \text{II. } a^2 + ab + b^2 \\
\text{I. } a + b & \text{III. } a - b \\
\hline
a^3 - a^2b + ab^2 & a^3 + a^2b + ab^2 \\
\quad + a^2b - ab^2 + b^3 & \quad - a^2b - ab^2 - b^3 \\
\hline
\text{I. IV.} = a^3 + b^3 & \text{II. III.} = a^3 - b^3
\end{array}
$$

Nun ist noch übrig das Product I. IV. mit II. III. zu multipliciren:

$$
\begin{array}{l}
\text{I. IV.} = a^3 + b^3 \\
\text{II. III.} = a^3 - b^3 \\
\hline
a^6 + a^3b^3 \\
\quad - a^3b^3 - b^6 \\
\hline
a^6 - b^6.
\end{array}
$$

§. 281.

Es ist wohl der Mühe werth dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sey daher $a = 3$ und $b = 2$, so hat man $a + b = 5$ und $a - b = 1$; ferner $a^2 = 9$, $ab = 6$, $b^2 = 4$. Also ist $a^2 + ab + b^2 = 19$ und $a^2 - ab + b^2 = 7$. Folglich wird dieses Product verlangt:

5. 19. 1. 7. welches ist 665.

Es ist aber $a^6 = 729$ und $b^6 = 64$, folglich $a^6 - b^6 = 665$, wie wir schon vorher gesehen haben.

IV. Capitel.

Von der Division zusammengesetzter Größen.

§. 282.

Wenn man die Division nur anzeigen will, so bedient man sich entweder des gewöhnlichen Zeichen eines Bruchs, indem man den Dividendus über die Linie und den Divisor unter die Linie schreibt; oder man schließt beyde in Klammern ein, und schreibt den Divisor nach dem Dividendus mit dazwischen gesetzten zwey Puncten. Also wenn $a + b$ durch $c + d$ getheilt werden soll, so wird der Quotient nach der ersten Art also angezeigt $\frac{a+b}{c+d}$.

Nach der andern Art aber durch $(a+b):(c+d)$; beydes wird ausgesprochen $a+b$ getheilt durch $c+d$.

§. 283.

Wenn eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden soll, so wird ein jedes Glied besonders getheilt, z. B.

$6a - 8b + 4c$ durch 2 getheilt, giebt $3a - 4b + 2c$
und $(a^2 - 2ab) : a = a - 2b$:
Eben so $(a^3 - 2a^2b + 3ab^2) : a = a^2 - 2ab + 3b^2$;
ferner $(4a^2b - 6a^2c + 8abc) : 2a = 2ab - 3ac + 4bc$;
und $(9a^2bc - 12ab^2c + 15abc^2) : 3abc = 3a - 4b + 5c$.

§. 284.

Wenn sich etwa ein Glied des Dividendus nicht theilen läßt, so wird der daher entstehende Quotient durch einen Bruch angezeigt. Also wenn $a + b$ durch a getheilt werden soll, so bekommt man zum Quotienten $1 + \frac{b}{a}$.

Ferner

Ferner $(a^2 - ab + b^2) : a^2 = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$.
Wenn ferner $(2a + b)$ durch 2 getheilt werden soll, so bekommt man $a + \frac{b}{2}$; wobey zu merken, daß anstatt $\frac{b}{2}$ auch geschrieben werden kann $\frac{1}{2}b$, weil $\frac{1}{2}$mal b so viel ist als $\frac{b}{2}$. Eben so ist $\frac{b}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}b$ und $\frac{2b}{3}$ so viel als $\frac{2}{3}b$ u. s. f.

§. 285.

Wenn aber der Divisor selbst eine zusammengesetzte Größe ist, so hat die Division mehr Schwierigkeit, weil dieselbe öfters wirklich geschehen kann, wo es nicht zu vermuthen scheint; denn wenn die Division nicht angeht, so muß man sich begnügen, den Quotienten, wie oben schon gezeigt ist, durch einen Bruch anzudeuten; wir wollen daher hier nur solche Fälle betrachten, wo die Division wirklich angeht.

§. 286.

Es soll demnach der Dividendus $ac - bc$ durch den Divisor $a - b$ getheilt werden; der Quotient muß daher also beschaffen seyn, daß, wenn der Divisor $a - b$ damit multiplicirt wird, der Dividendus $ac - bc$ herauskomme. Man sieht nun leicht, daß in dem Quotienten c stehen muß, weil sonst nicht ac herauskommen könnte. Um nun zu sehen, ob c der völlige Quotient ist, so darf man nur den Divisor damit multipliciren und sehen, ob der ganze Dividendus herauskomme oder nur ein Theil desselben. Wird aber $a - b$ mit c multiplicirt, so bekommt man $ac - bc$, welches der Dividendus selbst ist: folglich ist c der völlige Quotient. Eben so ist klar, daß $(a^2+ab):(a+b)=a$, und $(3a^2-2ab):(3a-2b)=a$, ferner $(6a^2-9ab):(2a-3b)=3a$.

§. 287.

Auf diese Art findet man gewiß einen Theil des Quotienten. Denn wenn derselbe mit dem Divisor multiplicirt noch nicht den Dividendus erschöpft, so muß man das übrige gleichfalls noch durch den Divisor theilen, da man denn wiederum einen Theil des Quotienten herausbringt. Solchergestalt verfährt man, bis man den ganzen Quotienten erhält.

Wir wollen z. B. $a^2+3ab+2b^2$ durch $a+b$ theilen; es ist nun sogleich klar, daß der Quotient das Glied a enthalten müsse, weil sonst nicht a^2 heraus kommen könnte. Wenn aber der Divisor $a+b$ mit a multiplicirt wird, so kommt a^2+ab, welches vom Dividendus abgezogen, $2ab+2b^2$ übrig läßt, welches also noch durch $a+b$ getheilt werden muß, und hier fällt sogleich in die Augen, daß im Quotienten 2b stehen müsse. Aber 2b mit $a+b$ multiplicirt, giebt gerade $2ab+2b^2$; folglich ist der gesuchte Quotient $a+2b$, welches mit dem Divisor $a+b$ multiplicirt, den Dividendus giebt. Dieses ganze Verfahren wird auf folgende Art vorgestellt:

$$
\begin{array}{l}
a+b)\; a^2+3ab+2b^2\;(a+2b \\
\qquad\; \underline{a^2+ab} \\
\qquad\qquad +2ab+2b^2 \\
\qquad\qquad \underline{+2ab+2b^2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

§. 288.

Um diese Operation zu erleichtern, so erwählt man einen Theil des Divisors, wie hier geschehen, a, welchen man zuerst schreibt, und nach diesem Buch-

staben

staben schreibt man auch den Dividendus in solcher Ordnung, daß die höchsten Potenzen von eben demselben Buchstaben a zuerst gesetzt werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$\begin{array}{l}
a - b)\, a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\, (a^2 - 2ab + b^2 \\
\quad a^3 - a^2b \\
\hline
\quad - 2a^2b + 3ab^2 \\
\quad - 2a^2b + 2ab^2 \\
\hline
\qquad + ab^2 - b^3 \\
\qquad + ab^2 - b_3 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
a + b)\, a^2 - b^2\, (a - b & 3a - 2b)\, 18a^2 - 8b^2\, (6a + 4b \\
\quad a^2 + ab & \quad 18a^2 - 12ab \\
\quad - ab - b^2 & \qquad + 12ab - 8b^2 \\
\quad - ab - b^2 & \qquad + 12ab - 8b^2 \\
\qquad 0 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
a + b)\, a^3 + b^3\, (a^2 - ab + b^2 & 2a - b)\, 8a^3 - b^3\, (4a^2 + 2ab + b^2 \\
\quad a^3 + a^2b & \quad 8a^3 - 4a^2b \\
\quad - a^2b + b^3 & \quad + 4a^2b - b^3 \\
\quad - a^2b - ab^2 & \quad + 4a^2b - 2ab^2 \\
\qquad + ab^2 + b_3 & \qquad + 2ab^2 - b^3 \\
\qquad + ab^2 + b^3 & \qquad + 2ab^2 - b^2 \\
\qquad\quad 0 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a^2 - 2ab + b^2)\, a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4\, (a^2 - 2ab + b^2 \\
\quad a^4 - 2a^3b + a^2b^2 \\
\hline
\quad - 2a^3b + 5a^2b^2 - 4ab^3 \\
\quad - 2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 \\
\hline
\qquad + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\
\qquad + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
a^2-2ab+4b^2)\ a^4+4a^2b^2+16b^4\ (a^2+2ab+4b^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{a^4-2a^3b+4a^2b^2} \\
\qquad\qquad\qquad +2a^3b+16b^4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+2a^3b-4a^2b^2+8ab^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +4a^2b^2-8ab^3+16b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+4a^2b^2-8ab^3+16b^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a^2-2ab+2b^2)\ a^4+4b^4\quad (a^2+2ab+2b^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{a^4-2a^3b+2a^2b^2} \\
\qquad\qquad\qquad +2a^3b-2a^2b^2+4b^4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+2a^3b-4a^2b^2+4ab^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +2a^2b^2-4ab^3+4b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+2a^2b^2-4ab^3+4b^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
1-2x+x^2)\ 1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5\ (1-3x+3x^2-x^3 \\
\qquad\quad \underline{1-2x+x^2} \\
\qquad\qquad -3x+9x^2-10x^3 \\
\qquad\qquad \underline{-3x+6x^2-3x^3} \\
\qquad\qquad\quad +3x^2-7x^3+5x^4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{+3x^2-6x^3+3x^4} \\
\qquad\qquad\qquad -x^3+2x^4-x^5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-x^3+2x^4-x^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Zusatz. Da der Anfänger die Division immer am schwierigsten findet, so will ich noch folgende 2 Beyspiele hersetzen:

Divisor d	der ganze Dividendus D A	B	C	der Quotient α	β	γ
$4a^2b^3$	$20a^5b^3$	$-\ 12a^6b^3$	$+\ 24a^3b^4$	$5a^3$	$-\ 3a^4$	$+\ 6ab$

Die Rechnung selbst:

Man suche $A:d=\alpha=5a^3$
und nun nehme man $\alpha.\ d=20a^5b^3$,

daher $D-ad=\overset{B}{-12a^6b^3}+\overset{C}{24a^3b^4}=R.$

Hierauf suche man $B:d=\beta=-3a^4$
und nehme $\beta.\ d=-12a^6b^3$;

so ist $R-\beta.\ d=\overset{C}{24a^3b^4}$

Endlich

Endlich suche man $C : d = \gamma = 6ab$,
und nehme $\gamma . d = 24a^3b^4$;
so ist $C - \gamma d = 0$.

Divisor d	Der ganze Dividendus D	Der Quotient
A B	C E F G	α β
$2ac - 3a^2b$	$6a^5bc - 16a^3c^2 - 9a^6b^2 + 24a^4bc^{\cancel{2}}$	$3a^4b - 8a^2c$

Die Rechnung selbst:

Man suche $C : A = \alpha = 3a^4b$
und nehme $\alpha . d = 6a^5bc - 9a^6b^2$;
so ist $D - \alpha . d = \overset{E}{- 16a^3c^2} + \overset{G}{24a^4\overset{bc}{\cancel{c^2}}} = R$.
Hierauf suche man $E : A = \beta = - 8a^2c$,
und nehme $d . \beta = - 16a^3c^2 + 24a^4bc^{\cancel{2}}$;
so ist $R - d . \beta = 0$.

V. Capitel.

Von der Auflösung der Brüche in unendliche Reihen *).

§. 289.

Wenn sich der Dividendus durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeigt, durch einen Bruch ausgedrückt.

Also

*) Die Theorie der Reihen ist eine der wichtigsten in der ganzen Mathematik. Die Reihen, von denen hier in diesem Capitel die Rede ist, sind von Mercator gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts gefunden, und Newton erfand bald nachher diejenigen, welche von der Ausziehung der Wurzeln entspringen, wovon im zwölften Capitel gehandelt wird. Diese Theorie hat in der Folge einen neuen Grad der Vollkommenheit von vielen ausgezeichneten Geometern erhalten. Die Werke von Jakob Bernoulli und der zweyte Theil von Eulers Differen-

Also wenn 1 durch $1 - a$ getheilt werden soll, so bekommt man diesen Bruch $\frac{1}{1-a}$. Inzwischen kann doch die Division nach den vorhergehenden Regeln angestellt und, so weit man will, fortgesetzt werden, da dann immer der wahre Quotient, ob gleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß.

§. 290.

Um dieses zu zeigen, so wollen wir den Dividendus 1 wirklich durch den Divisor $1 - a$ theilen, wie folget:

$$\begin{array}{l} 1-a)\ 1\ (1+\frac{a}{1-a} \\ \quad +1-a \\ \hline \text{Rest} +a \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 1-a)\ 1\ (1+a+\frac{a^2}{1-a} \\ \quad +1-a \\ \hline \qquad +a \\ \qquad +a-a^2 \\ \hline \text{Rest} +a^2 \end{array}$$

Um noch mehr Formen zu finden, so theile man a^2 durch $1 - a$, als:

$$\begin{array}{l} 1-a)\ a^2\ (a^2+\frac{a^3}{1-a}, \\ \quad a^2-a^3 \\ \hline \quad +a^3 \end{array} \quad \text{ferner} \quad \begin{array}{l} 1-a)\ a^3\ (a^3+\frac{a^4}{1-a} \\ \quad a^3-a^4 \\ \hline \quad +a^4 \end{array},$$

ferner

rentialrechnung (aus dem Lateinischen ins Deutsche mit Anmerk. und Zusätzen von Michelsen übersetzt), sind diejenigen, woraus man sich am besten über diese Materie unterrichten kann. Man wird auch in den Mémoires de Berlin von 1768 eine neue Methode des Herrn de la Grange finden, vermittelst der unendlichen Reihen alle Buchstaben-Gleichungen von welchem Grade sie auch seyn mögen, aufzulösen. Diese Abhandlung ist vom Hrn. Prof. Michelsen übersetzt und findet sich in dem dritten Bande von Eulers Einleitung zur Analysis des Unendlichen, welcher auch unter dem besondern Titel: Theorie der Gleichungen, zu haben ist.

ferner $1-a)\ a^4\ \left(a^4+\frac{a^5}{1-a}\right.$

$$\frac{a^4-a^5}{\qquad}$$
$$+a^5 \text{ u. s. f.}$$

§. 291.

Hieraus sehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ durch alle folgende Formen ausgedrückt werden kann:

I.) $1+\frac{a}{1-a}$, II.) $1+a+\frac{a^2}{1-a}$,

III.) $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}$, IV.) $1+a+a^2+a^3+\frac{a^4}{1-a}$,

V.) $1+a+a^2+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$, u. s. f.

Man betrachte die erste Form $1+\frac{a}{1-a}$. Nun ist 1 so viel als $\frac{1-a}{1-a}$; folglich $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Für die zweyte Form $1+a+\frac{a^2}{1-a}$ bringe man den ganzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekommt man $\frac{1-a^2}{1-a}$, dazu $\frac{+a^2}{1-a}$, giebt $\frac{1-a^2+a^2}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$.

Für die dritte Form $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}$, giebt der ganze Theil zum Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$, dazu der Bruch $\frac{a^3}{1-a}$, macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellet, daß alle diese Formen in der That so viel sind als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

§. 292.

Man kann daher solchergestalt so weit fortgehen, als man will, ohne daß man weiter nöthig hat zu rechnen. Also wird seyn $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$. Man kann auch so gar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset, welche ist:

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} \text{ u. s. f.}$$

bis ins Unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit Recht behaupten, daß ihr Werth gleich dem Bruch $\frac{1}{1-a}$ sey.

§. 293.

Dieses scheint anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden. Es sey erstlich $a = 1$, so wird unsere Reihe $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ u. s. f. bis ins Unendliche, welche dem Bruch $\frac{1}{1-1}$, das ist $\frac{1}{0}$, gleich seyn soll. Wir haben aber schon oben (§. 83) bemerkt, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das anschaulichste bestätigt.

Wenn man aber setzt $a = 2$, so wird unsere Reihe $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ u. s. f. bis ins Unendliche, deren Werth seyn soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1} = -1$; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es ist aber zu merken, daß wenn man irgendwo in obiger Reihe stehen bleiben will, dazu allezeit noch ein Bruch gesetzt werden muß.

Also wenn wir z. B. bey 64 still stehen, so müssen wir zu $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{-1} = -128$ hinzusetzen, woraus $127 - 128$ entsteht, das ist -1.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man steht aber hingegen auch niemals still.

§. 294.

So verhält sich also die Sache, wenn für a größere Zahlen als 1 angenommen werden. Nimmt man aber für a kleinere Zahlen, so läßt sich alles leichter begreifen.

Es sey z. B. $a = \frac{1}{2}$, so bekommt man $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, welches folgender Reihe gleich seyn wird: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ u. s. f. ohne Ende. Denn nimmt man nur zwey Glieder, so hat man $1 + \frac{1}{2}$, und so fehlt noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlt noch $\frac{1}{4}$; nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{7}{8}$, fehlt noch $\frac{1}{8}$; woraus man sieht, daß immer weniger fehlt, folglich wenn man unendlich weit fortgeht, so muß gar nichts fehlen.

