Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

IV. Capitel. Von der Division zusammengesetzter Größen.

IV. Capitel.

Von der Division zusammengesetzter Größen.

§. 282.

Wenn man die Division nur anzeigen will, so bedient man sich entweder des gewöhnlichen Zeichen eines Bruchs, indem man den Dividendus über die Linie und den Divisor unter die Linie schreibt; oder man schließt beyde in Klammern ein, und schreibt den Divisor nach dem Dividendus mit dazwischen gesetzten zwey Puncten. Also wenn $a + b$ durch $c + d$ getheilt werden soll, so wird der Quotient nach der ersten Art also angezeigt $\frac{a+b}{c+d}$.

Nach der andern Art aber durch $(a+b):(c+d)$; beydes wird ausgesprochen $a+b$ getheilt durch $c+d$.

§. 283.

Wenn eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden soll, so wird ein jedes Glied besonders getheilt, z. B.

$6a - 8b + 4c$ durch 2 getheilt, giebt $3a - 4b + 2c$
und $(a^2 - 2ab) : a = a - 2b$:
Eben so $(a^3 - 2a^2b + 3ab^2) : a = a^2 - 2ab + 3b^2$;
ferner $(4a^2b - 6a^2c + 8abc) : 2a = 2ab - 3ac + 4bc$;
und $(9a^2bc - 12ab^2c + 15abc^2) : 3abc = 3a - 4b + 5c$.

§. 284.

Wenn sich etwa ein Glied des Dividendus nicht theilen läßt, so wird der daher entstehende Quotient durch einen Bruch angezeigt. Also wenn $a + b$ durch a getheilt werden soll, so bekommt man zum Quotienten $1 + \frac{b}{a}$.

Ferner

Ferner $(a^2 - ab + b^2) : a^2 = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$.

Wenn ferner $(2a + b)$ durch 2 getheilt werden soll, so bekommt man $a + \frac{b}{2}$; wobey zu merken, daß anstatt $\frac{b}{2}$ auch geschrieben werden kann $\frac{1}{2}b$, weil $\frac{1}{2}$mal b so viel ist als $\frac{b}{2}$. Eben so ist $\frac{b}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}b$ und $\frac{2b}{3}$ so viel als $\frac{2}{3}b$ u. s. f.

§. 285.

Wenn aber der Divisor selbst eine zusammengesetzte Größe ist, so hat die Division mehr Schwierigkeit, weil dieselbe öfters wirklich geschehen kann, wo es nicht zu vermuthen scheint; denn wenn die Division nicht angeht, so muß man sich begnügen, den Quotienten, wie oben schon gezeigt ist, durch einen Bruch anzudeuten; wir wollen daher hier nur solche Fälle betrachten, wo die Division wirklich angeht.

§. 286.

Es soll demnach der Dividendus $ac - bc$ durch den Divisor $a - b$ getheilt werden; der Quotient muß daher also beschaffen seyn, daß, wenn der Divisor $a - b$ damit multiplicirt wird, der Dividendus $ac - bc$ herauskomme. Man sieht nun leicht, daß in dem Quotienten c stehen muß, weil sonst nicht ac herauskommen könnte. Um nun zu sehen, ob c der völlige Quotient ist, so darf man nur den Divisor damit multipliciren und sehen, ob der ganze Dividendus herauskomme oder nur ein Theil desselben. Wird aber $a - b$ mit c multiplicirt, so bekommt man $ac - bc$, welches der Dividendus selbst ist: folglich ist c der völlige Quotient. Eben so ist klar, daß $(a^2+ab):(a+b)=a$, und $(3a^2-2ab):(3a-2b)=a$, ferner $(6a^2-9ab):(2a-3b)=3a$.

§. 287.

Auf diese Art findet man gewiß einen Theil des Quotienten. Denn wenn derselbe mit dem Divisor multiplicirt noch nicht den Dividendus erschöpft, so muß man das übrige gleichfalls noch durch den Divisor theilen, da man denn wiederum einen Theil des Quotienten herausbringt. Solchergestalt verfährt man, bis man den ganzen Quotienten erhält.

Wir wollen z. B. $a^2+3ab+2b^2$ durch $a+b$ theilen; es ist nun sogleich klar, daß der Quotient das Glied a enthalten müsse, weil sonst nicht a^2 heraus kommen könnte. Wenn aber der Divisor $a+b$ mit a multiplicirt wird, so kommt a^2+ab, welches vom Dividendus abgezogen, $2ab+2b^2$ übrig läßt, welches also noch durch $a+b$ getheilt werden muß, und hier fällt sogleich in die Augen, daß im Quotienten $2b$ stehen müsse. Aber $2b$ mit $a+b$ multiplicirt, giebt gerade $2ab+2b^2$; folglich ist der gesuchte Quotient $a+2b$, welches mit dem Divisor $a+b$ multiplicirt, den Dividendus giebt. Dieses ganze Verfahren wird auf folgende Art vorgestellt:

$$\begin{array}{l}
a+b)\ a^2+3ab+2b^6\ (a+2b \\
\quad\quad\ \underline{a^2+ab} \\
\quad\quad\quad\quad +2ab+2b^2 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{+2ab+2b^2} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

§. 288.

