Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

V. Capitel. Von der Auflösung der Brüche in unendliche Reihen.

Endlich suche man $C : d = \gamma = 6ab$,
und nehme $\gamma . d = 24a^3b^4$;
so ist $C - \gamma d = 0$.

Divisor d	Der ganze Dividendus D	Der Quotient
A B	C E F G	α β
$2ac - 3a^2b$	$6a^5bc - 16a^3c^2 - 9a^6b^2 + 24a^4b\cancel{c^2}$	$3a^4b - 8a^2c$

Die Rechnung selbst:

Man suche $C : A = \alpha = 3a^4b$
und nehme $\alpha . d = 6a^5bc - 9a^6b^2$;

E G bc

so ist $D - \alpha . d = - 16a^3c^2 + 24a^4\cancel{c^2} = R$.

Hierauf suche man $E : A = \beta = - 8a^2c$,
und nehme $d . \beta = - 16a^3c^2 + 24a^4bc\cancel{^2}$;
so ist $R - d . \beta = 0$.

V. Capitel.

Von der Auflösung der Brüche in unendliche Reihen *).

§. 289.

Wenn sich der Dividendus durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeigt, durch einen Bruch ausgedrückt.

Also

*) Die Theorie der Reihen ist eine der wichtigsten in der ganzen Mathematik. Die Reihen, von denen hier in diesem Capitel die Rede ist, sind von Mercator gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts gefunden, und Newton erfand bald nachher diejenigen, welche von der Ausziehung der Wurzeln entspringen, wovon im zwölften Capitel gehandelt wird. Diese Theorie hat in der Folge einen neuen Grad der Vollkommenheit von vielen ausgezeichneten Geometern erhalten. Die Werke von Jakob Bernoulli und der zweyte Theil von Eulers Diffe-

 ren-

Also wenn 1 durch $1 - a$ getheilt werden soll, so bekommt man diesen Bruch $\frac{1}{1-a}$. Inzwischen kann doch die Division nach den vorhergehenden Regeln angestellt und, so weit man will, fortgesetzt werden, da dann immer der wahre Quotient, ob gleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß.

§. 290.

Um dieses zu zeigen, so wollen wir den Dividendus 1 wirklich durch den Divisor $1 - a$ theilen, wie folget:

$$\begin{array}{l} 1-a)\ 1\ (1+\frac{a}{1-a} \\ \quad +1-a \\ \hline \text{Rest} + a \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{l} 1-a)\ 1\ (1+a+\frac{a^2}{1-a} \\ \quad +1-a \\ \hline \qquad +a \\ \qquad +a-a^2 \\ \hline \qquad \text{Rest} + a^2 \end{array}$$

Um noch mehr Formen zu finden, so theile man a^2 durch $1 - a$, als:

$$\begin{array}{l} 1-a)\ a^2\ (a^2+\frac{a^3}{1-a}, \\ \quad a^2-a^3 \\ \hline \quad +a^3 \end{array} \qquad \text{ferner} \qquad \begin{array}{l} 1-a)\ a^3\ (a^3+\frac{a^4}{1-a} \\ \quad a^3-a^4 \\ \hline \quad +a^4 \end{array},$$

ferner

rentialrechnung (aus dem Lateinischen ins Deutsche mit Anmerk. und Zusätzen von Michelsen übersetzt), sind diejenigen, woraus man sich am besten über diese Materie unterrichten kann. Man wird auch in den Mémoires de Berlin von 1768 eine neue Methode des Herrn de la Grange finden, vermittelst der unendlichen Reihen alle Buchstaben-Gleichungen von welchem Grade sie auch seyn mögen, aufzulösen. Diese Abhandlung ist vom Hrn. Prof. Michelsen übersetzt und findet sich in dem dritten Bande von Eulers Einleitung zur Analysis des Unendlichen, welcher auch unter dem besondern Titel: Theorie der Gleichungen, zu haben ist.

ferner $1-a)\ a^4\ \ (a^4+\frac{a^5}{1-a}$

$$\frac{a^4-a^5}{}$$
$$+a^5 \text{ u. s. f.}$$

§. 291.

Hieraus sehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ durch alle folgende Formen ausgedrückt werden kann:

I.) $1+\frac{a}{1-a}$, II.) $1+a+\frac{a^2}{1-a}$,

III.) $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}$, IV.) $1+a+a^2+a^3+\frac{a^4}{1-a}$,

V.) $1+a+a^2+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$, u. s. f.