Anmerk. Der Fehler wird nemlich hier immer noch einmal so klein, und kann daher zuletzt kleiner als jede gegebene Größe werden.

§. 295.

Man setze $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, welchem daher folgende Reihe gleich ist: $1 + \frac{1}{3}$

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ u. s. f. bis ins Unendliche. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlt noch $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{4}{9}$, fehlt noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlt noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreymal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

§. 296.

Laßt uns annehmen $a = \frac{2}{3}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, die Reihe aber wird: $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ u. s. f. bis ins Unendliche.

Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$, so fehlt noch $1\frac{1}{3}$.

Nimmt man drey Glieder $2\frac{1}{9}$, so fehlt noch $\frac{8}{9}$.

Nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$, so fehlt noch $\frac{16}{27}$.

§. 297.

Es sey $a = \frac{1}{4}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$ die Reihe aber wird $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ u. s. f. Nimmt man zwey Glieder $1\frac{1}{4}$, so fehlt noch $\frac{1}{12}$; nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{5}{16}$, da denn noch $\frac{1}{48}$ fehlt, u. s. w.

§. 298.

Auf gleiche Weise kann auch dieser Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset werden, wenn man den Zähler 1 durch den Nenner $1 + a$ wirklich dividirt, wie folgt:

$$
\begin{array}{l}
1+a)\ 1\ (1-a+a^2-a^3+a^4 \\
\quad\ \underline{1+a} \\
\qquad -a \\
\quad\ \ \underline{-a-a^2} \\
\qquad\qquad +a^2 \\
\qquad\quad\ \ \underline{+a^2+a^3} \\
\qquad\qquad\qquad -a^3 \\
\qquad\qquad\quad\ \ \underline{-a^3-a^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +a^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \ \underline{+a^4+a^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a^5 \text{ u. s. f.}
\end{array}
$$

Daher ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe:

$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7$ u. s. f.

Zusatz. Da ich hier manches Paradoxon zu erläutern habe, so ist es nöthig, daß ich dieses Beyspiel ausführlich durchgehe. Die Aufgabe ist:

Den Quotienten anzugeben, welchen 1 durch $1+a$ dividirt geben muß.

Auflösung. 1) Das erste Glied des Quotienten ist $1:1=1$.

Dieses mit dem Divisor $1+a$ multiplicirt, giebt $1+a$, und dieß vom Dividendus 1 abgezogen, giebt den Rest $1-1-a=-a$.

2) Vergleicht man den Divisor $1+a$ mit dem Rest $-a$, so ergiebt sich das zweyte Glied des Quotienten $=-a:1=-a$.

Multiplicirt man es mit dem Divisor $1+a$, so ist das Product $=-a-a^2$, und dieses vom Reste $-a$ abgezogen, giebt den neuen Rest $-a-(-a-a^2)=+a^2$.

3) Vergleicht man ferner den Divisor $1+a$ mit dem erst erhaltenen Rest $+a^2$, so findet man des Quotienten drittes Glied $a^2:1=a^2$.

Multiplicirt man dieses mit dem Divisor $1+a$, so erhält man das Product $=a^2+a^3$, und dieses vom Rest a^2 abgezogen, giebt $a^2-(a^2+a^3)=-a^3$.

4) Vergleicht man den Divisor $1+a$ mit dem Rest $-a^3$, so findet man das vierte Glied des Quotienten $=-a^3:1=-a^3$.

Multiplicirt man damit den Divisor $1 + a$, so ist das Product $= -a^3 - a^4$, und wenn man nun dieses vom Reste $-a^3$ abzieht, so findet man den neuen Rest $-a^3 - (-a^3 - a^4) = + a^4$.

5) Die bisher in (n. 1, 2, 3, 4.) erhaltenen Glieder des Quotienten, und die zugehörigen Reste sind also:

Die Glieder des Quotienten: $1 - a + a^2 - a^3$

Die zugehörigen Reste: $-a + a^2 - a^3 + a^4$

6) Die Glieder des Quotienten in (n. 5.) richten sich nach diesem Gesetze: vom zweyten Gliede an folgen die Potenzen von a so auf einander, daß der Exponent von a in jedem Gliede um Eins kleiner ist, als die Zahl, welche anzeiget, das wievielste selbiges Glied ist, ob es nemlich das zweyte, dritte, vierte u. s. f. ist, so, daß jede gerade Potenz von a, die nemlich 2, 4, 6, 8 u. s. f. zum Exponenten hat, bejaht, und jede andere verneint ist.

7) Die Reste aber, welche bey der Bestimmung der Glieder erhalten werden (n. 5.), sind ebenfalls Potenzen von a, aber um einen Grad höher, als die, welche die Glieder des Quotienten enthalten, bey deren Bestimmung sie erhalten werden, und zwar bejaht sind alle gerade Potenzen von a, verneint aber die übrigen.

8) Man nehme nun an, daß die Gesetze (n. 6. 7.) für eine gewisse Anzahl n von Gliedern des verlangten Quotienten richtig sind, so muß das nte Glied desselben $\pm a^{n-1}$ seyn, und einen Rest $= \mp a^n$ zurücklassen, und nun giebt dieser Rest durch das erste Glied 1 des Divisors $1 + a$ dividirt, das nächst folgende $(n + 1)$te Glied $\mp a^n$ des Quotienten.

Offenbar ist es also, daß, wenn die Gesetze (n. 6. 7.) für n Glieder des verlangten Quotienten gelten, sie auch für die um Eins größere Anzahl derselben gelten müssen: da also diese Gesetze für 4 Glieder wirklich gelten, wegen (n. 5.); so müssen sie auch für $4 + 1$ oder 5 Glieder gelten, und wenn dieses wahr ist, gelten die Gesetze auch für $5 + 1 = 6$ Glieder, u. s. f. für jede nächst größere Anzahl von Gliedern.

9) Man kann daher den verlangten Quotienten auf die nachstehende Art angeben: $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - - - - \pm a^n \mp a^{n+1} \pm - - -$

Eben so findet man:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + - - - - + a^n + - - -$$

(siehe §. 292).

Um nun aber die Schwierigkeiten zu heben, die viele Mathematikverständige bey diesen unendlichen Reihen gefunden haben, und wobey selbst ein Euler nicht allein unzulängliche, sondern sogar zum Theil ganz falsche Gründe angiebt, wie z. B. in §. 299, müssen wir allemal auf den Rest achten, der übrig bleibt, man mag aufhören bey welchem Gliede mag will.

Aus dem vorhergehenden erhellet nemlich, daß das $(2n+1)$te Glied des Quotienten $\frac{1}{1+a} = + a^{2n}$, und der dazu gehörige Rest $- a^{2n+1}$ ist.

Der Quotient vollständig ausgedrückt, wäre daher folgender:

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + - - - + a^{2n} - \frac{a^{2+1}}{1+a}; \text{ oder auch}$$

$$= 1 - a + a^2 - a^3 + - - - - a^{2n+1} + \frac{a^{2n+2}}{1+a}$$

Wäre $a = 1$, so ist $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 - - - + 1 - \frac{1}{2}$ oder $= 1 - 1 + 1 - - - - + 1 - 1 + \frac{1}{2}$. Jedes ungerade Glied hebt sich mit seinem nächst folgenden Gliede auf. Im ersten Falle bleibt also übrig $+ 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, und im zweyten Falle bleibt bloß die Ergänzung $\frac{1}{2}$ übrig. Nimmt man also, wie billig, auf diese Ergänzung Rücksicht, so schwinden alle Schwierigkeiten, wovon weiter unten ein mehreres.

§. 299.

Setzt man $a = 1$, so erhält man diese merkwürdige Vergleichung:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ u.s.f.}$$

bis ins Unendliche, welches widersinnig scheint; denn wenn man irgendwo mit $- 1$ aufhört, so giebt diese Reihe 0; hört man irgend aber mit + auf, so giebt dieselbe 1. Allein eben hieraus läßt sich die Sache begreifen; denn wenn man ohne Ende fort gehen und weder bey $- 1$ noch $+ 1$ irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 herauskommen, sondern etwas, das dazwischen liegt, welches $\frac{1}{2}$ ist.

§. 300.

Es sey ferner $a = \frac{1}{2}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, welchem folglich gleich seyn wird die Reihe: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ u. s. f. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{1}{2}$, welches um $\frac{1}{6}$ zu wenig ist. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{3}{4}$, also um $\frac{1}{12}$ zu viel. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{5}{8}$, welches um $\frac{1}{24}$ zu wenig ist u. s. f.

§. 301.

Setzt man $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, dem diese Reihe gleich seyn wird: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$ u. s. f. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{7}{9}$, ist zu viel um $\frac{1}{36}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$, u. s. f.

§. 302.

Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ noch auf eine andere Art auflösen, indem man 1 durch $a + 1$ theilt, nemlich:

$a+1)\ 1\ \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}\right.$ u. s. f.

$1+\frac{1}{a}$

1ster Rest $-\frac{1}{a}$

$-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}$

2ter Rest $+\frac{1}{a^2}$

$+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}$

3ter Rest $-\frac{1}{a^3}$

$-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}$

4ter Rest $+\frac{1}{a^4}$

$+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}$

5ter Rest $-\frac{1}{a^5}$ u. s. f.

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich:

$\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}$ u. s. f. ohne Ende.

Setzt man $a=1$, so bekommt man diese Reihe:

$1-1+1-1+1-1+1$ u. s. f. $=\frac{1}{2}$ wie oben.

Setzt man $a=2$, so bekommt man diese Reihe:

$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$ u. s. f.

Zusatz. Auch hier sieht man leicht ein, daß der $(n-1)$te Rest das $n$te Glied des Quotienten giebt. Ist nun n ungerade, so ist das $n$te Glied des Quotienten, so wie auch der $(n-1)$te Rest positiv.

§. 303.

§. 303.

Auf gleiche Weise kann man auf eine allgemeine Art diesen Bruch $\frac{c}{a+b}$ in eine Reihe auflösen:

$$a+b)\ c\ \left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}\ \text{u. s. f.}\right.$$

$$c + \frac{bc}{a}$$

1ster Rest $\quad - \frac{bc}{a}$

$$- \frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2}$$

2ter Rest $\quad + \frac{b^2c}{a^2}$

$$+ \frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3}$$

3ter Rest $\quad - \frac{b^3c}{a^3}$

Woraus wir diese Vergleichung erhalten:
$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$ bis ins Unendliche.
Es sey $a = 2$, $b = 4$, und $c = 3$, so haben wir
$\frac{c}{a+b} = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12$ u. s. f.
Es sey $a = 10$, $b = 1$ und $c = 11$, so haben wir
$\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1} = 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} - \frac{11}{1000}$ u. s. f.

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$, welches um $\frac{1}{10}$ zu viel. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{99}{100}$, welches um $\frac{1}{100}$ zu wenig. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ u. s. f.

1. Zusatz. Der $2n-1$ te Rest ist also $-\frac{b^{2n-1}c}{a^{2n-1}}$, und dieser giebt das $2n$te Glied des Quotienten $= -\frac{b^{2n-1}c}{a^{2n}}$.

2. Zusatz. Daß $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - - - \frac{b^{2n-1}c}{a^{2n}} + \frac{b^{2n}c}{a^{2n+1}} - - -$ ist, davon kann man sich auch, ohne die Division wirklich zu verrichten, auf folgende Art überzeugen:

Es ist $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a\left(1+\frac{b}{a}\right)} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$

Nun ist aus §. 298. bekannt, daß

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - - - - \frac{b^{2n-1}}{a^{2n-1}} + \frac{b^{2n}}{a^{2n}} - - - -$$

Folglich ist auch $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - - - - \frac{b^{2n-1}.c}{a^{2n}} + \frac{b^{2n}.c}{a^{2n+1}} - - - -$

Eben so findet man:

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{b}{a}} = \frac{c}{a}\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \dots + \frac{b^r}{a^r} + \dots\right) \text{ (§. 292.)}$$

$$= \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} + \dots + \frac{b^rc}{a^{r+1}} + \dots$$

Es ist einleuchtend, daß beyde Reihen sich nähern müssen, wenn $a > b$ genommen wird, und daß sie sich desto schneller ihrem wahren Werthe nähern werden, je größer a in Vergleichung mit b seyn wird.

Das bisher Gesagte setzt uns schon in den Stand, einen jeden gegebenen Bruch $\frac{p}{q}$ in eine solche Reihe zu verwandeln,

daß

daß die ersten Glieder derselben schon sehr genau eben den Bruch geben, welcher die Summe der ganzen Reihe seyn muß.

Zu dieser Absicht kann man eine große ganze Zahl n nehmen und $\frac{p}{q} = \frac{pn}{nq} = \frac{p\,n}{nq+1-1} = n.\frac{p}{nq+1-1}$ setzen.

Wenn man also $n.q+1=a$; $1=b$ und $p=c$ bey der Formel $\frac{c}{a-b}$ setzt; so findet man die verlangte Reihe:

$$\frac{p}{q} = n.\left(\frac{p}{nq+1} + \frac{p}{(nq+1)^2} + \frac{p}{(nq+1)^3} + \right)$$

Es sey $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$, so ist $p=3$, $q=2$, und man nehme $n = 10000$; so ist $\frac{3}{2} = 10000\left(\frac{3}{20001} + \frac{3}{(20001)^2} + \frac{3}{(20001)^3} + --- \right)$

Und nun ist klar, daß, obgleich die Anzahl der Glieder dieser Reihe völlig unbestimmt, ja unendlich groß ist, dennoch schon die ersten Glieder mit 10000 multiplicirt, den Bruch $\frac{3}{2}$ sehr genau geben müssen, und noch genauer geben würden, wenn man für n eine noch größere Zahl nähme.

Der Mathematiker ist noch nicht damit zufrieden, daß er weiß, daß die ersten Glieder einer Reihe schon für die Praxis hinreichen, sondern er will auch noch den Fehler bestimmen, welchen man begehen würde wenn man die Summe von einigen ersten Gliedern der einem Bruche zugehörigen Reihe statt der Summe der ganzen Reihe in einer Rechnung gebrauchte, ohne diese Summe erst zu suchen, ja ohne den Bruch in die zugehörige Reihe zu verwandeln.

Dazu soll nun folgende Betrachtung dienen:

Wenn in der den Bruch $\frac{c}{a+b}$ zugehörigen Reihe irgend ein Glied, z. B. das $(r+1)$te diese Form $\pm\frac{b^r c}{a^{r+1}}$ hätte, so ist $\mp\frac{b^{r+1}c}{a^{r+1}}$ der $(r+1)$ te Rest, der das nun folgende $(r+2)$ te Glied der Reihe geben würde, wenn man weiter dividiren wollte.

Wollte man daher mit den ersten $r+1$ Gliedern der Reihe zufrieden seyn, so vernachläßigt man einen Bruch, der entstehet, wenn man den $(r+1)$ten Rest noch mit dem Divisor theilt, dieser Bruch wäre also folgender:

$$\mp \frac{b^{r+1}c}{a^{r+1}(a+b)} = \mp \frac{b^{r+1}c}{a^{r+2}+a^{r+1}.b}$$

Es sey z. B. $c=3$, $a=100$, $b=2$, und $r=4$, also $r+1=5$, und $r+2=6$, so ist $\frac{c}{a+b} = \frac{3}{102} = \frac{3}{100+2}$ und

$$\frac{b^{r+1}c}{a^{r+2}+a^{r+1}.b} = \frac{2^5.3}{100^6+100^5.2} =$$

$$\frac{32.3}{1000000000000+20000000000}$$

$$= \frac{96}{1020000000000} = \frac{1}{106250000}$$

Weil aber $r=4$ eine gerade, daher $r+1=5$ eine ungerade Zahl war; so ist dieser Bruch negativ, das heißt nun: wenn man den Bruch $\frac{3}{102} = \frac{3}{100+2}$ in eine Reihe verwandelt, und davon nur die 5 ersten Glieder zusammen addirte; so würde diese Summe mit dem Bruch $\frac{1}{106250000}$ zusammen genommen, die Summe der ganzen Reihe, daher den Bruch $\frac{3}{102}$ genau geben, folglich wäre jene Summe nur um $\frac{1}{106250000}$ größer als der Bruch $\frac{3}{102}$.

§. 304.

Wenn der Divisor aus mehrern Theilen besteht, so kann die Division auf eben diese Art ins Unendliche fortgesetzt werden.

Z. B. wenn dieser Bruch $\frac{1}{1-a+a^2}$ gegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, die demselben gleich ist, auf folgende Art gefunden:

$$
\begin{array}{lllllllll}
1-a+a^2)\ 1\ (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7 \text{ u. s. f.} \\
\quad\ \underline{1-a+a^2} \\
\text{1ster Rest} \quad +a-a^2 \\
\qquad\qquad\ \underline{+a-a^2+a^3} \\
\text{2ter Rest} \qquad\qquad -a^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-a^3+a^4-a^5} \\
\text{3ter Rest} \qquad\qquad\quad -a^4+a^5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-a^4+a^5-a^6} \\
\text{4ter Rest} \qquad\qquad\qquad\quad +a^6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^6-a^7+a^8} \\
\text{5ter Rest.} \qquad\qquad\qquad\qquad +a^7-a^8 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+a^7-a^8+a^9} \\
\text{6ter Rest.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a^9 \text{ u. s. f.}
\end{array}
$$

Daher haben wir folgende Gleichung: $\frac{1}{1-a+a^2} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$ u. s. f. ohne Ende. Nimmt man hier $a = 1$, so bekommt man: $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1$ u. s. f. welche Reihe die schon oben (§. 299.) gefundene $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ u. s. f. verdoppelt in sich enthält; da nun die obige Reihe gleich $\frac{1}{2}$ war, so ist kein Wunder, daß diese $\frac{2}{2}$, das ist 1, ausmacht.

