Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

III. Capitel. Von der Multiplication zusammengesetzter Größen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

$$\begin{array}{r} \sqrt{a} + 2\sqrt{b} \\ \sqrt{a} - 3\sqrt{b} \\ \hline + 5\sqrt{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12a + 4b - 3m - 8f + 2c \\ 6a - 9b + 2m - 3f + 7d \\ \hline 6a + 13b - 5m - 5f + 2c - 7d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 8\sqrt{n} + \sqrt{c} \\ \sqrt{a} - 3\sqrt{b} - 12\sqrt{n} - \sqrt{c} \\ \hline 5\sqrt{b} + 4\sqrt{n} + 2\sqrt{c} \end{array}$$

Zusatz. Will man die Richtigkeit einer solchen Rechnung prüfen, so darf man nur auf die gewöhnliche Art den gefundenen Rest zu der subtrahirten Zahl addiren, und sehen, ob die Summe derjenigen Zahl oder Formel gleich sey, von welcher subtrahirt worden.

III. Capitel.

Von der Multiplication zusammengesetzter Größen.

§. 270.

Wenn die Multiplication zusammengesetzter Größen bloß angezeigt werden soll, so wird eine jede von den Formeln, welche mit einander multiplicirt werden sollen, in Klammern eingeschlossen, und entweder ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesetzten Punkt an einander gehängt.

Also wenn diese beyde Formeln $a - b + c$ und $d - e + f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product auf folgende Art angezeigt: $(a-b+c).(d-e+f)$ oder $(a-b+c)(d-e+f)$.

Diese Art wird sehr häufig gebraucht, weil man daraus sogleich sieht, aus was für Factoren ein solches Product zusammen gesetzt ist.

Zusatz. Statt der Klammern bedienen sich einige auch eines Querstrichs, der über die Größen gesetzt wird, die zusammen genommen einen Factor ausmachen; z. B.

$$\overline{a - b + c} \,.\, \overline{d - e + f}$$

§. 271.

Um aber zu zeigen, wie eine solche Multiplication wirklich angestellt werden müsse, so ist erstlich zu merken, daß, wenn eine solche Formel $a - b + c$, z. B. mit 2 multiplicirt werden soll, ein jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden müsse, und also herauskommen werde:

$$2a - 2b + 2c.$$

Eben dies gilt auch von allen andern Zahlen. Wenn also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll, so bekommt man:

$$ad - bd + cd.$$

§. 272.

Hier haben wir vorausgesetzt, daß die Zahl d positiv sey: wenn aber mit einer negativen Zahl als $-e$ multiplicirt werden soll, so ist die oben (§. 32) gegebene Regel zu beobachten, daß nemlich zwey ungleiche Zeichen multiplicirt $-$, zwey gleiche aber $+$ geben. Daher bekommt man:

$$-ae + be - ce.$$

§. 273.

Um nun zu zeigen, wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt seyn, als A, durch eine zusammengesetzte, als $d - e$, multiplicirt werden soll, so wollen wir erstlich bloße Zahlen betrachten, und anneh-

annehmen, daß A mit $7 - 3$ multiplicirt werden solle. Hier ist nun klar, daß man das vierfache von A verlange; nimmt man nun erstlich das siebenfache, so muß man hernach das dreyfache davon subtrahiren. Also auch überhaupt, wenn man mit $d - e$ multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hernach mit e und subtrahirt das letztere Product von dem erstern, also daß herauskommt $dA - eA$. Laßt uns nun setzen $A = a - b$, welches mit $d - e$ multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$\begin{array}{r} dA = ad - bd \\ eA = ae - be \\ \hline ad - bd - ae + be \end{array}$$

welches das verlangte Product ist.

§. 274.