Man betrachte die erste Form $1+\frac{a}{1-a}$. Nun ist 1 so viel als $\frac{1-a}{1-a}$; folglich $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Für die zweyte Form $1+a+\frac{a^2}{1-a}$ bringe man den ganzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekommt man $\frac{1-a^2}{1-a}$, dazu $\frac{+a^2}{1-a}$, giebt $\frac{1-a^2+a^2}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$.

Für die dritte Form $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}$, giebt der ganze Theil zum Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$, dazu der Bruch $\frac{a^3}{1-a}$, macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellet, daß alle diese Formen in der That so viel sind als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

§. 292.

Man kann daher solchergestalt so weit fortgehen, als man will, ohne daß man weiter nöthig hat zu rechnen. Also wird seyn $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$. Man kann auch so gar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset, welche ist:

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} \text{ u. s. f.}$$

bis ins Unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit Recht behaupten, daß ihr Werth gleich dem Bruch $\frac{1}{1-a}$ sey.

§. 293.

Dieses scheint anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden. Es sey erstlich $a = 1$, so wird unsere Reihe $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ u. s. f. bis ins Unendliche, welche dem Bruch $\frac{1}{1-1}$, das ist $\frac{1}{0}$, gleich seyn soll. Wir haben aber schon oben (§. 83) bemerkt, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das anschaulichste bestätigt.

Wenn man aber setzt $a = 2$, so wird unsere Reihe $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ u. s. f. bis ins Unendliche, deren Werth seyn soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1} = -1$; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es

Es ist aber zu merken, daß wenn man irgendwo in obiger Reihe stehen bleiben will, dazu allezeit noch ein Bruch gesetzt werden muß.

Also wenn wir z. B. bey 64 still stehen, so müssen wir zu $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{-1} = -128$ hinzusetzen, woraus $127 - 128$ entsteht, das ist $- 1$.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man steht aber hingegen auch niemals still.

§. 294.

So verhält sich also die Sache, wenn für a größere Zahlen als 1 angenommen werden. Nimmt man aber für a kleinere Zahlen, so läßt sich alles leichter begreifen.

Es sey z. B. $a = \frac{1}{2}$, so bekommt man $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, welches folgender Reihe gleich seyn wird: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ u. s. f. ohne Ende. Denn nimmt man nur zwey Glieder, so hat man $1 + \frac{1}{2}$, und so fehlt noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlt noch $\frac{1}{4}$; nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{7}{8}$, fehlt noch $\frac{1}{8}$; woraus man sieht, daß immer weniger fehlt, folglich wenn man unendlich weit fortgeht, so muß gar nichts fehlen.

Anmerk. Der Fehler wird nemlich hier immer noch einmal so klein, und kann daher zuletzt kleiner als jede gegebene Größe werden.

§. 295.

Man setze $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, welchem daher folgende Reihe gleich ist:

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ u. s. f. bis ins Unendliche. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlt noch $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{4}{9}$, fehlt noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlt noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreymal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

§. 296.

Laßt uns annehmen $a = \frac{2}{3}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, die Reihe aber wird: $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ u. s. f. bis ins Unendliche.

Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$, so fehlt noch $1\frac{1}{3}$.

Nimmt man drey Glieder $2\frac{1}{9}$, so fehlt noch $\frac{8}{9}$.

Nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$, so fehlt noch $\frac{16}{27}$.

§. 297.

Es sey $a = \frac{1}{4}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$ die Reihe aber wird $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ u. s. f. Nimmt man zwey Glieder $1\frac{1}{4}$, so fehlt noch $\frac{1}{12}$; nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{5}{16}$, da denn noch $\frac{1}{48}$ fehlt, u. s. w.

§. 298.