Setzt man $a = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese Gleichung: $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$ u. s. f. Setzt man $a = \frac{1}{3}$, so bekommt man folgende Gleichung, als $\frac{1}{\frac{7}{9}}$ oder $\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$ u. s. f. Nimmt man hier vier Glieder, so bekommt man $\frac{104}{81}$, welches um $\frac{1}{567}$ kleiner als $\frac{9}{7}$ ist.

Man setze ferner $a = \frac{2}{3}$, so bekommt man diese Gleichung: $\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729}$ u. s. f. und diese Reihe muß der vorigen gleich seyn; man subtrahire also die obere von dieser, so bekommt man: $0 = \frac{1}{3}$

$0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{35}{81} + \frac{63}{729}$ u. s. f. welche vier Glieder zusammen $-\frac{2}{81}$ machen.

Zusatz. Anfängern ist es ziemlich schwer, das allgemeine Gesetz der Reihe zu entdecken, welche $\frac{1}{1-a+a^2}$ giebt. Ich will daher solches hier mittheilen. Es ist nemlich:

$$\frac{1}{1-a+a^2} = \overset{1}{a^0} + \overset{2}{a^1} - \overset{3}{a^3} - \overset{4}{a^4} + \overset{5}{a^6} + \overset{6}{a^7} - \overset{7}{a^9} - \overset{8}{a^{10}}$$

$$\text{- - - - } \pm \underset{(2x+1)\text{tes}}{a^{3x}} \pm \underset{2(x+1)\text{tes Glied}}{a^{1+3x}} \mp \text{ - - - -}$$

Gesetzt, man wollte das 13te Glied wissen, so muß, da 13 ungerade ist, das x aus dieser Formel $2x+1$, welche jede ungerade Zahl vorstellt, bestimmt werden. Wir haben daher folgende Gleichung:

$$2x + 1 = 13$$
$$1 = 1 \text{ subtrahirt}$$

bleibt $2x = 12$; denn wenn Gleiches von Gleichem subtrahirt wird, so bleibt Gleiches. Wenn aber eine Zahl x, zweymal genommen, gleich 12 ist, so muß diese Zahl $x = 6$ seyn. Nun ist das zu $2x+1$ zugehörige Glied der Reihe $= a^{3x}$; da nun $x = 6$, so ist das 13te Glied $= a^{3.6} = a^{18}$.

Man soll das 30te Glied bestimmen.

Da 30 eine gerade Zahl ist, so muß man $2(x+1) = 30$ setzen, mit 2 auf beyden Seiten dividirt, giebt $x+1 = 15$, denn wenn man Gleiches mit Gleichem dividirt, $1 = 1$ subtragirt ~~hirt~~, so kommen gleiche Quotienten, folglich $x = 14$.

Da nun a^{1+3x} zu $2(x+1)$ gehört, so findet sich $a^{1+3x} = a^{1+3.14} = a^{43}$ als das 30te Glied der Reihe. Um nun zu bestimmen, welches Zeichen diese Glieder, nemlich das 13te und 30te Glied, haben, so darf man nur überlegen, daß das erste Paar positiv, das 2te Paar negativ, das 3te Paar wieder positiv u. s. w. also immer abwechselnd, woraus man deutlich einsieht, daß jedes ungerade Paar Glieder positiv, und jedes gerade negativ ist.

Bis zum 13ten Gliede sind 6 Paar Glieder, und ein Glied von dem siebenten Paare vorhanden; also ist das 13te Glied positiv, weil es das erste Glied eines ungeraden Paares ist.

Ferner, bis zum 30ten Gliede sind 15 Paare, also ist das 30te Glied auch positiv.

Allgemein, $\frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2}$, das heißt: bis zum $(2x+1)$ten Gliede sind x Paar, und von dem $(x+1)$ten Paar ist nur das erste Glied vorhanden, aber zu $(x+1)$ Paaren gehören $2(x+1)$ Glieder; wenn daher $x+1$ gerade ist, so ist das zu $2x+1$ oder zu $2(x+1)$ gehörige Glied negativ, positiv aber, wenn $x+1$ ungerade ist.

§. 305.

Auf diese Art kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflösen, und dies hat nicht nur öfters sehr großen Nutzen, sondern es ist auch an sich selbst höchst merkwürdig, daß eine unendliche Reihe, ungeachtet dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Entdeckungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, daher verdient diese Materie allerdings mit der größten Aufmerksamkeit erwogen zu werden. (Siehe §. 303. den 2ten Zusatz am Ende).

VI. Capitel.

Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen.

§. 306.

Wenn man das Quadrat einer zusammengesetzten Größe finden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbst multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von $a + b$ gefunden, wie folget:

$a + b$

$$\begin{array}{l} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

§. 307.

Wenn daher die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a + b$, so bestehet das Quadrat I.) aus den Quadraten eines jeden Theils, nemlich a^2 und b^2, II.) aus dem doppelten Product der beyden Theile, nemlich $2ab$, und die ganze Summe $a^2 + 2ab + 2b$ ist das Quadrat von $a + b$.

Es sey z. B. $a = 10$ und $b = 3$, also daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; so wird solches seyn $= 100 + 60 + 9 = 169$.

§. 308.

Durch Hülfe dieser Formel lassen sich nun leicht die Quadrate von ziemlich großen Zahlen finden, wenn dieselben in zwey Theile zergliedert werden.

Also um das Quadrat von 57 zu finden, so zertheile man diese Zahl in $50 + 7$; daher das Quadrat seyn wird:

$$2500 + 700 + 49 = 3249.$$

§. 309.

Hieraus sieht man, daß das Quadrat von $a + 1$ seyn werde $a^2 + 2a + 1$; da nun von a das Quadrat a^2 ist, so wird das Quadrat von $a + 1$ gefunden, wenn man zu jenem addirt $2a + 1$, wobey zu merken, daß $2a + 1$ die Summe der beyden Wurzeln a und $a + 1$ ist; da also von 10 das Quadrat 100 ist, so wird das Quadrat von 11 seyn $= 100 + 21$, und da von 57 das Quadrat 3249 ist, so wird das Quadrat von 58 seyn = 3249 + 115 = 3364. Und ferner das Quadrat von 59 = 3364 + 117 = 3481. Noch ferner das Quadrat von 60 = 3481 + 119 = 3600 u. s. f.

§. 310.

Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a + b$, wird also angedeutet $(a + b)^2$; daher haben wir $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b$, woraus folgende Gleichungen hergeleitet worden:
$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$, $(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$, $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$, $(a + 4)^2 = a^2 + 8a + 16$, u. s. f.

§. 311.

Wenn die Wurzel $a - b$ ist, so wird ihr Quadrat $= a^2 - 2ab + b^2$ seyn, welches daher aus den Quadraten beyder Theile besteht, wovon aber das doppelte Product weggenommen werden muß.

Es sey z. B. $a = 10$ und $b = 1$, so wird das Quadrat von $9 = 100 - 20 + 1 = 81$ seyn.

§. 312.

Da wir nun diese Gleichung haben: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, so wird $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$ seyn; das Quadrat von $a - 1$ wird also gefunden, wenn man von a^2 subtrahirt $2a - 1$, welches die Summe der beyden Wurzeln a und $a - 1$ ist.

Es sey z. B. $a = 50$, so ist $a^2 = 2500$ und $a - 1 = 49$, daher $49^2 = 2500 - 99 = 2401$.

§. 313.

Dieses läßt sich auch durch Brüche erläutern. Denn wenn man für die Wurzel $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$, welches 1 ausmacht, nimmt, so wird das Quadrat seyn: $\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25}$, das ist 1.

Ferner

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, welches $\frac{1}{6}$ ist, wird seyn $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

§. 314.

Wenn die Wurzel aus mehr Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen. Also von $a + b + c$ wird das Quadrat gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{l}
a + b + c \\
a + b + c \\
\hline
a^2 + ab + ac \qquad\quad + bc \\
\quad\; + ab + ac + b^2 + bc + c^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2
\end{array}$$

woraus man sieht, daß dasselbe I. aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel und II. aus dem doppelten Product von je zwey Theilen mit einander besteht.

§. 315.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, wollen wir die Zahl 256 in diese drey Theile zertheilen $200 + 50 + 6$; daher das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt seyn wird:

$$\begin{array}{r}
40000 \\
2500 \\
36 \\
20000 \\
2400 \\
600 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
256 \\
256 \\
\hline
1536 \\
1280 \\
512 \\
\hline
65536
\end{array}$$

65536 und dieses ist dem 256.256 vollkommen gleich.

§. 316.

Wenn einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regel gefunden, wenn man nur bey den doppelten Producten

Achtung giebt, was für ein Zeichen einem jeden zukommt.

Also von a — b — c wird das Quadrat seyn:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc.$$

Wenn also die Zahl 256 also vorgestellet wird: 300 — 40 — 4, so bekömmt man:

positive Theile	negative Theile
+ 90000	— 24000
1600	2400
320	— 26400
16	
+ 91936	
— 26400	

65536. Quadrat von 256, wie oben.

Zusatz. Wenn die Wurzel vieltheilig ist, so enthält das Quadrat derselben die Quadrate aller Theile, und die doppelten Producte aus der Summe aller ersten Theile in den nächstfolgenden.

Beweis:

Man setze, die vieltheilige Wurzel sey a + b + c + d + e - - - — + x, so soll

$$(a + b + c + d + e - - - x)^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$
$$+ 2(a + b)c + c^2$$
$$+ 2(a + b + c)d + d^2$$
$$+ 2(a + b + c + d)e + e^2$$
$$+ 2(a + b + c + d + e)f + f^2$$
$$\vdots$$
$$+ 2(a + b + c - - + v + w)x + x^2 \text{ seyn.}$$

Folgende Schlüsse werden uns von der Richtigkeit dieser Producte überzeugen:

Es sey $a + b + c + d + e - - x = A + x$,

so ist $(a + b + c + d - + x)^2 = A^2 + 2Ax + x^2$

A ist gleich $(a + b + c - - - - -)$ nemlich allen Theilen weniger x,

folglich $2Ax + x^2 = 2(a + b + c - + v + w)x + x^2$.

Nun setze man $A = (a + b + c - + v + w) = B + w$, so daß also B wiederum einen Theil weniger hat, als A, so ist

$A^2 = B^2$

$$A^2 = B^2 + 2Bw + w^2$$

also ist $2Bw + w^2 = 2(a + b + c - - - + v)w + w^2$.

Aus dem bisherigen ist schon klar, daß der in Klammern eingeschlossene Factor von unten an gerechnet immer im folgenden einen Theil weniger haben wird, als der nächst vorhergehende, daß also zuletzt nur zwey Theile übrig bleiben können, nemlich $a + b$, deren Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ ist.

VII. Capitel.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel in zusammengesetzten Größen.

§. 317.

Um eine sichere Regel zur Ausziehung zusammengesetzter Wurzeln zu finden, müssen wir das Quadrat von der Wurzel $a + b$, welches $a^2 + 2ab + b^2$ ist, genau in Erwägung ziehen, und suchen, wie man wieder aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen könne. Hierüber sind folgende Betrachtungen anzustellen.

§. 318.

Erstlich, da das Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen müsse; und wenn das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potenzen von einem Buchstaben, als a, immer abnehmen, so ist klar, daß das erste Glied das Quadrat von dem ersten Glied der Wurzel seyn werde. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats a^2 ist, so ist offenbar, daß das erste Glied der Wurzel, a seyn müsse.

§. 319.

Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nemlich a gefunden, so betrachte man das übrige im Quadrat, welches $2ab + b^2$ ist, um zu sehen, wie man daraus den andern Theil der Wurzel, welcher b ist, finden könne. Hiebey bemerken wir, daß jenes übrige oder jener Rest $2ab + b^2$ durch folgendes Product vorgestellet werden könne $(2a + b)b$. Da nun dieser Rest zwey Factoren, $2a + b$ und b hat, so wird der letztere b, das ist der zweyte Theil der Wurzel, gefunden, wenn man den Rest $2ab + b^2$ durch $2a + b$ dividirt.

§. 320.

Um also den zweyten Theil der Wurzel zu finden, so muß man den Rest durch $2a + b$ dividiren, da dann der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn wird. Bey dieser Division aber ist zu merken, daß 2a das Doppelte von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a ist; das andere Glied b aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch offen bleiben; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabey nur auf das erste Glied 2a gesehen wird. So bald man aber den Quotienten gefunden, welcher hier b ist, so muß man denselben auch an die offene Stelle setzen und die Division vollenden.

§. 321.

Die Rechnung also, wodurch aus obigem Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ die Wurzel gefunden wird, kann also vorgestellt werden:

$$\begin{array}{r|l}
 & a^2 + 2ab + b^2 \;(a + b \\
 & a^2 \\
\hline
2a + b & + 2ab + b^2 \\
 & + 2ab + b^2 \\
\hline
 & \quad 0
\end{array}$$

§. 322.

§. 322.

Auf solche Art kann auch die Quadratwurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wenn dieselben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2+6ab+9b^2\,(a+3b \\
 & a^2 \\ \hline
2a+3b & +6ab+9b^2 \\
 & +6ab+9b^2 \\ \hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2-4ab+b^2\,(2a-b \\
 & 4a^2 \\ \hline
4a-b & -4ab+b^2 \\
 & -4ab+b^2 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9p^2+24pq+16q^2)\;3p+4q \\
 & 9p^2 \\ \hline
6p+4q & +24pq+16q^2 \\
 & +24pq+16q^2 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 25x^2-60x+36)\;5x-6 \\
 & 25x^2 \\ \hline
10x-6 & -60x+36 \\
 & -60x+36 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

§. 323.

Wenn bey der Division noch ein Rest bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als 2 Gliedern besteht. Alsdann werden die zwey schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das folgende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$\begin{array}{r|l}
 & a^2 + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 + c^2 \,(a + b - c \\
 & a^2 \\
\hline
2a + b & + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 + c^2 \\
 & + 2ab \qquad\qquad\qquad + b^2 \\
\hline
2a + 2b - c & - 2ac - 2bc + c^2 \\
 & - 2ac - 2bc + c^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \,(a^2 + a + 1 \\
 & a^4 \\
\hline
2a^2 + a & + 2a^3 + 3a^2 \\
 & + 2a^3 + a^2 \\
\hline
2a^2 + 2a + 1 & + 2a^2 + 2a + 1 \\
 & + 2a^2 + 2a + 1 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 \,(a^2 - 2ab - 2b^2 \\
 & a^4 \\
\hline
2a^2 - 2ab & - 4a^3b + 8ab^3 \\
 & - 4a^3b + 4a^2b^2 \\
\hline
2a^2 - 4ab - 2b^2 & - 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\
 & - 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\
\hline
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \,(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 & a^6 \\
\hline
2a^3 - 3a^2b & -6a^5b + 15a^4b^2 \\
 & -6a^5b + 9a^4b^2 \\
\hline
2a^3 - 6a^2b + 3ab^2 & + 6a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \\
 & + 6a^4b^2 - 18a^3b^3 + 9a^2b^4 \\
\hline
2a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - b^3 & - 2a^3b^3 + 6a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\
 & - 2a^3b^3 + 6a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

§. 323.

Aus dieser Regel folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechenbüchern für die Ausziehung der Quadratwurzel gegeben wird:

$$\sqrt{5|29} = 23.$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{}\,5 & 29 = 23. \\ 4 & \\ \hline 43 & 129 \\ & 129 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{}\,17 & 64 = 42. \\ 16 & \\ \hline 82 & 164 \\ & 164 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{}\,23 & 04 = 48. \\ 16 & \\ \hline 88 & 704 \\ & 704 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{}\,40 & 96 = 64. \\ 36 & \\ \hline 124 & 496 \\ & 496 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{}\,96 & 04 = 98. \\ 81 & \\ \hline 188 & 1504 \\ & 1504 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} \sqrt{}\,1 & 56 & 25 = 125. \\ 1 & & \\ \hline 22 & 56 & \\ & 44 & \\ \hline 245 & 1225 & \\ & 1225 & \\ \hline & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} \sqrt{}\,99 & 80 & 01 = 999. \\ 81 & & \\ \hline 189 & 1880 & \\ & 1701 & \\ \hline 1989 & 17901 & \\ & 17901 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

§. 325.

Wenn aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen, daß die gegebene Zahl kein Quadrat ist und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzelzeichens, welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschlossen wird. Also wird die Quadratwurzel von a^2+b^2 auf diese Weise angedeutet: $\sqrt{}\,(a^2+b^2)$; und $\sqrt{}\,(1-xx)$ deutet die Quadratwurzel aus $1-xx$ an. Statt dieses Wurzelzeichens kann man sich auch des gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ bedienen. Also wird auch durch $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel aus a^2+b^2 angedeutet.

Zusatz. Aus der Arithmetik ist bekannt, daß die Einer zur Ordnung null, die Zehner zur ersten, die Hunderte zur zweyten, die Tausende zur dritten Ordnung gehören u. s. w.