Um diese Operation zu erleichtern, so erwählt man einen Theil des Divisors, wie hier geschehen, a, welchen man zuerst schreibt, und nach diesem Buch-

staben

staben schreibt man auch den Dividendus in solcher Ordnung, daß die höchsten Potenzen von eben demselben Buchstaben a zuerst gesetzt werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$a-b)\,a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\,(a^2-2ab+b^2$$
$$a^3-a^2b$$
$$-2a^2b+3ab^2$$
$$-2a^2b+2ab^2$$
$$+ab^2-b^3$$
$$+ab^2-b_3$$
$$0$$

$$a+b)\,a^2-b^2\,(a-b$$
$$a^2+ab$$
$$-ab-b^2$$
$$-ab-b^2$$
$$0$$

$$3a-2b)\,18a^2-8b^2\,(6a+4b$$
$$18a^2-12ab$$
$$+12ab-8b^2$$
$$+12ab-8b^2$$
$$0$$

$$a+b)\,a^3+b^3\,(a^2-ab+b^2$$
$$a^3+a^2b$$
$$-a^2b+b^3$$
$$-a^2b-ab^2$$
$$+ab^2+b_3$$
$$+ab^2+b^3$$
$$0$$

$$2a-b)\,8a^3-b^3\,(4a^2+2ab+b^2$$
$$8a^3-4a^2b$$
$$+4a^2b-b^3$$
$$+4a^2b-2ab^2$$
$$+2ab^2-b^3$$
$$+2ab^2-b^2$$
$$0$$

$$a^2-2ab+b^2)\,a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\,(a^2-2ab+b^2$$
$$a^4-2a^3b+a^2b^2$$
$$-2a^3b+5a^2b^2-4ab^3$$
$$-2a^3b+4a^2b^2-2ab^3$$
$$+a^2b^2-2ab^3+b^4$$
$$+a^2b^2-2ab^3+b^4$$
$$0$$

$$
\begin{array}{l}
a^2-2ab+4b^2)\ a^4+4a^2b^2+16b^4\ (a^2+2ab+4b^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{a^4-2a^3b+4a^2b^2} \\
\qquad\qquad\qquad +2a^3b+16b^4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+2a^3b-4a^2b^2+8ab^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +4a^2b^2-8ab^3+16b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+4a^2b^2-8ab^3+16b^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a^2-2ab+2b^2)\ a^4+4b^4\ \quad (a^2+2ab+2b^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{a^4-2a^3b+2a^2b^2} \\
\qquad\qquad\qquad +2a^3b-2a^2b^2+4b^4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+2a^3b-4a^2b^2+4ab^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +2a^2b^2-4ab^3+4b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+2a^2b^2-4ab^3+4b^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
1-2x+x^2)\ 1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5\ (1-3x+3x^2-x^3 \\
\qquad\quad \underline{1-2x+x^2} \\
\qquad\qquad -3x+9x^2-10x^3 \\
\qquad\qquad \underline{-3x+6x^2-3x^3} \\
\qquad\qquad\quad +3x^2-7x^3+5x^4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{+3x^2-6x^3+3x^4} \\
\qquad\qquad\qquad -x^3+2x^4-x^5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-x^3+2x^4-x^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Zusatz. Da der Anfänger die Division immer am schwierigsten findet, so will ich noch folgende 2 Beyspiele hersetzen:

Divisor d	der ganze Dividendus D			der Quotient		
	A	B	C	α	β	γ
$4a^2b^3$	$20a^5b^3$	$-12a^6b^3$	$+24a^3b^4$	$5a^3$	$-3a^4$	$+6ab$

Die Rechnung selbst:

Man suche $A:d=\alpha=5a^3$
und nun nehme man $\alpha.\ d=20a^5b^3$,

daher $D-ad=\overset{B}{-12a^6b^3}+\overset{C}{24a^3b^4}=R.$

Hierauf suche man $B:d=\beta=-3a^4$
und nehme $\beta.\ d=-12a^6b^3$;

so ist $R-\beta.\ d=\overset{C}{24a^3b^4}$

Endlich

Endlich suche man $C : d = \gamma = 6ab$,
und nehme $\gamma . d = 24a^3b^4$;
so ist $C - \gamma d = 0$.

Divisor d	Der ganze Dividendus D	Der Quotient
A B	C E F G	α β
$2ac - 3a^2b$	$6a^5bc - 16a^3c^2 - 9a^6b^2 + 24a^4bc\cancel{^2}$	$3a^4b - 8a^2c$

Die Rechnung selbst:

Man suche $C : A = \alpha = 3a^4b$
und nehme $\alpha . d = 6a^5bc - 9a^6b^2$;

$$\text{so ist } D - \alpha . d = -\overset{E}{16a^3c^2} + \overset{G}{24a^4}\overset{bc}{\cancel{c^2b}} = R.$$

Hierauf suche man $E : A = \beta = -8a^2c$,
und nehme $d . \beta = -16a^3c^2 + 24a^4bc\cancel{^2}$;
so ist $R - d . \beta = 0$.

V. Capitel.

Von der Auflösung der Brüche in unendliche Reihen *).

§. 289.

Wenn sich der Dividendus durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeigt, durch einen Bruch ausgedrückt.

Also

*) Die Theorie der Reihen ist eine der wichtigsten in der ganzen Mathematik. Die Reihen, von denen hier in diesem Capitel die Rede ist, sind von Mercator gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts gefunden, und Newton erfand bald nachher diejenigen, welche von der Ausziehung der Wurzeln entspringen, wovon im zwölften Capitel gehandelt wird. Diese Theorie hat in der Folge einen neuen Grad der Vollkommenheit von vielen ausgezeichneten Geometern erhalten. Die Werke von Jakob Bernoulli und der zweyte Theil von Eulers Differen-