Auf gleiche Weise kann auch dieser Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset werden, wenn man den Zähler 1 durch den Nenner $1 + a$ wirklich dividirt, wie folgt:

$$
\begin{array}{l}
1+a)\ 1\ (1 - a + a^2 - a^3 + a^4 \\
\quad\ \underline{1 + a} \\
\qquad - a \\
\qquad \underline{- a - a^2} \\
\qquad\qquad + a^2 \\
\qquad\qquad \underline{+ a^2 + a^3} \\
\qquad\qquad\qquad - a^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{- a^3 - a^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + a^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+ a^4 + a^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a^5 \text{ u. s. f.}
\end{array}
$$

Daher ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe:

$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 \text{ u. s. f.}$$

Zusatz. Da ich hier manches Paradoxon zu erläutern habe, so ist es nöthig, daß ich dieses Beyspiel ausführlich durchgehe. Die Aufgabe ist:

Den Quotienten anzugeben, welchen 1 durch $1+a$ dividirt geben muß.

Auflösung. 1) Das erste Glied des Quotienten ist $1 : 1 = 1$.

Dieses mit dem Divisor $1+a$ multiplicirt, giebt $1+a$, und dieß vom Dividendus 1 abgezogen, giebt den Rest $1 - 1 - a = - a$.

2) Vergleicht man den Divisor $1+a$ mit dem Rest $-a$, so ergiebt sich das zweyte Glied des Quotienten $= -a : 1 = -a$.

Multiplicirt man es mit dem Divisor $1+a$, so ist das Product $= -a - a^2$, und dieses vom Reste $-a$ abgezogen, giebt den neuen Rest $-a - (-a - a^2) = + a^2$.

3) Vergleicht man ferner den Divisor $1 + a$ mit dem erst erhaltenen Rest $+ a^2$, so findet man des Quotienten drittes Glied $a^2 : 1 = a^2$.

Multiplicirt man dieses mit dem Divisor $1 + a$, so erhält man das Product $= a^2 + a^3$, und dieses vom Rest a^2 abgezogen, giebt $a^2 - (a^2 + a^3) = - a^3$.

4) Vergleicht man den Divisor $1 + a$ mit dem Rest $-a^3$, so findet man das vierte Glied des Quotienten $= - a^3 : 1 = - a^3$.

Multiplicirt man damit den Divisor $1 + a$, so ist das Product $= - a^3 - a^4$, und wenn man nun dieses vom Reste $- a^3$ abzieht, so findet man den neuen Rest $- a^3 - (- a^3 - a^4) = + a^4$.

5) Die bisher in (n. 1, 2, 3, 4.) erhaltenen Glieder des Quotienten, und die zugehörigen Reste sind also:

Die Glieder des Quotienten: $1 - a + a^2 - a^3$

Die zugehörigen Reste: $- a + a^2 - a^3 + a^4$

6) Die Glieder des Quotienten in (n. 5.) richten sich nach diesem Gesetze: vom zweyten Gliede an folgen die Potenzen von a so auf einander, daß der Exponent von a in jedem Gliede um Eins kleiner ist, als die Zahl, welche anzeiget, das wievielste selbiges Glied ist, ob es nemlich das zweyte, dritte, vierte u. s. f. ist, so, daß jede gerade Potenz von a, die nemlich 2, 4, 6, 8 u. s. f. zum Exponenten hat, bejaht, und jede andere verneint ist.

7) Die Reste aber, welche bey der Bestimmung der Glieder erhalten werden (n. 5.), sind ebenfalls Potenzen von a, aber um einen Grad höher, als die, welche die Glieder des Quotienten enthalten, bey deren Bestimmung sie erhalten werden, und zwar bejaht sind alle gerade Potenzen von a, verneint aber die übrigen.

8) Man nehme nun an, daß die Gesetze (n. 6. 7.) für eine gewisse Anzahl n von Gliedern des verlangten Quotienten richtig sind, so muß das nte Glied desselben $\pm a^{n-1}$ seyn, und einen Rest $= \mp a^n$ zurücklassen, und nun giebt dieser Rest durch das erste Glied 1 des Divisors $1 + a$ dividirt, das nächst folgende $(n + 1)$te Glied $\mp a^n$ des Quotienten.

Offenbar ist es also, daß, wenn die Gesetze (n. 6. 7.) für n Glieder des verlangten Quotienten gelten, sie auch für die um Eins größere Anzahl derselben gelten müssen: da also diese Gesetze für 4 Glieder wirklich gelten, wegen (n. 5.); so müssen sie auch für $4 + 1$ oder 5 Glieder gelten, und wenn dieses wahr ist, gelten die Gesetze auch für $5 + 1 = 6$ Glieder, u. s. f. für jede nächst größere Anzahl von Gliedern.