Um anzudeuten, von welcher Ordnung eine Ziffer ist, schreibt man gerade über die Ziffer eine kleine Ziffer, welche die Ordnung anzeigen soll, und der Ordnungsexponent genannt wird, z. B. $\overset{6}{7}$ deutet an, daß 7 zur 6ten Ordnung gehört, oder 7000000.

Eine kleine Aufmerksamkeit wird sogleich lehren, daß der Ordnungsexponent auch anzeigt, wie viel Nullen man der ihm zugehörigen Ziffer anhängen soll. Eben so wird man leicht einsehen, daß $\overset{3}{7} \cdot \overset{9}{8} = \overset{3+9}{56} = \overset{12}{56}$; nemlich von dieser Zahl 56 gehört die 6, so wie die ganze Zahl, zur 12ten, und die 5 zur 13ten Ordnung.

Ferner $\left(\overset{7}{4}\right)^2 = \overset{7}{4} \cdot \overset{7}{4} = \overset{14}{4^2}$ und $\left(\overset{2}{3}\right)^5 = \overset{2}{3} \cdot \overset{2}{3} \cdot \overset{2}{3} \cdot \overset{2}{3} \cdot \overset{2}{3} = \overset{10}{3^5}$.

Dieses wenige vorausgesetzt, wird folgendes bey einiger Aufmerksamkeit verständlich seyn.

a, b, c, d, e, f - - - x; sollen einfache Zahlen vorstellen; so ist $\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + \overset{r-3}{d} + \overset{r-4}{e} + \overset{r-5}{f} - - - + \overset{0}{x}$ eine allgemeine Darstellung einer $(r+1)$ ziffrigen Zahl.

Nun ist aus dem Zusatz des 316. §. bekannt, daß

$$\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + \overset{r-3}{d} - - - + \overset{0}{x}\right)^2$$

$$= \overset{2r}{a^2} + \overset{2r-1}{2ab} + \overset{2r-2}{b^2}$$

$$+ 2\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b}\right)\overset{r-2}{c} + \overset{2r-4}{c^2} = \overset{2r-2}{2ac} + \overset{2r-3}{2bc} + \overset{2r-4}{c^2}$$

$$2\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c}\right)\overset{r-3}{d} + \overset{2r-6}{d^3} = \overset{2r-3}{2ad} + \overset{2r-4}{2bd} + \overset{2r-5}{2cd} + \overset{2r-6}{d^3}$$

$$+ 2\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + \overset{r-3}{d}\right)\overset{r-4}{e} + \overset{2r-8}{e^2} = \overset{2r-4}{2ae} + \overset{2r-5}{2be} + \overset{2r-6}{2ce} + \overset{2r-7}{2de} + \overset{2r-8}{e^2}$$

$$\vdots$$

$$+ 2\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + \overset{r-3}{d} - - - + \overset{1}{w}\right)\overset{0}{x} + \overset{0}{x^2} = \overset{r}{2ax} + \overset{r-1}{2bx} + \overset{r-2}{2cx} +$$

$$\overset{r-3}{2dx} - - - \overset{1}{wx} + \overset{0}{x^2}$$

Um sogleich übersehen zu können, welche Glieder dieser Producte zu einerley Ordnung gehören, so schreibe man die Ordnungsexponenten von der höchsten bis zur niedrigsten in einer Horizontalreihe neben einander hin, und unter diese Ordnungsexponenten setze man in Verticalreihen die zu ihnen gehörigen Glieder, wie folget:

1	2	3	4	5	6	7te Glied		2r-(r+1)-1) Glied u. s. f.						
2r,	2r-1,	2r-2,	2r-3,	2r-4,	2r-5,	2r-6,	- -	r,	r-1,	r-2,	r-3,	- -	1,	0.
a^2	2ab	b^2	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
		2ac	2bc	c^2	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
			2ad	2bd	2cd	d^2		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
				2ae	2be	2ce		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
								2ax	2bx	2cx	2dx	-	2wx	x^2

Hiebey bemerken wir nun folgendes: die Anzahl der in einer Verticalreihe befindlichen Producte ist immer in zwey zunächst auf einander folgende Verticalreihen gleich, und zwar

in der 1ten und 2ten ist die Anzahl der Producte 1
— 3ten und 4ten — — — 2
— 5ten und 6ten — — — 3
— 7ten und 8ten — — — 4
⋮ ⋮
- - (2n+1)ten und 2(n+1)ten - - - $\frac{2(n+1)}{2} = n+1$.

Man findet also die Anzahl der unter einander stehenden Producte in einer beliebigen Verticalreihe, wenn man zu der Zahl der Reihe, im Fall solche ungerade ist, eins addirt und diese Summe halbirt.

Ferner die höchste Ziffer des doppelten Products zweyer einfachen Zahlen ist höchstens von der 2ten Ordnung; denn 2. 9. 9 = 162, wo 2 von der nullten, 6 von der ersten und 1 von der zweyten Ordnung ist. Da nun 2. 9. 9 keine Ziffern höherer Ordnung geben, so kann das doppelte Product zweyer anderer einfachen Zahlen es um so weniger.

Die zur Ordnung r zugehörige Verticalreihe ist die (r+1)te, und die zu Nullten Ordnung gehörige ist die (2r+1)te. Nun glaubt sich vielleicht jemand berechtiget nach dem vorhergehenden zu schließen, daß in der (2r+1)ten Verticalreihe $\frac{2(r+1)}{2} = r+1$ Producte seyn müssen. Dieses wäre aber doch ganz falsch. Es ist nemlich hier noch eine Betrachtung zu machen, die wir oben absichtlich ausgelassen haben, um den Anfänger aufmerksam darauf zu machen, wie leicht man einen Beweis für richtig und vollständig halten kann, der es doch ganz und gar nicht ist.

Daß

Daß die Anzahl der Producte in der $(2n+1)$ten und $2(n+1)$ten Verticalreihe $= n+1$ sey, ist nur dann richtig, wann $2(n+1)$ kleiner oder gerade die Hälfte aller vorhandenen Verticalreihen ist.

Hier sind $(2r+1)$ Verticalreihen, daher muß $2(n+1) <$ oder $= \frac{2r+1}{2}$ seyn; da aber $2r+1$ eine ungerade Zahl ist, so kann $\frac{2r+1}{2}$ keine ganze Zahl, also auch nicht $2(n+1)$ gleich seyn, es muß daher $2(n+1) < \frac{2r+1}{2}$ seyn. Da $2r+1$ Verticalreihen vorhanden sind, so liegt eine in der Mitte, so daß sie auf jeder Seite r Verticalreihen hat; demnach kann $2(n+1)$ aufs höchste $= r$ seyn, und diese gehört zur $(r+1)$ten Ordnung.

Ist daher r eine gerade Zahl, so ist $\frac{r}{2}$, ist aber r ungerade, so ist $\frac{r+1}{2}$ die größte Anzahl von Producte, welche sich in einer Verticalreihe befinden.

Wenn ich sage, die $r$te Verticalreihe gehört zu $(r+1)$ten Ordnung, so zähle ich diese Reihen von der Linken zur Rechten; zählt man aber von der Rechten zur Linken, also von der Nullten Ordnung an, so gehört zur $r$ten Verticalreihe die $(r-1)$ Ordnung, und diese Reihe hat eben so viel Producte, als die zur $(r+1)$ten Ordnung gehörige.

Von der $(r+1)$ten Verticalreihe auf beyden Seiten gleich weit abstehende Reihen haben also immer gleich viel Glieder, mithin haben die zur nullten und ersten Ordnung gehörige Reihen nur 1 Glied, wie die zur $2r$ten und $(2r-1)$ten Ordnung gehörige Reihen u. s. f.

Der Plaz erlaubt nicht, diese sehr nützliche allgemeine Betrachtungen weiter auszudehnen, und an besondern Beispielen die Anwendung zu zeigen. Indessen wird ein heller Kopf aus dem bisher Gesagten doch richtig zu bestimmen im Stande seyn, in welchen Stellen die Theile eines Quadrats einer vieltheiligen Wurzel ihren Anfang nehmen.

VIII. Capitel.

Von der Rechnung mit Irrationalzahlen.

§. 326.

Wenn zwey oder mehr Irrationalformeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches, wie oben (§. 8.) gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammen schreibt. Nur ist bey dem Abkürzen zu bemerken, daß statt $\sqrt{a}+\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ geschrieben werde, und daß $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ einander aufhebe oder nichts gebe. Also diese Formel $3+\sqrt{2}$ und $1+\sqrt{2}$ zusammen addirt, giebt $4+2\sqrt{2}$ oder $4+\sqrt{8}$; ferner $5+\sqrt{3}$ und $4-\sqrt{3}$ zusammen addirt, giebt 9; ferner $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

§. 327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction, indem man nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt lesen und hernach die Größen addiren darf, wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ \underline{1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6}} \\ 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6} \end{array}$$

§. 328.

Bey der Multiplication ist nur zu merken, daß $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt, a giebt. Wenn aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

$1+\sqrt{1}$

$$\begin{array}{ll}
1+\sqrt{2} & 4+2\sqrt{2} \\
\underline{1+\sqrt{2}} & \underline{2-\sqrt{2}} \\
1+\sqrt{2} & 8+4\sqrt{2} \\
\underline{+\sqrt{2}+2} & \underline{-4\sqrt{2}-4} \\
1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} & 8-4=4.
\end{array}$$

§. 329.

Eben dieses gilt auch von den unmöglichen Größen; wobey nur zu merken, daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt, $-a$ giebt.

Wenn man den Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ suchen sollte, so geschähe solches, wenn man erstlich das Quadrat nimmt und dasselbe nochmals mit der Zahl $-1+\sqrt{-3}$ multiplicirt, wie folgt:

$$\begin{array}{l}
-1+\sqrt{-3} \\
\underline{-1+\sqrt{-3}} \\
+1-\sqrt{-3} \\
\underline{-\sqrt{-3}-3} \\
+1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3}=(-1+\sqrt{-3})^2 \\
\phantom{+1-2\sqrt{-3}-3=}\underline{-1+\sqrt{-3}} \\
\phantom{+1-2\sqrt{-3}-3=}+2+2\sqrt{-3} \\
\phantom{+1-2\sqrt{-3}-3=}\underline{-2\sqrt{-3}+6} \\
\text{also } (-1+\sqrt{-3})^3= \quad 2+6=8
\end{array}$$

§. 330.

Bey der Division hat man nur nöthig, schlechweg einen Bruch zu setzen, und alsdann kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so daß der Nenner rational wird. Denn wenn der Nenner $a+\sqrt{b}$ ist, und man oben und unten mit $a-\sqrt{b}$ multiplicirt, so wird der neue Nenner a^2-b seyn und hat also kein Wurzelzeichen mehr. Man dividire z. B. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$, so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten mit $1 - \sqrt{2}$, so bekommt man für den Zähler

$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 3+2\sqrt{2} \\ \quad -3\sqrt{2}-4 \\ \hline 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1 \end{array}$$

für den Nenner

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad -\sqrt{2}-2 \\ \hline 1-2=-1 \end{array}$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1, so bekommt man für den Zähler $+\sqrt{2}+1$, und für den Nenner $+1$.

Es ist auch wirklich $+\sqrt{2}+1$ eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; denn $\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt, giebt $3+2\sqrt{2}$, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 \\ \hline \text{giebt } 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

Ferner $8-5\sqrt{2}$ durch $3-2\sqrt{2}$ dividirt, giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3+2\sqrt{2}$, so bekommt man für den Zähler

$$\begin{array}{l} 8-5\sqrt{2} \\ \underline{3\cancel{8}+2\sqrt{2}} \\ 24-15\sqrt{2} \\ \quad +16\sqrt{2}-20 \\ \hline 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

und für den Nenner

$$\begin{array}{l} 3-2\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 9-6\sqrt{2} \\ \quad +6\sqrt{2}-4.2 \\ \hline 9-8=+1 \end{array}$$

Folglich ist der Quotient $4+\sqrt{2}$, wie folgende Probe zeigt:

$$\begin{array}{l} 4+\sqrt{2} \\ \underline{3-2\sqrt{2}} \\ 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-4 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}. \end{array}$$

§. 331.

Auf solche Weise können dergleichen Brüche immer in andere verwandelt werden, wovon der Nenner rational ist. Also wenn dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$ gegeben ist, und man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt: $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner: dieser Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$; ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ in $\frac{11+2\sqrt{30}}{1}$ $=11+2\sqrt{30}$ verwandelt.

§. 332.

Wenn in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$; ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

Zusatz. Die Analysten kommen bey ihren Untersuchungen öfters auf sonderbare Gleichungen. Z. B. wer sieht wohl auf den ersten Blick ein, daß $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ sey? und doch kann sich jeder sehr leicht davon auf folgende Art überzeugen:

Man quadrire diese Gleichung, so erhält man:

$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})}+1-\sqrt{-3}=6$$

oder $2+2\sqrt{1^2-(\sqrt{-3})^2}=6$

oder $2+2\sqrt{1-(-3)}=6$

also $2+2\sqrt{4}=6$

oder $2+2.2=6$.

Eben so findet man, daß $\sqrt{1+2\sqrt{-2}}+\sqrt{1-2\sqrt{-2}}=\sqrt{8}$ und $\sqrt{5-\sqrt{-11}}+\sqrt{5-\sqrt{-11}}=\sqrt{22}$ ist.

Ganz allgemein sey $\sqrt{a+\sqrt{-b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{-b}}$ gegeben, so ist $(\sqrt{a+\sqrt{-b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{-b}})^2=a+\sqrt{-b}\pm 2\sqrt{(a+\sqrt{-b})(a-\sqrt{-b})}+a-\sqrt{-b}=2a\pm 2\sqrt{a^2+b}$,

folglich $\sqrt{a+\sqrt{-b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{-b}}=\sqrt{2a\pm 2\sqrt{a^2+b}}$

Im ersten Beyspiele ist $a=1$ und $b=3$; im zweyten ist $a=1$ und $b=-8$ (denn $2\sqrt{-2}$ ist $=\sqrt{-8}$) und im 3ten Beyspiele ist $a=5$ und $b=11$.

Setzt man $a=b=1$, so erhält man $\sqrt{1+\sqrt{-1}}+\sqrt{1-\sqrt{-1}}=\sqrt{2\pm 2\sqrt{2}}$; da $2\sqrt{2}>2$ ist (denn $(2\sqrt{2})^2>2^2$), so ist für das $+$ Zeichen der Werth reel, für $-$ aber unmöglich oder imaginair.

Um

Um jedesmal $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2+b}}$ unter der Form $\sqrt{A}$ zu erhalten, so daß A rational ist, darf man nur $\sqrt{a^2+b} = x$ setzen, dieses giebt $b = x^2 - a^2$, wo man alsdann x nach Belieben annehmen kann.

Soll aber $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2+b}}$ rational werden, so überlege man, daß $\sqrt{2A}$ nicht anders rational ist, als wenn $A = 2c^2$. Daher setze man $a \pm \sqrt{a^2+b} = 2c^2$, also $2c^2 - a = \pm\sqrt{a^2+b}$ und $4c^4 - 4c^2a + a^2 = a^2 + b$, folglich $b = 4c^2(c^2 - a)$, da kann man c nach Gefallen annehmen, und hat $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2+b}} = \sqrt{4c^2} = 2c$.

IX. Capitel.

Von den Cubiczahlen zusammengesetzter Größen und von der Ausziehung der Cubicwurzeln.

§. 333.

Um den Cubus von der Wurzel $a + b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches $a^2 + 2ab + b^2$ ist, nochmals mit $a + b$ multipliciren, da dann der Cubus seyn wird:

$$\begin{array}{l}
a^2 + 2ab + b^2 \\
a + b \\
\hline
a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}$$

Dieser besteht also aus dem Cubus beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus $3a^2b + 3ab^2$, welches so viel ist als $(3ab).(a+b$; und dieses ist das dreyfache Product der beyden Theile mit der Summe derselben multiplicirt.

§. 334.

Wenn also die Wurzel aus zwey Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regel leicht finden, als z. B. da die Zahl $5 = 3 + 2$, so ist der Cubus davon $= 27 + 8 + 18.\ 5$, ist also $= 125$.

Es sey ferner die Wurzel $7 + 3 = 10$, so wird der Cubus $343 + 27 + 63.\ 10 = 1000$.

Um den Cubus von 36 zu finden, so setze man die Wurzel $36 = 30 + 6$ und der Cubus wird seyn:

$$27000 + 216 + 540.\ 36 = 46656.$$

Zusatz. Wenn die Wurzel vieltheilig (polynomisch) ist, so enthält die Cubiczahl die Würfel aller Theile, die dreyfachen Producte aus dem Quadrate der Summe aller vorhergehenden Theile in den nächst folgenden, und die dreyfachen Producte aus der Summe aller vorhergehenden Theile in das Quadrat des nächst folgenden.