Da wir nun das Product $(a - b) . (d - e)$ gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplications-Exempel folgendergestalt deutlich vor Augen stellen:

$$\begin{array}{c} a - b \\ d - e \\ \hline ad - bd - ae + be \end{array}$$

woraus wir sehen, daß ein jedes Glied der obern Formel mit einem jeden der untern multiplicirt werden müsse, und daß wegen der Zeichen die oben gegebene Regel durchaus Statt habe, und hierdurch von neuem bestätiget werde, wenn etwa jemand noch irgend einen Zweifel darüber gehabt hätte.

§. 275.

Nach dieser Regel wird es also leicht seyn, folgendes Exempel auszurechnen; $a + b$ soll multiplicirt werden mit $a - b$:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline aa + ab \\ - ab - bb \\ \hline \end{array}$$

das Product wird seyn $aa - bb$

§. 276.

Wenn also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so leitet uns dieses Exempel auf folgende Wahrheit: wenn die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt wird, so ist das Product die Differenz ihrer Quadrate; dies kann auf folgende Art vorgestellt werden:

$$(a + b)(a - b) = aa - bb.$$

Folglich ist wiederum die Differenz zwischen zwey Quadratzahlen immer ein Product, oder sie läßt sich so wohl durch die Summe als durch die Differenz der Wurzeln theilen, und ist also keine Primzahl.

§. 277.

Wir wollen nun noch ferner folgende Exempel ausrechnen:

I.)
$$\begin{array}{l} 2a - 3 \\ a + 2 \\ \hline 2a^2 - 3a \\ \quad + 4a - 6 \\ \hline 2a^2 + a - 6 \end{array}$$

II.)
$$\begin{array}{l} 4a^2 - 6a + 9 \\ 2a + 3 \\ \hline 8a^3 - 12a^2 + 18a \\ \quad + 12a^2 - 18a + 27 \\ \hline 8a^3 + 27 \end{array}$$

III.)
$$\begin{array}{l} 3a^2 - 2ab - b^2 \\ 2a - 4b \\ \hline 6a^3 - 4a^2b - 2ab^2 \\ - 12a^2b + 8ab^2 + 4b^3 \\ \hline 6a^3 - 16a^2b + 6ab^2 + 4b^3 \end{array}$$

IV.)
$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + 2b^2 \\ a^2 - 2ab + 2b^2 \\ \hline a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 \\ - 2a^3b - 4a^2b^2 - 4ab^3 \\ + 2a^2b^2 + 4ab^3 + 4b^4 \\ \hline a^4 + 4b^4. \end{array}$$

V.) $2a^2$

$$\begin{array}{l}
\text{V.)}\ 2a^2 - 3ab - 4b^2 \\
\quad 3a^2 - 2ab + b^2 \\
\hline
\quad 6a^4 - 9a^3b - 12a^2b^2 \\
\qquad - 4a^3b + 6a^2b^2 + 8ab^3 \\
\qquad\qquad + 2a^2b^2 - 3ab^3 - 4b^4. \\
\hline
\quad 6a^4 - 13a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{VI.)}\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \\
\quad a + b + c \\
\hline
\quad a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - a^2c - abc \\
\quad - ab^2 - ac^2 + a^2b + a^2c - abc + b^3 + bc^2 - b^2c \\
\qquad\qquad\qquad - abc \quad - bc^2 + b^2c + c^3 \\
\hline
\quad a^3 - 3abc + b^3 + c^3.
\end{array}$$

§. 278.

Wenn mehr als zwey Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht, daß, nachdem man zwey davon mit einander multiplicirt hat, das Product nach und nach auch durch die übrigen multiplicirt werden müsse, und daß es gleichviel sey, was für eine Ordnung darin beobachtet werde. Es soll z. B. folgendes Product, welches aus vier Factoren besteht, gefunden werden:

$$\begin{array}{cccc}
\text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\
(a+b) & (a^2+ab+b^2) & (a-b) & (a^2-ab+b^2)
\end{array}$$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

$$\begin{array}{l}
\text{II.}\ a^2 + ab + b^2 \\
\text{I.}\ a + b \\
\hline
\quad a^3 + a^2b + ab^2 \\
\qquad + a^2b + ab^2 + b^3 \\
\hline
\text{I. II.}\ a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3
\end{array}$$