9) Man kann daher den verlangten Quotienten auf die nachstehende Art angeben: $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - - - - \pm a^n \mp a^{n+1} \pm - - -$

Eben so findet man:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + - - - + a^n + - - -$$

(siehe §. 292).

Um

Um nun aber die Schwierigkeiten zu heben, die viele Mathematikverständige bey diesen unendlichen Reihen gefunden haben, und wobey selbst ein Euler nicht allein unzulängliche, sondern sogar zum Theil ganz falsche Gründe angiebt, wie z. B. in §. 299, müssen wir allemal auf den Rest achten, der übrig bleibt, man mag aufhören bey welchem Gliede mag will.

Aus dem vorhergehenden erhellet nemlich, daß das $(2n+1)$te Glied des Quotienten $\frac{1}{1+a} = + a^{2n}$, und der dazu gehörige Rest $- a^{2n+1}$ ist.

Der Quotient vollständig ausgedrückt, wäre daher folgender:

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + - - - + a^{2n} - \frac{a^{2+1}}{1+a}; \text{ oder auch}$$

$$= 1 - a + a^2 - a^3 + - - - - a^{2n+1} + \frac{a^{2n+2}}{1+a}$$

Wäre $a = 1$, so ist $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 - - - + 1 - \frac{1}{2}$ oder $= 1 - 1 + 1 - - - - + 1 - 1 + \frac{1}{2}$. Jedes ungerade Glied hebt sich mit seinem nächst folgenden Gliede auf. Im ersten Falle bleibt also übrig $+ 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, und im zweyten Falle bleibt bloß die Ergänzung $\frac{1}{2}$ übrig. Nimmt man also, wie billig, auf diese Ergänzung Rücksicht, so schwinden alle Schwierigkeiten, wovon weiter unten ein mehreres.

§. 299.

Setzt man $a = 1$, so erhält man diese merkwürdige Vergleichung:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ u. s. f.}$$

bis ins Unendliche, welches widersinnig scheint; denn wenn man irgendwo mit -1 aufhört, so giebt diese Reihe 0; hört man irgend aber mit + auf, so giebt dieselbe 1. Allein eben hieraus läßt sich die Sache begreifen; denn wenn man ohne Ende fort gehen und weder bey -1 noch $+1$ irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 herauskommen, sondern etwas, das dazwischen liegt, welches $\frac{1}{2}$ ist.

§. 300.

Es sey ferner $a = \frac{1}{2}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ $= \frac{2}{3}$, welchem folglich gleich seyn wird die Reihe: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ u. s. f. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{1}{2}$, welches um $\frac{1}{6}$ zu wenig ist. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{3}{4}$, also um $\frac{1}{12}$ zu viel. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{5}{8}$, welches um $\frac{1}{24}$ zu wenig ist u. s. f.

§. 301.

Setzt man $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, dem diese Reihe gleich seyn wird: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$ u. s. f. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{7}{9}$, ist zu viel um $\frac{1}{36}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$, u. s. f.

§. 302.

Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ noch auf eine andere Art auflösen, indem man 1 durch $a + 1$ theilt, nemlich:

$$a+1)\ 1\ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}\right.\ \text{u. s. f.}$$

$$1 + \frac{1}{a}$$

1ster Rest $-\frac{1}{a}$

$$-\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}$$

2ter Rest $+\frac{1}{a^2}$

$$+\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}$$

3ter Rest $-\frac{1}{a^3}$

$$-\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4}$$

4ter Rest $+\frac{1}{a^4}$

$$+\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}$$

5ter Rest $-\frac{1}{a^5}$ u. s. f.

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6}\ \text{u. s. f. ohne Ende.}$$

Setzt man $a = 1$, so bekommt man diese Reihe:

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ u. s. f. $= \frac{1}{2}$ wie oben.

Setzt man $a = 2$, so bekommt man diese Reihe:

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ u. s. f.

Zusatz. Auch hier sieht man leicht ein, daß der $(n-1)$te Rest das $n$te Glied des Quotienten giebt. Ist nun n ungerade, so ist das $n$te Glied des Quotienten, so wie auch der $(n-1)$te Rest positiv.

§. 303.