Beweis:

Es sey $a + b + c + - - - x$ die vieltheilige Wurzel, so ist der Cubus davon

$$\begin{aligned} & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ & + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\ & + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 \\ & + 3(a+b+c+d)^2 e + 3(a+b+c+d)e^2 + e^3 \\ & + 3(a+b+c+d+e)^2 f + 3(a+b+c+d+e)f^2 + f^3 \\ & \vdots \\ & + 3(a+b+c+d+e - - + w)^2 x + 3(a+b+c+d+e - - \\ & \qquad + w)x^2 + x^3 \end{aligned}$$

Von der Richtigkeit dieser Producte überzeugt man sich folgendergestalt:

man setze $(a+b+c+ - - - - + w + x)^3 = (A + x)^3 =$
$= A^3 + 3A^2x + 3Ax^2 + x^3.$

Nun ist

$$3A^2x + 3Ax^2 + x^3 = 3(a+b+c+d+e - - + w)^2x + 3(a + b + c + d + e - - - w)x^2 + x^3$$

Setzt man wieder $A^3 = (B + w)^3 = B^3 + 3B^2 w + 3Bw^2 + w^2$, so giebt $3B^2w + 3Bw^2 + w^3$ die zweyte Reihe von unten, und B hat wiederum einen Theil weniger als A.

Eben

Eben so kann jetzt wieder $B^3 = (C + v)^3 = C^3 + 3C^2v + v^3$ setzen, wo C wieder ein Theil weniger als B hat. Fährt man immer so fort, so werden zuletzt nur die zwey Theile $a + b$ übrig bleiben, deren Cubus die oberste Reihe giebt.

Stellen a, b, c, d - - - x bloß einfache Zahlen vor, so ist $\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + \overset{r-3}{d} - - - \overset{0}{x}$ eine $r + 1$ ziffrigte Zahl, und

$$\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} - - - + \overset{0}{x}\right)^3 =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \overset{3r}{a^3} + \overset{3r-1}{3a^2b} + \overset{3r-2}{3ab^2} + \overset{3r-3}{b^3} \\ \quad + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b}\right)^2 \overset{r-2}{c} + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b}\right) \overset{2r-4}{c^2} + \overset{r-6}{c^3} \\ \quad + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c}\right)^2 . \overset{r-3}{d} + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c}\right) . \overset{2r-6}{d^2} + \overset{3r-9}{d^3} \\ \quad \vdots \\ \quad + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + - - \overset{1}{w}\right)^2 \overset{0}{x} + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + - - \overset{1}{w}\right) \overset{0}{x^2} + \overset{0}{x^3} \end{array}\right.$$

Hieraus siehet man, in welchen Stellen die Theile eines Würfels einer vieltheiligen Wurzel anfangen.

§. 335.

Wenn aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nemlich $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemerken.

Erstlich wenn der Cubus nach der Potenz eines Buchstaben ordentlich geschrieben wird, so erkennt man aus dem ersten Gliede a^3 so gleich das erste Glied der Wurzel a, dessen Cubus jenem gleich ist, und wenn man denselben wegnimmt, so behält man diesen Rest: $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, aus welchem das zweyte Glied der Wurzel gefunden werden muß.

§. 336.

Da wir nun schon wissen, daß das zweyte Glied $+ b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie dasselbe aus dem obigen Rest gefunden werden könne. Es läßt sich aber derselbe Rest durch folgende zwey Facto-

Factoren ausdrücken: $(3a^2 + 3ab + b^2) \,.\, b$; wenn man also den Rest durch $3a^2 + 3ab + b^2$ dividirt, so erhält man das verlangte zweyte Glied der Wurzel, nemlich $+ b$.

§. 337.

Weil aber das zweyte Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt; allein es ist genug, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher $3a^2$ ist, oder das dreyfache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andre Theil b finden, woraus hernach der Divisor vollständig gemacht werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß daher alsdann zu $3a^2$ noch $3ab$ hinzufügen, das ist das dreyfache Product des ersten Theils mit dem andern, und hernach b^2, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

§. 338.

Es sey z. B. dieser Cubus gegeben:

$$\begin{array}{r|l}
 & a^3 + 12a^2 + 48a + 64 \,(a + 4 \\
 & a^3 \\
\hline
3a^2 + 12a + 16 & + 12a^2 + 48a + 64 \\
 & + 12a^2 + 48a + 64 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Es sey ferner dieser Cubus gegeben:

$$\begin{array}{r|l}
 & a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \,(a^2 - 2a + 1 \\
 & a^6 \\
\hline
3a^4 - 6a^3 + 4a^2 & - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 \\
 & - 6a^5 + 12a^4 - 8a^3 \\
\hline
3a^4 - 12a^3 + 12a^2 + 3a^2 - 6a + 1 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
 & 3a^4 - 12a^2 + 15a^2 - 6a + 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

§. 339.

§. 339.

Hierauf gründet sich auch die gemeine Regel, die Cubicwurzeln aus Zahlen zu finden. Z. B. mit der Zahl 2197, welche sich durch die allgemeine Formel, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, vorstellen läßt, wird die Rechnung also angestellt:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2197\,(\overset{a}{10}+\overset{b}{3}=13 \\
a^3 = 1000 & \\
\hline
3a^2 = 300 & 1197 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
3ab = 90 & \\
b^2 = 9 & \\
\hline
3a^2+3ab+b^2 = 399 & 1197 = (3a^2+3ab+b^2).b \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Es sey ferner der Cubus 34965783 gegeben, woraus die Cubicwurzel gefunden werden soll.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 34965783\,(300+20+7=327 \\
 & 28000000 \\
\hline
270000 & 7965783 \\
18000 & \\
400 & \\
\hline
288400 & 5768000 \\
\hline
307200 & 2197783 \\
6720 & \\
49 & \\
\hline
313969 & 2197783 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

X. Capitel.

Von den höhern Potenzen zusammengesetzter Größen.

§. 340.

Nach den Quadrat- und Cubiczahlen folgen die höhern Potenzen, welche durch Exponenten, wie schon oben gemeldet worden ist, angezeigt zu werden pflegen, nur muß man die Wurzel, wenn sie zusammengesetzt ist, in Klammern einschließen. Also deutet $(a+b)^5$ die fünfte Potenz von $a+b$, und $(a-b)^6$ die sechste Potenz von $a-b$ an. Wie aber diese Potenzen entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeigt werden.

§. 341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potenz, so werden die höhern Potenzen durch die Multiplication folgendergestalt gefunden:

$$
\begin{array}{rl}
(a+b)^1 = & a+b \\
 & a+b \\
\hline
 & a^2+ab \\
 & \quad +ab+ab \\
\hline
(a+b)^2 = & a^2+2ab+b^2 \\
 & a+b \\
\hline
 & a^3+2a^2b+ab^2 \\
 & \quad +a^2b+3ab^2+b^3 \\
\hline
(a+b)^3 = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
 & a+b \\
\hline
 & a^4+3a^3b+a^2b^2+ab^3 \\
 & \quad +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
\hline
(a+b)^4 = & a^4 4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
 & a+b \\
\hline
 & a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4 \\
 & \quad +a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5 \\
\hline
(a+b)^5 = & a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\
 & a+b \\
\hline
 & a^6+5a^5b+10a^4b^2+10a^3b^3+5a^2b^4+ab^5 \\
 & \quad +a^5b+5a^4b^2+10a^3b^3+10a^2b^4+5ab^5+b^6 \\
\hline
(a+b)^6 = & a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6
\end{array}
$$

u. s. f.

§. 342.

Eben so werden auch die Potenzen von der Wurzel a — b gefunden, welche von den vorigen nur darin unterschieden sind, daß das 2te, 4te, 6te, kurz jedes gerade Glied das Zeichen minus bekommt, wie aus folgendem zu ersehen:

$$(a-b)^1 = a-b$$
$$a-b$$
$$a^2-ab$$
$$-ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$a-b$$
$$a^3-2a^2b+2b^2$$
$$-a^2b+2ab^2-b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a-b$$
$$a^4-3a^3b+3a^2b^2-ab^3$$
$$-a^3b+3a^2b^2-3ab^3+b^4$$
$$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$
$$a-b$$
$$a^5-4a^4b+6a^3b^2-4a^2b^3+ab^4$$
$$-a^4b+4a^3b^2-6a^2b^3+4ab^4-b^5$$
$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$
$$a-b$$
$$a^6-5a^5b+10a^3b^2-10a^3b^3+5a^2b^4-ab^5$$
$$-a^5b+5a^4b^2-10a^3b^3+10a^2b^4-3ab^5+b^6$$
$$(a-b)^6=a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$$

u. s. f.

Hier bekommen nemlich alle ungerade Potenzen von b das Zeichen $-$, die geraden aber behalten das Zeichen $+$, wovon der Grund offenbar ist; denn da in der Wurzel $-b$ steht, so gehen die Potenzen davon folgendergestalt fort: $-b$, $+b^2$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$, u. s. f., wo die geraden Potenzen alle das Zeichen $+$, die ungeraden aber das Zeichen $-$ haben.

§. 343.

§. 343.

Es kommt hier aber diese wichtige Frage vor, wie ohne diese Rechnung wirklich fortzusetzen, alle Potenzen sowohl von $a+b$ als von $a-b$ gefunden werden können? Wobey vor allen Dingen zu merken, daß wenn man die Potenzen von $a+b$ anzugeben im Stande ist, daraus von selbst die Potenzen von $a-b$ entstehen, denn man darf nur die Zeichen der geraden Glieder, nemlich des 2ten, 4ten, 6ten, 8ten u. s. f. verändern. Es kommt daher hier darauf an, eine Regel festzusetzen, nach welcher eine jede Potenz von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, gefunden werden könne, ohne daß man nöthig habe die Rechnung durch alle vorhergehende anzustellen.

§. 344.

Wenn man bey den oben gefundenen Potenzen die Zahlen, die einem jeden Gliede vorgesetzt sind, wegläßt, welche Zahlen die Coefficienten genannt werden, so bemerkt man in den Gliedern eine sehr schöne Ordnung. Denn erstlich kömmt eben die Potenz von a vor, welche verlangt wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potenzen von a immer um eins niedriger, die Potenzen von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summe der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Wenn man also die zehnte Potenz von $a+b$ verlangt, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fort gehen:

$a^{10}, a^9b^1, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, a^1b^9, b^{10}$

Zusatz. Die Glieder der nten Potenz von $a+b$ würden ohne Coefficienten in folgender Ordnung stehen:

$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, a^{n-3}b^3, --- a^{n-r}b^r --- a^{n-n}b^n.$

Von vorne an gezählt ist $a^{n-r}b^r$ das $(r+1)$te Glied, und $a^{n-n}b^n = b^n$ ist das $n+1$ und letzte Glied, also bestehet jede Potenz einer zweytheiligen Größen aus so viel einzelnen Glieder,

als

als der um 1 vermehrte Exponent anzeigt. Es versteht sich, daß der Exponent eine ganze Zahl seyn muß.

§. 345.

Es muß also nur noch gezeigt werden, wie man die dazu gehörigen Coefficienten finde, oder mit welchen Zahlen ein jedes Glied multiplicirt werden soll. Was das erste Glied anbetrift, so ist sein Coefficient immer 1 und bey dem zweyten Gliede ist der Coefficient allemal der Exponent der Potenz selbst. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemerken. Inzwischen wenn diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, so kann man leicht so weit gehen als man will, wie aus folgender Tabelle zu sehen:

Potenz: I.	: : : : :	Coefficienten 1, 1.
II.	: : : : : : :	1, 2, 1.
III.	: : : : : : :	1, 3, 3, 1.
IV.	: : : : : :	1, 4, 6, 4, 1.
V.	: : : : :	1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI.	: : : :	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII.	: : :	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII.	: :	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX.	:	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X.		1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

u. s. f.

Also wird von $a + b$ die zehnte Potenz seyn:

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

§. 346.

Bey diesen Coefficienten ist zu merken, daß die Summe derselben für jede Potenz die gleiche Potenz von 2 geben müsse. Denn man setze $a = 1$, und $b = 1$, so wird ein jedes Glied außer dem Coefficienten $= 1$, so daß nur die Coefficienten zusammen genommen werden müssen. Daher denn die zehnte Potenz seyn wird $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

Iste $1+1 = 2 = 2^1$.
IIte $1+2+1 = 4 = 2^2$.
IIIte $1+3+3+1 = 8 = 2^3$.
IVte $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$.
Vte $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.
VIte $1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$.
VIIte $1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 = 2^7$.
u. s. f.

§. 347.

Bey diesen Coefficienten ist noch zu merken, daß sie vom Anfang bis in die Mitte steigen, hernach aber in eben der Ordnung wieder abnehmen. Bey den geraden steht der größte in der Mitte, bey den ungeraden aber sind zwey mittlere, welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung selbst aber verdient noch genauer in Erwägung gezogen zu werden, damit man dieselben für eine jede Potenz finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regel gegeben werden soll; der Beweis aber davon wird in folgenden Capiteln geführt werden.

§. 348.

Um die Coefficienten für eine gegebene Potenz, als z. B. die siebente zu finden, so schreibe man folgende Brüche der Ordnung nach hinter einander:

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7}.$$

wo nemlich die Zähler von dem Exponenten der verlangten Potenz anfangen und immer um eins vermindert

mindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. f. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweyten Coefficienten; die zwey ersten Brüche mit einander multiplicirt den dritten, die drey ersten mit einander multiplicirt den vierten u. s. f.

Also ist der erste Coefficient $= 1$, der 2te $= \frac{7}{1} = 7$, der 3te $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2} = 21$, der 4te $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3} = 35$, der 5te $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3}.\frac{4}{4} = 35$, der 6te $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3}.\frac{4}{4}.\frac{3}{5} = 21$, der 7te $= 21.\frac{1}{3} = 7$, der 8te $= 7.\frac{1}{7} = 1$.

§. 349.

Also für die zweyte Potenz hat man diese Brüche $\frac{2}{1}.\frac{1}{2}$, daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{2}{1} = 2$, der 3te $2.\frac{1}{2} = 1$.

Für die dritte Potenz hat man diese Brüche: $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$, daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{3}{1} = 3$, der 3te $3.\frac{2}{2} = 3$, der 4te $\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3} = 1$.

Für die vierte Potenz hat man diese Brüche: $\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$, daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{4}{1} = 4$, der 3te $\frac{4}{1}.\frac{3}{2} = 6$, der 4te $\frac{4}{3}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3} = 4$, der 5te $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4} = 1$.

§. 350.

Diese Regel schaft uns also den Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wissen, sondern sogleich für eine jede Potenz die dahin gehörigen Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potenz schreibt man diese Brüche: $\frac{10}{1}, \frac{9}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}, \frac{1}{10}$. Daher bekommt man den ersten Coefficient $= 1$, den zweyten Coefficient $= \frac{10}{1} = 10$.

den 3ten $= 10.\frac{9}{2} = 45$, den 4ten $= 45.\frac{8}{3} = 120$,
den 5ten $= 120.\frac{7}{4} = 210$, den 6ten $= 210.\frac{6}{5} = 252$,
den 7ten $= 252.\frac{5}{6} = 210$, den 8ten $= 210.\frac{4}{7} = 120$,
den 9ten $= 120.\frac{3}{8} = 45$, den 10ten $= 45.\frac{2}{9} = 10$,
den 11ten $= 10.\frac{1}{10} = 1$.

§. 351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben ohne den Werth derselben zu berechnen, und auf diese Art wird es leicht seyn, eine jede Potenz von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, hinzuschreiben.

Also ist die 100te Potenz von $a+b$ oder $(a+b)^{100}$ $= a^{100} + \frac{100}{1} a^{99}b + \frac{100.99.}{1.\ 2} a^{98}b^2 + \frac{100.99.98.}{1.\ 2.\ 3} a^{97}b^3 + \frac{100.99.\ 98.97.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} a^{96}b^4$ u. s. f. woraus die Ordnung der folgenden Glieder leicht zu ersehen.

Zusatz. Die nte Potenz von $(a+b)$ ist also nach dieser Regel folgende:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.\, a^{n-1}b^1 + \frac{n\ n\text{-}1}{1.\ 2.}\, a^{n-2}b^2 + \frac{n.n\text{-}1.n\text{-}2}{1.\ 2.\ 3.}\, a^{n-3}b^3 + - - - + \frac{n.\,n\text{-}1.\,n\text{-}2.\,-\,-\,-(n\text{-}(r\text{-}1))}{1.\ 2.\ 3.\ -\ -\ -\ -\ r}\, a^{n-r}b^r + - - - \frac{n.\,n\text{-}1.\,n\text{-}2.\,-\,-(n\text{-}(n\text{-}1))}{1.\ 2.\ 3.\ -\ -\ -\ n}\, a^{n-n}b^n.$$

Der Exponent n ist, wie vorausgesetzt wird, eine ganze Zahl. Der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes (§. 344.) ist $\frac{n.\,n\text{-}1.\,n\text{-}2.\,-\,-\,(n\text{-}(r\text{-}1))}{1.\ 2.\ 3.\ -\ -\ -\ r}$, und das letzte oder $(n+1)$te Glied ist $\frac{n.\,n\text{-}1.\,n\text{-}2\,-\,-\,(n\text{-}(n\text{-}1))}{1.\ 2.\ 3\ -\ -\ -\ n}\, a^{n-n}b^n = b^n$.

Setzt man $a = b = 1$, so erhält man

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n\ n\text{-}1}{1.\ 2.} + \frac{n.\,n\text{-}1.\,n\text{-}2.}{1.\ 2.\ 3} + - - = \frac{n.\,n\text{-}1.\,n\text{-}2.\,-\,-\,(n\text{-}(r\text{-}1))}{1.\ 2.\ 3.\,-\,-\,(r\text{-}1).\ r} + - - -$$

Dieses letztere ist ein allgemeiner Beweis 346 §.