Hernach multiplicirt man den III. und IV. Factor:

$$\begin{array}{rl}
\text{IV.} & a^2 - ab + b^2 \\
\text{III.} & a - b \\
\hline
& a^3 - a^2b + ab^2 \\
& \quad\; - a^2b + ab^2 - b^3 \\
\hline
\text{III. IV.} & a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3
\end{array}$$

Nun ist nur noch übrig jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren:

$$\begin{array}{rl}
\text{I. II.} = & a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\text{III. IV.} = & a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
\hline
& a^6 + 2a^5b + 2a^4b^2 + a^3b^3 \\
& \quad - 2a^5b - 4a^4b^2 - 4a^3b^3 - 2a^2b^4 \\
& \quad\quad + 2a^4b^2 + 4a^3b^3 + 4a^2b^4 + 2ab^5 \\
& \quad\quad\quad - a^3b^3 - 2a^2b^4 - 2ab^5 - b^6 \\
\hline
& a^6 - b^6
\end{array}$$

dieses ist nun das gesuchte Product.

§. 279.

Wir wollen nun bey eben diesem Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und dann die II. mit der IV. multipliciren:

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & a + b \\
\text{III.} & a - b \\
\hline
& a^2 + ab \\
& \quad - ab - b^2 \\
\hline
\text{I. III.} = & a^2 - b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{II.} & a^2 + ab + b^2 \\
\text{IV.} & a^2 - ab + b^2 \\
\hline
& a^4 + a^3b + a^2b^2 \\
& \quad - a^3b - a^2b^2 - ab^3 \\
& \quad\quad + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\
\hline
\text{II. IV.} = & a^4 + a^2b^2 + b^4
\end{array}$$

Nun muß nur noch das Product II. IV. mit dem I. III. multiplicirt werden:

$$
\begin{array}{l}
\text{II. IV.} = a^4 + a^2b^2 + b^4 \\
\text{I. III.} = a^2 - b^2 \\
\hline
a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 \\
\quad - a^4b^2 - a^2b^4 - b^6 \\
\hline
a^6 - b^6
\end{array}
$$

welches das gesuchte Product ist.

§. 280.

Endlich wollen wir die Rechnung noch nach einer dritten Ordnung anstellen und erstlich die I. Formel mit der IV. und hernach die II. mit der III. multipliciren:

$$
\begin{array}{ll}
\text{IV. } a^2 - ab + b^2 & \text{II. } a^2 + ab + b^2 \\
\text{I. } a + b & \text{III. } a - b \\
\hline
a^3 - a^2b + ab^2 & a^3 + a^2b + ab^2 \\
\quad + a^2b - ab^2 + b^3 & \quad - a^2b - ab^2 - b^3 \\
\hline
\text{I. IV.} = a^3 + b^3 & \text{II. III.} = a^3 - b^3
\end{array}
$$

Nun ist noch übrig das Product I. IV. mit II. III. zu multipliciren:

$$
\begin{array}{l}
\text{I. IV.} = a^3 + b^3 \\
\text{II. III.} = a^3 - b^3 \\
\hline
a^6 + a^3b^3 \\
\quad - a^3b^3 - b^6 \\
\hline
a^6 - b^6.
\end{array}
$$

§. 281.

Es ist wohl der Mühe werth dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sey daher $a = 3$ und $b = 2$, so hat man $a + b = 5$ und $a - b = 1$; ferner $a^2 = 9$, $ab = 6$, $b^2 = 4$. Also ist $a^2 + ab + b^2 = 19$ und $a^2 - ab + b^2 = 7$. Folglich wird dieses Product verlangt:

$5 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 7$. welches ist 665.

Es ist aber $a^6 = 729$ und $b^6 = 64$, folglich $a^6 - b^6 = 665$, wie wir schon vorher gesehen haben.

IV. Ca-