Auf gleiche Weise kann man auf eine allgemeine Art diesen Bruch $\frac{c}{a+b}$ in eine Reihe auflösen:

$$a+b)\ c\ \left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}\right.\text{ u. s. f.}$$

$$c + \frac{bc}{a}$$

1ster Rest $-\frac{bc}{a}$

$$-\frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2}$$

2ter Rest $+\frac{b^2c}{a^2}$

$$+\frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3}$$

3ter Rest $-\frac{b^3c}{a^3}$

Woraus wir diese Vergleichung erhalten: $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$ bis ins Unendliche.
Es sey $a = 2$, $b = 4$, und $c = 3$, so haben wir $\frac{c}{a+b} = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12$ u. s. f.
Es sey $a = 10$, $b = 1$ und $c = 11$, so haben wir $\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1} = 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} - \frac{11}{1000}$ u. s. f.

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$, welches um $\frac{1}{10}$ zu viel. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{99}{100}$, welches um $\frac{1}{100}$ zu wenig. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ u. s. f.

1. Zusatz.

1. Zusatz. Der $2n-1$ te Rest ist also $-\frac{b^{2n-1}c}{a^{2n-1}}$, und dieser giebt das $2n$te Glied des Quotienten $= -\frac{b^{2n-1}c}{a^{2n}}$.

2. Zusatz. Daß $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - - - \frac{b^{2n-1}c}{a^{2n}} + \frac{b^{2n}c}{a^{2n+1}} - - -$ ist, davon kann man sich auch, ohne die Division wirklich zu verrichten, auf folgende Art überzeugen:

Es ist $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a\left(1+\frac{b}{a}\right)} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$

Nun ist aus §. 298. bekannt, daß

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - - - - \frac{b^{2n-1}}{a^{2n-1}} + \frac{b^{2n}}{a^{2n}} - - - -$$

Folglich ist auch $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - - - - \frac{b^{2n-1}.c}{a^{2n}} + \frac{b^{2n}.c}{a^{2n+1}} - - - -$

Eben so findet man:

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{b}{a}} = \frac{c}{a}\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \ldots + \frac{b^r}{a^r} + \ldots\right) \text{ (§. 292.)}$$

$$= \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} + \ldots + \frac{b^rc}{a^{r+1}} + \ldots$$

Es ist einleuchtend, daß beyde Reihen sich nähern müssen, wenn $a > b$ genommen wird, und daß sie sich desto schneller ihrem wahren Werthe nähern werden, je größer a in Vergleichung mit b seyn wird.

Das bisher Gesagte setzt uns schon in den Stand, einen jeden gegebenen Bruch $\frac{p}{q}$ in eine solche Reihe zu verwandeln,

daß

daß die ersten Glieder derselben schon sehr genau eben den Bruch geben, welcher die Summe der ganzen Reihe seyn muß.

Zu dieser Absicht kann man eine große ganze Zahl n nehmen und $\frac{p}{q} = \frac{pn}{nq} = \frac{p\,n}{nq+1-1} = n.\frac{p}{nq+1-1}$ setzen.

Wenn man also $n.q+1 = a$; $1 = b$ und $p = c$ bey der Formel $\frac{c}{a-b}$ setzt; so findet man die verlangte Reihe:

$$\frac{p}{q} = n.\left(\frac{p}{nq+1} + \frac{p}{(nq+1)^2} + \frac{p}{(nq+1)^3} + \right)$$

Es sey $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$, so ist $p = 3$, $q = 2$, und man nehme $n = 10000$; so ist $\frac{3}{2} = 10000\left(\frac{3}{20001} + \frac{3}{(20001)^2} + \frac{3}{(20001)^3} + --- \right)$

Und nun ist klar, daß, obgleich die Anzahl der Glieder dieser Reihe völlig unbestimmt, ja unendlich groß ist, dennoch schon die ersten Glieder mit 10000 multiplicirt, den Bruch $\frac{3}{2}$ sehr genau geben müssen, und noch genauer geben würden, wenn man für n eine noch größere Zahl nähme.

Der Mathematiker ist noch nicht damit zufrieden, daß er weiß, daß die ersten Glieder einer Reihe schon für die Praxis hinreichen, sondern er will auch noch den Fehler bestimmen, welchen man begehen würde wenn man die Summe von einigen ersten Gliedern der einem Bruche zugehörigen Reihe statt der Summe der ganzen Reihe in einer Rechnung gebrauchte, ohne diese Summe erst zu suchen, ja ohne den Bruch in die zugehörige Reihe zu verwandeln.