XI. Capitel.

Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweis der vorigen Regel beruhet.

§. 352.

Wenn man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurückgehet, so wird man finden, daß jedes Glied so oft vorkommt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen lassen, als z. B. bey der zweyten Potenz, kommt das Glied ab zweymal vor, weil man ab und ba schreiben kann; hingegen kommt daselbst a^2 oder aa nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bey der dritten Potenz kann das Glied a^2b oder aab auf dreyerley Weise geschrieben werden, als aab, aba, baa, und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bey der vierten Potenz kann das Glied a^3b, oder aaab, auf viererley Weise versetzt werden, als aaab, aaba, abaa, baaa, deswegen ist auch sein Coefficient 4, und das Glied aabb hat 6 zum Coefficienten, weil sechs Versetzungen statt finden, aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab. Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

§. 353.

In der That, wenn man erwäget, daß z. B. die vierte Potenz von einer jeden Wurzel, wenn dieselbe auch aus mehr als zwey Gliedern besteht, als $(a+b+c+d)^4$ gefunden wird, wenn diese vier Factoren mit einander multiplicirt werden: I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$, so muß jeder Buchstabe des ersten mit einem jeden des andern, und ferner mit einem jeden

jeden des dritten, und endlich noch mit einem jeden des vierten multiplicirt werden, daher ein jedes Glied aus 4 Buchstaben bestehen und so vielmal vorkommen wird, als sich desselben Buchstaben unter einander versetzen lassen, woraus denn sein Coefficient bestimmt wird.

§. 354.

Hier kommt es also darauf an zu wissen, wie vielmal eine gewisse Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobey insonderheit darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Denn wenn alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfachen Potenzen, als a^2, a^3, a^4 u. s. f. alle 1 zum Coefficienten haben.

§. 355.

Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bey zweyen, nemlich ab anfangen, wo offenbar zwey Versetzungen statt finden, als ab, ba.

Hat man drey Buchstaben abc, so ist zu merken, daß ein jeder die erste Stelle haben könne, da denn die zwey übrigen zweymal versetzt werden können. Wenn also a zuerst steht, so hat man zwey Versetzungen abc, acb; steht b zuerst, so hat man wieder zwey, bac, bca; und eben so viel, wenn c zuerst steht, cab, cba. Daher in allem die Zahl der Versetzungen $3 . 2 = 6 = 3 . 2 . 1$ seyn wird.

Hat man vier Buchstaben abcd, so kann ein jeder die erste Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drey übrigen sechs Versetzungen. Daher in allem die Anzahl der Versetzungen $4 . 6 = 24 = 4 . 3 . 2 . 1$ seyn wird.

Hat man fünf Buchstaben abcde, so kann ein jeder die erste Stelle haben und für jede lassen sich die vier übrigen 24 mal versetzen. Daher die Anzahl aller Versetzungen 5. 24 = 120 = 5. 4. 3. 2. 1.

§. 356.

So groß nun auch immer die Anzahl der Buchstaben seyn mag, wenn dieselben nur alle ungleich unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen ganz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu ersehen.

Anzahl der Buchstaben:	Anzahl der Versetzungen:
I.	1 = 1
II.	2. 1 = 2
III.	3. 2. 1 = 6
IV.	4. 3. 2. 1 = 24
V.	5. 4. 3. 2. 1 = 120
VI.	6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720
VII.	7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5040
VIII.	8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320
IX.	9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 362880
X.	10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 3628800

§. 357.

Es ist aber wohl zu merken, daß diese Zahlen nur alsdann statt finden, wenn alle Buchstaben unter sich ungleich sind, denn wenn zwey oder mehr einander gleich sind, so wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer; und wenn gar alle einander gleich sind, so hat man nur eine einzige. Wir wollen also sehen, wie nach der Anzahl der gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müssen.

§. 358.

Sind zwey Buchstaben einander gleich, so werden die zwey Versetzungen nur für eine gerechnet. Daher die obige Zahl auf die Hälfte gebracht oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drey Buchstaben

ben einander gleich, so werden 6 Versetzungen nur für eine gerechnet; daher die obigen Zahlen durch $6 = 3 . 2 . 1$ getheilt werden müssen. Eben so wenn vier Buchstaben einander gleich sind, so müssen die obigen Zahlen durch 24, das ist durch $4 . 3 . 2 . 1$ getheilt we den u. s. f.

Hieraus kann man nun bestimmen, wie vielmal diese Buchstaben aaabbc versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, und sie würden, wenn sie ungleich wären, $6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$ Versetzungen zulassen. Weil aber hier a dreymal vorkommt, so muß diese Zahl durch $3 . 2 . 1$, und weil b zweymal vorkommt, noch ferner durch $2 . 1$ getheilt werden, daher die Anzahl der Versetzungen $= \frac{6.5.4.3.2.1.}{3.2.1.2.1.} = 5 . 4 . 3 . = 60$ seyn wird.

§. 359.

Hieraus können wir nun die Coefficienten eines jeden Gliedes für eine jede Potenz bestimmen, welches wir z. B. für die siebente Potenz $(a+b)^7$ zeigen wollen. Das erste Glied ist a^7, welches nur einmal vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen $7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$, wenn sie alle ungleich wären. Da aber im zweyten Gliede a^6b, sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch $6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$ getheilt werden, daher der Coefficient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1.} = \frac{7}{1} = 7$ seyn wird.

Im dritten Gliede a^5b^2 kommt a fünfmal und b zweymal vor, daher die obige Zahl erstlich durch $5 . 4 . 3 . 2 . 1$ und noch durch $2 . 1$ getheilt werden muß, daher der Coefficient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1.}{5.4.3.2.1.1.2.} = \frac{7.6.}{1.2.}$ seyn wird.

Im vierten Gliede a^4b^3 steht a viermal und b dreymal; daher die obige Zahl erstlich durch $4 . 3 . 2 . 1$

und hernach noch durch 3.2.1 oder 1.2.3 getheilt werden muß, da denn der Coefficient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3}$ $= \frac{7.6.5}{1.2.3}$ seyn wird.

Eben so wird für das fünfte Glied a^3b^4 der Coefficient $= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ u. s. f., wodurch die oben gegebene Regel erwiesen wird.

§. 360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter, und lehret, wie man auch von solchen Wurzeln, die aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potenzen finden soll. Wir wollen dieses nur mit der dritten Potenz von $a + b + c$ erläutern, worin alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müssen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficienten haben wird, also wird die dritte Potenz oder $(a+b+c)^3$ seyn:

$$a^3 + 3aab + 3aac + 3abb + 6abc + 3acc + b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3.$$

Laßt uns setzen, es sey $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, so wird der Cubus von $1 + 1 + 1$, das ist von 3,

$$1 + 3 + 3 + 3 + 6 + 3 + 1 + 3 + 3 + 1 = 27 \text{ seyn.}$$

Setzt man $a = 1$, $b = 1$ und $c = -1$, so wird der Cubus von $1 + 1 - 1$, das ist von 1,

$$1 + 3 - 3 + 3 - 6 + 3 + 1 - 3 + 3 - 1 = 1 \text{ seyn.}$$

1. Zusatz. Der Unterschied zwischen Permutationen und Combinationen ist folgender:

Permutationen sind die Versetzungen, welche bey einer gegebenen Anzahl von Dingen möglich sind, z. B. die Permutationen von drey Dingen a, b, c sind folgende: abc, acb, bac, bca, cab, cba, wie in diesem Capitel gelehrt worden.

Combinationen (Verbindungen) entstehen, wenn man aus einer gegebenen Anzahl von Dingen je 2, je 3, je 4 u. s. f. auf alle mögliche Arten verbindet, doch so, daß keine Versetzungen irgend einer Combination zugelassen werden.

Z. B. die

Z. B. die Combinationen von den 3 Dingen a, b, c, sind folgende: nimmt man von diesen 3 Dingen je 1 und 1, so hat man 3 Combinationen, nemlich a, b und c, welche man auch einfache Verbindungen, oder wenn man nach Graden zählen will, Verbindungen vom ersten Grade nennet. Verbindet man je 2 und 2 dieser Dinge, so hat man 3 zweyfache Verbindungen, oder 3 Verbindungen vom 2ten Grade oder Amben, nemlich ab, ac, und bc.

Verbindet man je 3 und 3 diese Dinge, so erhält man nur eine einzige dreyfache Verbindung, oder eine einzige Verwechselung vom dritten Grade oder Terne, nemlich abc.

Höhere Combinationen können aus 3 Dingen ohne Wiederholung nicht gemacht werden. Da aber bey dem Combiniren zuweilen erlaubt ist, ein Ding öfter als einmal zu setzen, zuweilen nicht, so entstehen zwey Arten von Combinationen,

nemlich 1) mit Wiederholungen,
und 2) ohne Wiederholungen.

Diese 2te Art von Combination ist die eben gezeigte. Sollen jene 3 Dinge mit Wiederholungen combinirt werden, so giebt es folgende Combinationen:

Amben aa, ab, ac, bb, bc, cc.
Ternen aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc.
Quaternen aaaa, aaab, aaac, aabb u. s. f.

Jede Ambe, Terne, Quaterne u. s. f. nennt man eine Complexion. Jede einzelne Complexion ist öfters noch mehrerer Versetzungen fähig. Z. B. die Complexionen aa, bb, cc, oder aaa, bbb u. s. f. sind keiner Versetzungen, aber ab, ac, bc u. s. f. folgender Versetzungen fähig: ba ca, cb u. s. f. Werden nun diese Versetzungen, die jede einzelne Complexion zuläßt, mitgenommen, so entstehen Variationen.

Die Variationen gehen also aus der Vereinigung von Combinationen und Permutationen hervor. Sie unterscheiden sich von den Combinationen bloß dadurch, daß bey dem Variiren alle Versetzungen, die jede einzelne Complexion zuläßt, mitgenommen werden müssen.

Um die Permutationen, Combinationen und Variationen gegebener Dinge bequem zu finden, bezeichne man die gegebenen Dinge nach der Reihe mit den Ziffern 1, 2, 3 u. s. f. wie folget:

$\overset{1}{a}, \overset{2}{b}, \overset{3}{c}, \overset{4}{d}$ u. s. f. Eine solche bezifferte Reihe gegebener Dinge heißt index oder indiculus.

Sind also die drey Dinge a, b, c gegeben, so ist der index $\overset{1}{a}, \overset{2}{b}, \overset{3}{c}$.

I.) Um alle **Permutationen** von diesen drey Dingen zu erhalten, nehme man aus unserm bekannten Zahlensystem alle Zahlen, die mit den drey Ziffern 1, 2, 3 geschrieben werden, in der Ordnung, wie sie im Zahlensysteme folgen, nemlich 123, 132, 213, 231, 312, 321. Legt man diesen Zahlen nach dem Index die Buchstaben unter, so sind die gesuchten Permutationen folgende:

123, 132, 213, 231, 312, 321,
abc acb bac bca cab cba

II.) **Combinationen** aus diesen drey gegebenen Dingen.

Um alle Amben, Ternen, Quaternen u. s. f. zu erhalten, schreibe man alle zwey- drey- vierziffrige Zahlen u. s. f. auf, die bloß die Ziffern 1, 2, 3 enthalten. Aber um keine Versetzungen zu erhalten, behalte man bloß diejenigen Zahlen, in welchen die Ziffern in eben der Ordnung stehen, als in der Reihe der einzelnen gegebenen Dinge, d. h. man lasse alle Zahlen, wie 21, 31, desgleichen 231, 312 u. s. f. weg, wo eine größere Ziffer vor einer kleinern steht.

1. **Combinationen mit Wiederholungen:**

Amben 11, 12, 13, 22, 23, 33
aa, ab, ac, bb, bc, cc

Ternen 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333
aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc

Quaternen 1111, 1112, 1113, 1122, 1123
aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, u. s. f.

2. **Combinationen ohne Wiederholungen:**

Amben 12, 13, 23
ab, ac, bc.

Ternen 123
abc

Quaternen und höhere Combinationen können aus 3 Dingen, wie schon oben gesagt ist, ohne Wiederholungen nicht gemacht werden.

III.) **Variationen** aus eben den drey Dingen:

Man verfahre wie in II. bey den Combinationen, nur daß man von allen Zahlen, die mit den drey Ziffern 1, 2, 3 geschrieben werden können, keine einzige weglassen darf. Man erhält daher folgende:

Amben 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33
aa, ab, ac, ba, ab, bc, ca, cb, cc

Ternen 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133
aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc
211, 212 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233
baa, bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc
311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333
caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc

Quat. 1111,1112,1113,1121,1122,1123,1131,1132,1133
aaaa, aaab, aaac, aaba, aabb, aabc, aaca, aacb, aacc
1211,1212,1213, 1221,1222,1223,1231,1232,1233
abaa, abab, abac, abba, abbb, abbc, abca, abcb, abcc
1311,1312,1313 1321,1322,1323,1331,1332,1333
acaa, acab, acac, acba, acbb, acbc, acca, accb, accc
2111,2112,2113 2121,2122,2123,2131,2132,2133
baaa, baab, baac, baba, babb, babc, baca, bacb, bacc
2211,2212,2213 2221,2222,2223 2231 2232,2233
bbaa, bbab, bbac, bbba, bbbb, bbbc, bbca, bbcb, bbcc
2311,2312 2313,2321,2322,2323,2331,2332,2333
bcaa, bcab, bcac, bcba, bcbb, bcbc, bcca, bccb, bccc
3111,3112,3113,3121, 3122 3123,3131,3132,3133
caaa, caab, caac, caba, cabb, cabc, caca, cacb, cacc
3211,3212,3213,3221,3222,3223,3231,3232,3233
cbaa, cbab, cbac, cbba, cbbb, cbbc, cbca, cbcb, cbcc
3311,3312,3313,3321,3322,3323,3331,3332,3333
ccaa, ccab, ccac, ccba, ccbb, ccbc, ccca, cccb, cccc
u. s. f.

Variationen sind unter allen combinatorischen Arbeiten die leichtesten. Denn auch ohne Gebrauch von jenen Ziffern zu machen, wird diese Arbeit äußerst leicht auf folgende Art verrichtet.

Man schreibe die gegebenen Dinge, a, b, c u. s. f., die man variiren soll, sowohl horizontal, als auch vertical nach der Reihe, wie sie folgen, hin, und verfahre, wie folgendes Schema genugsam zeigt, so erhält man die Amben.

	a,	b,	c,	d - - -
a	aa,	ab,	ac,	ad - - -
b	ba,	bb,	bc,	bd - - -
c	ca,	cb,	cc,	cd - - -
d	da,	db,	dc,	dd - - -

Um die Ternen zu finden, verfahre man, wie folgendes Schema deutlich vor Augen liegt:

	aa,	ab,	ac,	ad,	ba,	bb,	bc ---
a	aaa,	aab,	aac,	aad,	aba,	abb,	abc ---
b	baa,	bab,	bac,	bad,	bba,	bbb,	bbc, ---
c	caa,	cab,	cac,	cad,	cba,	cbb,	cbc ---
d	daa,	dab,	dac,	dad,	dba,	dbb,	dbc ---
:	:	:	:	:	:	:	:

Wie die Quaternen gefunden werden, zeigt folgendes Schema:

	aa,	ab	ac,	ad,	ba,	bb,	bc ---
aa	aaaa,	aaab,	aaac,	aaad,	aaba,	aabb,	aabc ---
ab	abaa,	abab	abac,	abad,	abba	abbb,	abbc ---
ac	acaa	acab	acac	acad,	acba,	acbb,	acbc ---
ad	adaa,	adab,	adac,	adad,	adba,	adbb,	adbc ---
:	:	:	:	:	:	:	:

u. s. f.

Man sieht deutlich, daß durch obige Verbindung der einzelnen Dinge mit einander die Amben, durch Verbindung der Amben mit den einzelnen Dingen die Ternen entstehen. Die Quaternen entstehen durch Verbindung der Amben selbst u. s. f.

Ich könnte hier noch manches Lehrreiche mittheilen, wenn es der Platz erlaubte; übergehen darf ich aber nicht, daß die hier von mir mitgetheilte Definitionen von Permutationen, Combinationen (mit und ohne Wiederholung) und Variationen, ganz dem Hindenburgischen Begriff gemäß sind. Dieser große Analyst hat sich durch seine erfundene combinatorische Analytik einen unsterblichen Ruhm erworben. Anfänger erhalten von diesem ganz neuen Zweige der Analysis einen kurzen aber deutlichen Unterricht in einer kleinen vortreflichen Schrift des Herrn Prof. Fischer: über den Ursprung der Theorie der Dimensionszeichen und ihr Verhältniß gegen die combinatorische Analytik des Herrn Prof. Hindenburg. Halle, 1794. 4.

2. Zusatz. Noch will ich hier einige allgemeine Formeln mit ihren Anwendungen mittheilen.

Formel für alle Permutationen von N verschiedenen Dingen.