Dazu soll nun folgende Betrachtung dienen:

Wenn in der den Bruch $\frac{c}{a+b}$ zugehörigen Reihe irgend ein Glied, z. B. das $(r+1)$te diese Form $\pm\frac{b^r c}{a^{r+1}}$ hätte, so ist $\mp\frac{b^{r+1}c}{a^{r+1}}$ der $(r+1)$ te Rest, der das nun folgende $(r+2)$ te Glied der Reihe geben würde, wenn man weiter dividiren wollte.

Wollte man daher mit den ersten $r+1$ Gliedern der Reihe zufrieden seyn, so vernachläßigt man einen Bruch, der entstehet, wenn man den $(r+1)$ten Rest noch mit dem Divisor theilt, dieser Bruch wäre also folgender:

$$\mp \frac{b^{r+1}c}{a^{r+1}(a+b)} = \mp \frac{b^{r+1}c}{a^{r+2}+a^{r+1}.b}$$

Es sey z. B. $c=3$, $a=100$, $b=2$, und $r=4$, also $r+1=5$, und $r+2=6$, so ist $\frac{c}{a+b} = \frac{3}{102} = \frac{3}{100+2}$ und

$$\frac{b^{r+1}c}{a^{r+2}+a^{r+1}.b} = \frac{2^5.3}{100^6+100^5.2} =$$

$$\frac{32.3}{1000000000000+20000000000}$$

$$= \frac{96}{1020000000000} = \frac{1}{106250000}$$

Weil aber $r = 4$ eine gerade, daher $r+1=5$ eine ungerade Zahl war; so ist dieser Bruch negativ, das heißt nun: wenn man den Bruch $\frac{3}{102} = \frac{3}{100+2}$ in eine Reihe verwandelt, und davon nur die 5 ersten Glieder zusammen addirte; so würde diese Summe mit dem Bruch $\frac{1}{106250000}$ zusammen genommen, die Summe der ganzen Reihe, daher den Bruch $\frac{3}{102}$ genau geben, folglich wäre jene Summe nur um $\frac{1}{106250000}$ größer als der Bruch $\frac{3}{102}$.

§. 304.

Wenn der Divisor aus mehrern Theilen besteht, so kann die Division auf eben diese Art ins Unendliche fortgesetzt werden.

Z. B. wenn dieser Bruch $\frac{1}{1-a+a^2}$ gegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, die demselben gleich ist, auf folgende Art gefunden:

$$
\begin{array}{lllllllll}
 & 1 - a + a^2) \; 1 \; (1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 \text{ u. s. f.} \\
 & \underline{1 - a + a^2} \\
\text{1ster Rest} & +a - a^2 \\
 & \underline{+a - a^2 + a^3} \\
\text{2ter Rest} & \quad -a^3 \\
 & \quad \underline{-a^3 + a^4 - a^5} \\
\text{3ter Rest} & \qquad -a^4 + a^5 \\
 & \qquad \underline{-a^4 + a^5 - a^6} \\
\text{4ter Rest} & \qquad\quad +a^6 \\
 & \qquad\quad \underline{+a^6 - a^7 + a^8} \\
\text{5ter Rest.} & \qquad\qquad +a^7 - a^8 \\
 & \qquad\qquad \underline{+a^7 - a^8 + a^9} \\
\text{6ter Rest.} & \qquad\qquad\quad -a^9 \text{ u. s. f.}
\end{array}
$$

Daher haben wir folgende Gleichung: $\frac{1}{1-a+a^2} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$ u. s. f. ohne Ende. Nimmt man hier $a = 1$, so bekommt man: $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1$ u. s. f. welche Reihe die schon oben (§. 299.) gefundene $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ u. s. f. verdoppelt in sich enthält; da nun die obige Reihe gleich $\frac{1}{2}$ war, so ist kein Wunder, daß diese $\frac{2}{2}$, das ist 1, ausmacht.

Setzt man $a = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese Gleichung: $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$ u. s. f. Setzt man $a = \frac{1}{3}$, so bekommt man folgende Gleichung, als $\frac{1}{\frac{7}{9}}$ oder $\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$ u. s. f. Nimmt man hier vier Glieder, so bekommt man $\frac{104}{81}$, welches um $\frac{1}{567}$ kleiner als $\frac{9}{7}$ ist.