$n.(n-1)(n-2)\ ---\ 1.$ oder $1.2.3.\ ---\ n$, sind darunter m gleiche Größen, so ist die Anzahl der Permutationen: $= n.(n-1)(n-2)\ ---\ (m+1)$ oder $(m+1)(m+2)\ m+3)\ ---\ n$; wären überdem noch p und r gleiche Buchstaben vorhanden, so giebt $\frac{n.(n-1)(n-2)\ --\ (m+1)}{1.2.3.\ --\ p.\ 1.2.3.\ --\ r}$ die möglichen Permutationen.

Aufg.

Aufg. Wie viel verschiedene 9 ziffrige Zahlen können mit den 9 bekannten Zahlzeichen geschrieben werden?

Aufl. $1.2.3.4.5.\cdots 9 = 362880.$

Aufg. Wie oft können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden?

Aufl. $1.2.3 \cdots 24 = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000$

Wenn alle Buchstaben dieser Permutationen sollten auf einer Fläche geschrieben werden, und man einem Buchstaben, auch nur eine Quadratlinie, Raum einräumt, so müßte diese Fläche doch 144000mal größer, als die Oberfläche der Erde seyn. Alle jetzt lebende Menschen auf dem ganzen Erdboden würden in 1000 Millionen Jahren nicht alle mögliche Versetzungen der 24 Buchstaben schreiben können, wenn auch jeder täglich 40 Seiten schreibt, deren jede 40 verschiedene Versetzungen der 24 Buchstaben enthält.

3. Zusatz. Formeln für Combinationen mit Wiederholungen von n verschiedenen Dingen:

Amben $= \frac{n.(n+1)}{1.\ 2.}$; Ternen $= \frac{n.(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}$; Quaternen $= \frac{n.(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$; also Rnen $= \frac{n.(n+1)(n+2) \cdots (n+(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\ 4. \cdots r}$

4. Zusatz. Formeln für Combinationen ohne Wiederholungen von n verschiedenen Dingen.

Amben $= \frac{n.(n-1)}{1.\ 2.}$; Ternen $= \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$; Quaternen $\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$, folglich Rnen $= \frac{n.(n-1)(n-2) \cdots (n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\ 4 \cdots r}$.

Aufg. Wie viel Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen sind in der Berliner Zahlen-Lotterie?

Aufl. Da die Zahlenlotterie 90 Nummern erhält, so sind die Anzahl der Amben $= \frac{90.89}{1.\ 2.} = 4005$; Ternen $= \frac{90.89.88}{1.\ 2.\ 3.} = 117480$; Quaternen $= \frac{90.\ 89.\ 88.\ 87.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} = 2555190$; und Quinternen $= \frac{90.89.88.87.86.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} = 43949268$.

Aufg. Wenn von 90 Loosen oder Zahlen, die in einem Topfe unter einander gemischt sind, nur 5 als Treffer herausgezogen werden, und Jemand wollte behaupten, daß bey 10 von ihm unter den 90 gewählten Loosen 3 Treffer seyn würden;

den; wie verhält sich da die Wahrscheinlichkeit, daß unter den gewählten 10 Loosen 3 Treffer sich befinden sollten?

Aufl. 90 Loose enthalten $\frac{90.89.88.}{1.\ 2.\ 3.} = 117480$ Ternen, die 5 herausgezogenen Treffer enthalten nur $\frac{5.4.3.}{1.2.3.} = 10$ Ternen, also kommen auf einen Treffer 11748 Fehler.

Da ferner aus 10 gewählten Loosen $\frac{10.9.8.}{1.2.3} = 120$ Ternen entstehen, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit unter den gewählten 10 Loosen eine Terne zu erhalten, zur Unwahrscheinlichkeit, wie 120 zu 11748, oder wie 10 : 979.

Aufg. Es will jemand in die gewöhnliche Zahlen-Lotterie von 90 Nummern so viel Zetteln zu 5 Nummern spielen, damit er alle herausgezogene 5 Nummern auf einem Zettel beysammen habe. Wie viel muß er in allem Zettel setzen? Wie viel Zetteln werden drey, und wie viele werden zwey Treffer enthalten? Auf wie viel Zetteln wird nur ein einzelner Treffer sich befinden? Und endlich, wie viel Zettel werden darunter seyn, worauf sich gar kein Treffer befindet?

Aufl. Da er alle 5 herausgezogene Nummern beysammen auf einem Zettel, d. h. eine Quinterne, haben will; so muß er alle Combinationen der 90 Nummern zu fünfen, nemlich $\frac{90.89.88.87.86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} = 43949268$ Zettel setzen, unter welchen er gewiß die Quinterne haben wird. Da nun auch bey den 5 herausgezogenen Nummern $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$ Quaternen möglich sind, woran jede mit allen $90 - 5 = 85$ gefehlten Nummern gespielt worden ist; so hat er $5.\ 85 = 425$ Quaternen. Ueberdies sind bey den herausgezogenen fünf Nummern $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ Ternen möglich, welche mit jeder Verbindung zu zweyen der 85 gefehlten Nummern gespielt worden sind; also hat er $10.\ \frac{85.84.}{1.\ 2.} = 35700$ Ternen. Eben so giebt es bey den 5 herausgezogenen Nummern $\frac{5.4.}{1.2.} = 10$ Amben, die mit jeder Verbindung zu Dreyen der 85 gefehlten Nummern gespielt worden sind; folglich hat er $10.\ \frac{85.84.83}{1.\ 2.\ 3} = 987700$ Amben. Ferner sind die 5 getroffenen Nummern mit jeder Verbindung zu Vieren der 85 gefehlten Nummern gespielt worden; folglich hat er $5.\ \frac{85.84.83.82.}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

=

$= 10123925$ einzelne Treffer. Endlich hat er noch $\frac{85.84.83.82.81}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 32801517$ Zettel, worauf sich gar kein Treffer befindet.

Aufg. **Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit — beym Würfelspiele mit drey Würfeln? Bey einem bestimmten gleichen Wurfe, etwa alle drey Sechsen zu werfen?**

Aufl. Drey Würfel haben 18 Felder, die sich $\frac{18.17.16.}{1.\ 2.\ 3.} = 816$ mal zu Dreyen verbinden lassen; allein weil ein Würfel nicht mehr als ein einziges Feld auf einmal zeigen kann, so müssen von diesen 816 Verbindungen folgende ausgeschlossen werden:

α) Bey jedem Würfel jede Verbindung der sechs Felder zu Dreyen $= \frac{6.5.4}{1.2.3}.\ 3 = 60$;

β) Bey jedem Würfel jede Verbindung der sechs Felder zu Zweyen mit den 12 Feldern der beyden andern Würfel verbunden $= \frac{6.\ 5.}{1.\ 2.}.\ 12.\ 3 = 540$; mithin bleibt die Anzahl der möglichen Verbindungen nur $= 816 - (60 + 540) = 216$. Also verhält sich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, wie $1 : 216$, d. h. im Durchschnitte genommen immer unter 216 Würfen einmal alle drey Sechser fallen.

Anmerk. Ich habe diese Auflösung gewählt, weil sie deutlich zeigt, worin der Hr. Geh Ober Berg- und Bau Rath **Mönich** in seinem Lehrbuch der Math. I. B. I. Anh. §. 15. fehlt, wenn er dieses Verhältniß, wie $1 : 816$ angiebt. Er vergaß nemlich den Abzug in α und β.

5. **Zusatz.** Formeln für alle Variationen von N verschiedenen Dingen.

Man hat n Einfache, n^2 Amben, n^3 Ternen, n^4 Quaternen, n^r Rnen. Wenn man also von n Dingen die Summe aller möglichen Variationen bestimmen will, so ist solche $n + n^2 + n^3 + n^4 - - - + n^r$. Dieses ist eine geometrische Reihe, deren Summe $= \frac{n^{r+1} - n}{n - 1}$ ist, wie weiter hin im 514 §. bewiesen wird. Z. B. Sey $n = r = 24$, so ist $\frac{24^{25} - 24}{24 - 1} =$

$$\frac{32009658644406818986777955348272600}{23} =$$

V IV III II I
1391724288887252999425128493402200.

Diese

Diese ungeheuer große Zahl drückt alle mögliche Variationen von allen 24 Buchstaben des Alphabets aus.

6. Zusatz. In dem Hindenburgischen System findet man auch Combinationen mit Versetzungszahlen, womit es folgende Bewandniß hat.

Die Variationen gegebener Dinge, a, b, c u. s. f. enthalten alle ausführliche geschriebene Versetzungen der Combinationen dieser Dinge. Z. B. die Variationsarten aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, der 3 Dinge a, b, c; enthalten ab, ac, bc. Diese 3 Amben geben versetzt noch 3 Amben ba, ca, cb, die auch unter jene Variations-Amben befindlich sind; macht man nun diese Versetzungen nicht wirklich, und zeigt man bloß durch eine der Amben ab, ac, bc vorgeschriebenen Ziffer an, wie viel Versetzungen sie zulassen, so erhält man aa, 2ab, 2ac, bb, 2bc, cc, und dieses wäre alsdann von a, b, c eine Combination mit Versetzungszahlen, die allemal da statt findet, wo man nicht auf den Unterschied dieser Versetzungen achtet, wie z. B. wenn man a + b + c mit sich selbst multipliciren soll. In der Hindenburgischen combinatorischen Analytik ist dieser Unterschied zwischen Variationen und Combinationen mit Versetzungszahlen sehr wichtig.

XII. Capitel.

Von der Entwickelung der Irrationalpotenzen durch unendliche Reihen.

§. 361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel a + b eine jede Potenz gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn, als er nur immer will, so sind wir im Stande auf eine allgemeine Art die Potenz von a + b auszudrücken, wenn der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedruckt ist.

Also

Also werden wir nach der oben (§. 359.) gegebenen Regel finden:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{2} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4 \text{ u. s. f.}$$

(§. 351. Zus.)

Beweis. Alle Glieder einer Potenz einer zweytheiligen Wurzel sind Variationen der Theile der Wurzel. In diesen Variationen kommen aber alle mögliche Versetzungen der Combinationen mit Wiederholungen vor, demnach muß auch die Zahl der Versetzungen derselben der Coefficient eines jeden Gliedes seyn.

Nun wissen wir bereits (aus §. 344. Zus.) wie die Glieder von $(a+b)^n$ ohne Coefficienten auf einander folgen; das $(r+1)$te Glied ist $a^{n-r}b^r$; in einem solchen Gliede sind demnach $n-r$, Aen, und r Ben, also überhaupt $n-r+r=n$ Buchstaben, d. h. jedes Glied von $(a+b)^n$ enthält so viel Buchstaben, als der Exponent n Einheiten hat. Wären diese Buchstaben alle verschieden, so würden diese n Buchstaben $n.\ n-1.\ n-2.\ ---\ 1$ Permutationen geben, (§. 360. 2 Zus); aber das $(r+1)$te Glied enthält $n-r$ aen, demnach bleiben nur noch $n.\ n-1.\ n-2\ ---\ (n-(r-1))$ (§. 360. 2. Zus.) Permutationen, überdem sind in diesem Gliede noch r, ben, also bleiben bloß $\frac{n.\ n-1.\ n-2\ ---\ (n-(r-2)(n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\ ---\ (r-1).\ r}$ Permutationen (§ 360. 2. Zus.) und dieses ist folglich der zum $(r+1)$ten Gliede gehörige Coefficient.

1. Zusatz. Eben so würde man das rte Glied von $(a+b)^n$ gleich $\frac{n.\ n-1.\ n-2\ ---\ (n-(r-2))}{1.\ 2.\ 3.\ ---\ (r-1)}\ a^{n-(r-1)}\ b^{r-1}$ finden. Aus diesem gefundenen allgemeinen Gliede kann man nun leicht jedes verlangte Glied einer jeden Potenz von einer zweytheiligen Größe finden. Auch sieht man aus dem Beweise und aus diesem Zusatze, daß, wenn man den Coefficienten des rten Gliedes $= R$ setzt, so ist der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes $= R.\frac{n-(r-1)}{r}$.

2. Zusatz.

1,	2,	3,	4	---	r	---	n,	n+1
n+1,	n,	n−1,	n−2	---	n−(r−2)	---	2,	1

Die

Die obere Reihe ist der Index der Glieder von $(a+b)^n$ von der Linken angezählt, die untere Reihe ist jene umgekehrt geschrieben. Daraus sieht man nun, welche Glieder von beyden Enden angezählt, gleich weit abstehen. So stehet z. B das rte Glied von einem Ende eben so weit ab, als das $(n-(r-2))$te vom andern Ende; also gehören zu Gliedern, die von den äußersten gleich weit abstehen, einerley Coefficienten. Dieses ließe sich schon daraus schließen, weil einerley herauskommen muß, ob man die Potenz von $(a+b)$ oder von $(b+a)$ macht, d. i. ob man die Reihe von $(a+b)^n$ vorwärts oder rückwärts liest.

3. Zusatz. Das rte Glied von $(a+b)^n$ war $\frac{n.n-1.n-2.\,-\,-(n-(r-2))}{1.\;2.\;3\;-\;-\;(r-1)}\,a^{n-(r-1)}\,b^{r-1}$.

Setzt man $r = n+2$, so erhält man das $(n+2)$te Glied gleich $\frac{n.n-1.n-2.\,-\,-\,(n-(n+2)-2))}{1.\;2.\;3.\;-\;-\;-\;(n+1)}\,a^{n-(n+1)}\,b^{n+1}$, bey welchem Gliede der Coefficient und also das Glied selbst null ist. Eben so verhält es sich auch mit jedem noch folgenden Gliede, denn ihr Coefficient ist immer ein Product, von welchem der eine Factor der Coefficient des $(n+2)$ten Gliedes ist. So muß es auch seyn, denn es können, wenn n eine ganze positive Zahl ist, nur $(n+1)$ Glieder statt finden.

4. Zusatz. Jetzt will ich noch zeigen, wie man die nte Potenz von $(a+b)$ unter eine einfachere Gestalt bringen kann, welche bey vielen Anwendungen bequemer ist.

Wir haben nemlich gefunden, daß

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\,a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.a^{n-4}b^4 \;-\;-\;-$$

Dieses ist nun $= a^n + \frac{n}{1}\,a^n.\frac{b}{a} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.a^n\frac{b^2}{a^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.\;2.\;3.}\,a^n\frac{b^3}{a^3} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\,\frac{n-3}{4}.a^n\frac{b^4}{a^4} + - - -$

Man setze nun den Quotienten von $\frac{b}{a} = Q$, so ist das

1ste Glied $= a^n$	$=$	—	—	—		A
2te - -	$= \frac{n}{1}A.Q =$	—	—	—		B
3te - -	$= \frac{n-1}{2}.B.Q =$	—	—	—		C

das

das 4te Glied $= \frac{n-2}{3}. C. Q =$ — — — D

5te - - $= \frac{n-3}{4}. D. Q =$ — — — E

6te - - $= \frac{n-4}{5}. E. Q =$ — — — F

7te - - $= \frac{n-5}{6}. F. Q =$ — — — G

u. s. f.

also $(a+b)^n = A + \frac{n}{1} A. Q + \frac{n-1}{2}. B. Q + \frac{n-2}{3}. C. Q + \frac{n-3}{4}. D. Q + \ldots$

Ferner $(a-b)^n = A - \frac{n}{1} A. Q + \frac{n-1}{2}. B. Q - \frac{n-2}{3}. C. Q + \frac{n-3}{4}. D. Q - \ldots$

Hier werden nemlich alle Glieder negativ, worin ungerade Potenzen von b vorkommen, das wäre also hier das 2te, 4te, 6te Glied u. s. f.

Ist n gerade, so müssen, da $(n+1)$ Glieder da sind, $\frac{n}{2}$ Glieder auf jeder Seite des mittlern Gliedes liegen, und die von diesem gleich weit abstehende Glieder haben einerley Coefficienten.

Ist n ungerade, so ist die Zahl der Glieder $(n+1)$ gerade, daher alsdann $\frac{n+1}{2}$ Glieder vorwärts und rückwärts einerley Coefficienten haben.

§. 362.

Wollte man die gleiche Potenz von der Wurzel $a-b$ nehmen, so darf man nur die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten Gliedes u. s. f. verändern, und man hat daher: $(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1}. \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}. \frac{n-1}{2}. \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}. \frac{n-1}{2}. \frac{n-2}{3}. \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4$ u. s. f.

1. Zusatz. Wenn der Exponent n eine gebrochene Zahl ist, so giebt es für $(a+b)^n$ kein letztes Glied.

Beweis. Denn wenn die Potenz aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern bestehen soll; so ist nöthig, daß man bey wirklicher Bestimmung dieser Glieder (§. 361. 3. Zus.) auf einen Coefficienten komme, der $= 0$ ist; welches aber bey dieser Voraussetzung nicht geschehen kann.

Man setze nemlich, der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes, also auch das Glied selbst sey gleich Null, so haben wir folgende Gleichung:

$$\frac{n.\, n-1.\, n-2 \;-\,-\,-\; (n-(r-2))(n-(r-1))}{1.\; 2.\; 3.\; -\,-\,-\; (r-1)\,.\; r} = 0$$

mit $\dfrac{n.\, n-1.\, n-2 \;-\,-\,-\; (n-(r-2))}{1.\; 2.\; 3\; -\,-\,-\; (r-1).\, r}$ dividirt, giebt

$$n-(r-1) = 0, \text{ folglich } n = r-1.$$

Da nun r eine ganze Zahl seyn muß, so ist auch $r-1$ eine ganze Zahl, daher müßte auch n eine ganze Zahl seyn, welches wider die Voraussetzung ist.

2. Zusatz. Wenn man in der Formel $(a+b)^n = A + \frac{n}{1}.\, A.\, Q + \frac{n-1}{2}.\, B.\, Q + \frac{n-2}{3}.\, C.\, Q \;-\,-\,-$ überall statt n die gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$ setzt, so ist

$$(a+b)^{\frac{p}{q}} = A + \frac{p}{q}\, A.\, Q + \frac{p-q}{2q}.\, B.\, Q + \frac{p-2q}{3q}\, C.\, Q + \frac{p-3q}{4q}.\, D.\, Q + \frac{p-4q}{5q}\, E.\, Q + -\,-\,-$$

3. Zusatz. Wir wollen diese Formeln mit einigen Beyspielen erläutern:

I.) $(\frac{1}{2}x + 2y)^5$ zu bestimmen.

Hier ist $a = \frac{1}{2}x$; $Q = \dfrac{2y}{\frac{1}{2}x} = \dfrac{4y}{x}$, und $n = 5$; also ist nach §. 361. 4. Zus.

$a^n = (\frac{1}{2}x)^5 = \frac{1}{32}x^5 =$ — — — A

$\frac{n}{1}.\, A.\, Q = 5.\frac{1}{32}x^5.\frac{4y}{x} = \frac{5}{8}x^4y =$ — B

$\frac{n-1}{2}.\, B\, Q = \frac{4}{2}.\frac{5}{8}x\; y.\, \frac{4y}{x} = 5x^3y^2 =$ — C

$\frac{n-2}{3}.\, C.\, Q = 5.x^{3}y^{2}.\frac{4y}{x} = 20x^2y^3 =$ — D

$\frac{n-3}{4}.\, D.\, Q = \frac{2}{4}.\, 20x^2y^3.\frac{4y}{x} = 40xy^4 =$ E

$\frac{n-4}{5}$

$\frac{n-4}{5}$. E. Q $= \frac{1}{5} . 40xy^4 . \frac{4y}{x} = 32y^5 =$ — F

$\frac{n-5}{5}$. F. Q $= 0$.

Also ist $(\frac{1}{2}x + 2y)^5 = \frac{1}{32}x^5 + \frac{5}{8}x^4y + 5x^3y^2 + 20x^2y^3 + 40xy^4 + 32y^5$.

II.) Man soll $\sqrt[10]{(1+x)^{10}.(1-x)}$ angeben.

Da $\sqrt[10]{(1+x)^{10}(1-x)} = (1+x)(1-x)^{\frac{1}{10}}$ ist, so muß man $(1-x)^{\frac{1}{10}}$ suchen, und es sodann mit $1+x$ multipliciren.

Nun findet sich hier $a = 1$; $Q = \frac{-x}{1} = -x$; $p = 1$; $q = 10$.

Für diese Werthe findet man nun die ersten Glieder von $(1-x)^{\frac{1}{10}}$ auf folgende Art, und man kann noch, so viel man will, Glieder davon auf gleiche Art bestimmen.

$a^{\frac{1}{10}} = 1 =$ — — — A

$\frac{p}{q}$. A. Q $= \frac{1}{10} . -x = -\frac{1}{10}x =$ — B

$\frac{p-q}{2q}$. B. Q $= \frac{-9}{20} . -\frac{1}{10}x . -x = \frac{-9x^2}{20.10} =$ C

$\frac{p-2q}{3q}$. C. Q $= \frac{-19}{30} . \frac{-9x^2}{20.10} . -x = \frac{-171 x^3}{30.20.10} =$ D

$\frac{p-3q}{4q}$. D. Q $= \frac{-29}{40} . \frac{-171 x^3}{30.20.10} . -x = \frac{-4959 x^4}{40.30.20.10} =$ E

u. s. f.

Daher ist

$$(1-x)^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10}x - \frac{9x^2}{200} - \frac{171x^3}{6000} - \frac{4959x^4}{240000} - \ldots$$

Multiplicirt man nun dieses mit $1+x$, so findet man

$$(1+x)(1-x)^{\frac{1}{10}} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{10}x - \frac{9x^2}{200} - \frac{171x^3}{6000} - \frac{4959x^4}{240000} \\ + x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{9x^3}{200} - \frac{171x^4}{6000} - \ldots \end{cases}$$

$$= 1 + \frac{9}{10}x - \frac{29x^2}{200} - \frac{147.x^3}{2000} - \frac{3933\,x^4}{80000} - \ldots$$

§. 363.

Diese Formeln dienen, um alle Arten von Wurzeln auszudrücken. Denn da wir gezeigt haben, wie die Wurzeln auf gebrochene Exponenten gebracht werden können, und daß $\sqrt[2]{}a = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{}a = a^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{}a = a^{\frac{1}{4}}$ u. s. f. so wird auch seyn:

$\sqrt[2]{}(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{}(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ und

$\sqrt[4]{}(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{4}}$ u. s. f.

Wir haben daher, um die Wurzel von $a+b$ zu finden, nur nöthig, in der obigen allgemeinen Formel für den Exponenten n den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, daher wir erstlich für die Coefficienten bekommen werden:

$\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$, $\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$. Hernach ist $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{}a$ und $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^2\sqrt{a}}$ u. s. f.

Oder man kann diese Potenzen von a auch so ausdrücken: $a^n = \sqrt{}a$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a}$, $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$, $a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3}$, $a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}$ u. s. f.

§. 364.

Dieses vorausgesetzt, wird die Quadratwurzel aus $a+b$ folgendergestalt ausgedrückt werden: $\sqrt{}(a+b) = \sqrt{}a + \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,b^2\frac{\sqrt{a}}{a^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}b^3\frac{\sqrt{a}}{a^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\,b^4\frac{\sqrt{a}}{a^4}$ u. s. f.

§. 365.

Wenn nun a eine Quadratzahl ist, so kann $\sqrt{}a$ angegeben, und also die Quadratwurzel aus $a+b$, ohne Wurzelzeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden.

Also wenn $a = c^2$, so ist $\sqrt{\ } a = c$, und man wird haben: $\sqrt{\ } (c^2 + b) = c + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c} - \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{c^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128} \cdot \frac{b^4}{c^7}$ u. s. f.

Hierdurch kann man aus einer jeden Zahl die Quadratwurzel ausziehen, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wovon einer ein Quadrat ist, welcher durch c^2 angedeutet wird. Will man z. B. die Quadratwurzel von 6 haben, so setzt man $6 = 4 + 2$, und da wird $c^2 = 4$, also $c = 2$ und $b = 2$, daher bekommt man $\sqrt{\ } 6 = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ u. s. f. Nimmt man hiervon nur die zwey ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ größer ist als 6. Nimmt man drey Glieder, so hat man $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

§. 366.

Bey eben diesem Exempel, weil $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, so kann man $6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$ setzen.

Also wird $c^2 = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, woraus wir nur die zwey ersten Glieder berechnen wollen, da denn $\sqrt{\ } 6 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20}$ herauskommt, wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als 6.

Setzen wir nun $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$, so wird $c = \frac{49}{20}$ und $b = -\frac{1}{400}$. Hieraus wieder nur die zwey ersten Glieder genommen, geben $\sqrt{\ } 6 = \frac{49}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$, wovon das Quadrat $= \frac{23049601}{3841600}$. Nun aber ist $6 = \frac{23049600}{3841600}$, also ist der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

 §. 367.

§. 367.

Eben so kann man auch die Cubicwurzel aus $a+b$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Denn da $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, so wird in unserer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten $\frac{n}{1} = \frac{1}{3}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15}$ u. s. f.

Für die Potenzen von a aber ist $a^n = \sqrt[3]{a}$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$, $a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^2}$, $a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$ u. s. f., daher erhalten wir $\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3}.b\frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \frac{1}{9}.b^2\frac{\sqrt[3]{a}}{a^2} + \frac{5}{81}.b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \frac{10}{243}.b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}$ u. s. f.

§. 368.

Wenn also a ein Cubus, nemlich $a = c^3$, so wird $\sqrt[3]{a} = c$, und also fallen die Wurzelzeichen weg. Daher haben wir:

$$\sqrt[3]{(c^3+b)} = c + \frac{1}{3}.\frac{b}{c^2} - \frac{1}{9}.\frac{b^2}{c^5} + \frac{5}{81}.\frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243}.\frac{b^4}{c^{11}} \text{ u. s. f.}$$

§. 369.

Durch Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubicwurzel von einer jeden Zahl durch Annäherung finden, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wie c^3+b, wovon der erste ein Cubus ist.

Also wenn man die Cubicwurzel von 2 verlangt, so setze man $2 = 1+1$, und so wird $c = 1$ und $b = 1$, folg-

folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ u. s. f., wovon die zwey ersten Glieder $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ geben, dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man setze daher $2 = \frac{64}{27}$, so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$, und daher

$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Diese zwey Glieder geben $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{73}$, wovon der Cubus $\frac{753571}{373248}$ ist. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$, also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solchergestalt kann man, wenn man will, immer näher kommen, besonders wenn man noch mehr Glieder nehmen will.

Anmerk. Ich werde im Anhange noch einige hierher gehörige Formeln mittheilen, welche in der Ausübung sehr brauchbar sind. Immer wird die hier gelehrte Näherung bequemer seyn, als die Arbeit der gewöhnlichen Rechenkunst.

XIII. Capitel.

Von der Entwickelung der negativen Potenzen.

§. 370.

Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} ausgedrückt werden kann, daher wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedrückt, so daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potenz von $a+b$, deren Exponent -1 ist, kann angesehen werden: daher die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch für diesen Fall gehört.

§. 371.

Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, so setze man in der oben gefundenen Formel $n = -1$, so

 wird

wird man erstlich für die Coefficienten haben: $\frac{n}{1} = -1$, $\frac{n-1}{2} = -1$, $\frac{n-2}{3} = -1$, $\frac{n-3}{4} = -1$, $\frac{n-4}{5} = -1$ u. s. f. hernach für die Potenzen von a: $a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^2}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^4}$ u. s. f. Daher erhalten wir $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ u. s. f., welches eben diejenige Reihe ist, die schon oben (§. 303.) durch die Division gefunden worden.

§. 372.

Da ferner $\frac{1}{a(+b)^2}$ so viel ist als $(a+b)^{-2}$, so kann auch diese Formel in eine unendliche Reihe aufgelöset werden.

Man setze nemlich $n = -2$, so hat man erstlich für die Coefficienten: $\frac{n}{1} = -\frac{2}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{4}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{4}$ u. s. f. und für die Potenzen von a hat man $a^n = \frac{1}{a^2}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^5}$ u. s. f. daher erhalten wir $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1} \cdot \frac{b}{a^3} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^4}, - \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \frac{b^3}{a^5} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{b^4}{a^6}$ u. s. f. Nun aber ist $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5$ u. s. f. Also werden wir haben: $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8}$ u. s. f.

§. 373.

Setzen wir weiter $n = -3$, so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$, das ist für $\frac{1}{(a+b)^3}$. Für die Coefficienten wird also seyn: $\frac{n}{1} = -\frac{3}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4}$ u. s. f., für die Potenzen von a aber $a^n = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ u. s. f. Hieraus erhalten wir $\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7}$ u. s. f. $= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}}$ u. s. f.

Wir wollen nun ferner annehmen $n = -4$, so haben wir für die Coefficienten: $\frac{n}{1} = -\frac{4}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$ u. s. f.

Für die Potenzen von a aber $a^n = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^6}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^7}$, $a^{n-4} = \frac{1}{a^8}$ u. s. f., woraus gefunden wird: $\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^6}$ u. s. f. $= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9}$ u. s. f.

§. 374.

Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für eine jede dergleichen negative Potenz auf eine allgemeine Art haben werde:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^{m+3}} \text{ u. s. f.}$$

Aus welcher Formel nun alle dergleichen Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden, wo man auch sogar für m Brüche annehmen kann, um irrationale Formen auszudrücken.

1. Zusatz. Wenn bey $(a+b)^n$ der Exponent n negativ ist, so giebt es kein letztes Glied für die Potenz.

Beweis. Es müßte, wie in §. 362. 1. Zusatz, das $(r+1)$te Glied Null seyn, nemlich

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2.\;-\;-\;-\;(n-(r-2))(n-(r-1))}{1.\;2.\;3\;-\;-\;-\;(r-1).\;r} = 0$$

also $n-(r-1)=0$, folglich $n=r-1$.

Da aber der Voraussetzung gemäß n negativ ist, so haben wir

$$\begin{array}{r} -n = r-1 \\ +n = +\,n \\ \hline 0 = n+r-1, \end{array}$$ welches ungereimt ist.

Dieses erhellet freilich auch schon so: $(a+b)^{-n} = \frac{1}{(a+b)^n}$,

$\frac{1}{(a+b)^n}$

aber $\cancel{\frac{1}{a+b}}$ giebt eine unendliche Reihe, wie man im 5ten Cap. des II. Abschnitts gesehen hat, daher auch $\left(\frac{1}{a+b}\right)^n = \frac{1}{(a+b)^n}$ eine Reihe von unendlich viel Glieder geben wird.

2. Zusatz. Da $(a+b)^{-n} = a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$, so setze man $\frac{b}{a} = y$ und $\frac{y}{1+y} = z$, also $\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{b}{a+b} = z$; ferner folgt aus $\frac{y}{1+y} = z$, daß $y = z + zy$ und $y - zy = z$, oder $y(1-z) = z$.

$= z$. Daher $y = \frac{z}{1-z}$, und $1+y = 1 + \frac{z}{1-z} = \frac{1-z+z}{1-z} = \frac{1}{1-z}$ und $(1+y)^{-n} = \frac{1}{(1-z)^{-n}} = (1-z)^n$.

Nun ist $(1-z)^n = 1 - \frac{n}{1}.z + \frac{n.\,n-1}{1.\;2} z^2 - \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\;2.\;3} z^3 + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\;2.\;3.\;4.} z^4 - - -$

In dieser Reihe setze man statt z seinen ihm gleichen Werth $\frac{b}{a+b}$ und multiplicire jedes Glied mit $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, so erhält man

$$(a+b)^{-n} = a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^n}(1+y)^{-n}$$

$$= \frac{1}{a^n}(1-z)^n = \frac{1}{a^n} - \frac{n}{1}.\frac{b}{a^n(a+b)} + \frac{n.\,n-1.}{1.\;2}.\frac{b^2}{a^n(a+b)^2} - \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\;2.\;3}.\frac{b^3}{a^n(a+b)^3} + - - -$$

Diese Reihe bricht ab, wenn $-n$ eine ganze verneinte Zahl ist. Dieses scheint dem obigen Satz zu widersprechen, worin ausdrücklich gesagt wird, daß für $-n$ kein letztes Glied statt findet, d. i. die Reihe unendlich ist.

Mit diesem Widerspruch verhält es sich so: durch geschickte Substitution erhielten wir oben $(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^n$. Was hier linker Hand der Gleichung stehet, giebt eine unendliche, was rechter Hand stehet, eine endliche Reihe. Ueberdem ist bewiesen, daß für $-n$ nie eine endliche Reihe entstehen kann; dieses läßt schon vermuthen, daß der Grund in der Substitution liegen muß; wir haben nemlich $\frac{y}{1+y} = z$ gesetzt, also läßt sich $z = \frac{b}{a+b}$ durch $y = \frac{b}{a}$ nicht anders als durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Das Unendliche in $(a+b)^{-n}$ wird also durch $\frac{1}{a^n}(1-z)^n = \frac{1}{a^n}\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^n$ nicht aufgehoben, sondern nur versteckt.

Anmerk. Der für $(a \pm b)^n$ aus der Combinationslehre hergeleitete Beweis gilt nur, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Daß aber dieser Satz auch für gebrochene, negative, irrationale und unmögliche Größen wahr ist, bedarf einer weitläufigeren Rechtfertigung, die wenigstens an diesem Orte nicht mitgetheilt werden kann.

§. 375.

§. 375.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen: da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ u. s. f.}$$

so wollen wir diese Reihe mit $a + b$ multipliciren, weil alsdann die Zahl 1 herauskommen muß. Die Multiplication wird aber also zu stehen kommen:

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ u. s. f.}$$

$$a + b$$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a3} - \frac{b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

Product 1, wie nothwendig folgen muß.

§. 376.

Da wir ferner gefunden haben: $\frac{1}{(a+b2} = \frac{1}{a2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7}$ u. s. f., so muß, wenn man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, ebenfalls 1 herauskommen. Es ist aber $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und die Multiplication wird also zu stehen kommen:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ u. s. f.}$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$1 - \frac{2b}{a} + \frac{3b^2}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$+ \frac{2b}{a} - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$+ \frac{b^2}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

Product 1, wie die Natur der Sache erfordert.

§. 377.

§. 377.

Sollte man aber diese für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit $a+b$ multipliciren, so müßte $\frac{1}{a+b}$ herauskommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ u. s. f. welches auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} \text{ u. s. f.}$$
$$a+b$$

$$\frac{1}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{3b^2}{a^3} - \frac{4b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5} \text{ u. s. f.}$$
$$+ \frac{b}{a^2} - \frac{2b^2}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} - \frac{4b^4}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

Ende des zweyten Abschnitts.

Des