Man setze ferner $a = \frac{2}{3}$, so bekommt man diese Gleichung: $\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729}$ u. s. f. und diese Reihe muß der vorigen gleich seyn; man subtrahire also die obere von dieser, so bekommt man: $0 = \frac{1}{3}$

$0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{35}{81} + \frac{63}{729}$ u. s. f. welche vier Glieder zusammen $-\frac{2}{81}$ machen.

Zusatz. Anfängern ist es ziemlich schwer, das allgemeine Gesetz der Reihe zu entdecken, welche $\frac{1}{1-a+a^2}$ giebt. Ich will daher solches hier mittheilen. Es ist nemlich:

$$\frac{1}{1-a+a^2} = \overset{1}{a^0} + \overset{2}{a^1} - \overset{3}{a^3} - \overset{4}{a^4} + \overset{5}{a^6} + \overset{6}{a^7} - \overset{7}{a^9} - \overset{8}{a^{10}}$$

$$\ldots \pm \underset{(2x+1)\text{tes}}{a^{3x}} \pm \underset{2(x+1)\text{tes Glied}}{a^{1+3x}} \mp \ldots$$

Gesetzt, man wollte das 13te Glied wissen, so muß, da 13 ungerade ist, das x aus dieser Formel $2x+1$, welche jede ungerade Zahl vorstellt, bestimmt werden. Wir haben daher folgende Gleichung:

$$\begin{array}{rl} 2x+1 & = 13 \\ 1 & = 1 \text{ subtrahirt} \\ \hline \text{bleibt } 2x & = 12; \end{array}$$

denn wenn Gleiches von Gleichem subtrahirt wird, so bleibt Gleiches. Wenn aber eine Zahl x, zweymal genommen, gleich 12 ist, so muß diese Zahl $x = 6$ seyn. Nun ist das zu $2x+1$ zugehörige Glied der Reihe $= a^{3x}$; da nun $x = 6$, so ist das 13te Glied $= a^{3.6} = a^{18}$.

Man soll das 30te Glied bestimmen.
Da 30 eine gerade Zahl ist, so muß man $2(x+1) = 30$ setzen, mit 2 auf beyden Seiten dividirt, giebt $x+1 = 15$, denn wenn man Gleiches mit Gleichem dividirt, $1 = 1$ subtra~~hirt~~, so kommen gleiche Quotienten, folglich $x = 14$.
Da nun a^{1+3x} zu $2(x+1)$ gehört, so findet sich $a^{1+3x} = a^{1+3.14} = a^{43}$ als das 30te Glied der Reihe. Um nun zu bestimmen, welches Zeichen diese Glieder, nemlich das 13te und 30te Glied, haben, so darf man nur überlegen, daß das erste Paar positiv, das 2te Paar negativ, das 3te Paar wieder positiv u. s. w. also immer abwechselnd, woraus man deutlich einsieht, daß jedes ungerade Paar Glieder positiv, und jedes gerade negativ ist.

Bis zum 13ten Gliede sind 6 Paar Glieder, und ein Glied von dem siebenten Paare vorhanden; also ist das 13te Glied positiv, weil es das erste Glied eines ungeraden Paares ist.

Ferner, bis zum 30ten Gliede sind 15 Paare, also ist das 30te Glied auch positiv.

Allgemein, $\frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2}$, das heißt: bis zum $(2x+1)$ten Gliede sind x Paar, und von dem $(x+1)$ten Paar ist nur das erste Glied vorhanden, aber zu $(x+1)$ Paaren gehören $2(x+1)$ Glieder; wenn daher $x+1$ gerade ist, so ist das zu $2x+1$ oder zu $2(x+1)$ gehörige Glied negativ, positiv aber, wenn $x+1$ ungerade ist.

§. 305.

Auf diese Art kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflösen, und dies hat nicht nur öfters sehr großen Nutzen, sondern es ist auch an sich selbst höchst merkwürdig, daß eine unendliche Reihe, ungeachtet dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Entdeckungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, daher verdient diese Materie allerdings mit der größten Aufmerksamkeit erwogen zu werden. (Siehe §. 303. den 2ten Zusatz am Ende).

VI. Capitel.

Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen.

§. 306.

Wenn man das Quadrat einer zusammengesetzten Größe finden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbst multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von $a + b$ gefunden, wie folget: