Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

VI. Capitel. Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen.

Allgemein, $\frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2}$, das heißt: bis zum $(2x+1)$ten Gliede sind x Paar, und von dem $(x+1)$ten Paar ist nur das erste Glied vorhanden, aber zu $(x+1)$ Paaren gehören $2(x+1)$ Glieder; wenn daher $x+1$ gerade ist, so ist das zu $2x+1$ oder zu $2(x+1)$ gehörige Glied negativ, positiv aber, wenn $x+1$ ungerade ist.

§. 305.

Auf diese Art kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflösen, und dies hat nicht nur öfters sehr großen Nutzen, sondern es ist auch an sich selbst höchst merkwürdig, daß eine unendliche Reihe, ungeachtet dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Entdeckungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, daher verdient diese Materie allerdings mit der größten Aufmerksamkeit erwogen zu werden. (Siehe §. 303. den 2ten Zusatz am Ende).

VI. Capitel.

Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen.

§. 306.

Wenn man das Quadrat einer zusammengesetzten Größe finden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbst multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von $a+b$ gefunden, wie folget:

$a+b$

$$\begin{array}{l} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \\ \quad\;\; \underline{+ ab + b^2} \\ a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

§. 307.

Wenn daher die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a + b$, so bestehe das Quadrat I.) aus den Quadraten eines jeden Theils, nemlich a^2 und b^2, II.) aus dem doppelten Product der beyden Theile, nemlich $2ab$, und die ganze Summe $a^2 + 2ab + 2b$ ist das Quadrat von $a + b$.

Es sey z. B. $a = 10$ und $b = 3$, also daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; so wird solches seyn $= 100 + 60 + 9 = 169$.

§. 308.

Durch Hülfe dieser Formel lassen sich nun leicht die Quadrate von ziemlich großen Zahlen finden, wenn dieselben in zwey Theile zergliedert werden.

Also um das Quadrat von 57 zu finden, so zertheile man diese Zahl in $50 + 7$; daher das Quadrat seyn wird:

$$2500 + 700 + 49 = 3249.$$

§. 309.

Hieraus sieht man, daß das Quadrat von $a + 1$ seyn werde $a^2 + 2a + 1$; da nun von a das Quadrat a^2 ist, so wird das Quadrat von $a + 1$ gefunden, wenn man zu jenem addirt $2a + 1$, wobey zu merken, daß $2a + 1$ die Summe der beyden Wurzeln a und $a + 1$ ist; da also von 10 das Quadrat 100 ist, so wird das Quadrat von 11 seyn $= 100 + 21$, und da von 57 das Quadrat 3249 ist, so wird das Quadrat von 58 seyn $= 3249 + 115 = 3364$. Und ferner das Quadrat von $59 = 3364 + 117 = 3481$. Noch ferner das Quadrat von $60 = 3481 + 119 = 3600$ u. s. f.

§. 310.

Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a + b$, wird also angedeutet $(a + b)^2$; daher haben wir $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b$, woraus folgende Gleichungen hergeleitet worden:
$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$, $(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$, $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$, $(a + 4)^2 = a^2 + 8a + 16$, u. s. f.

§. 311.

Wenn die Wurzel $a - b$ ist, so wird ihr Quadrat $= a^2 - 2ab + b^2$ seyn, welches daher aus den Quadraten beyder Theile besteht, wovon aber das doppelte Product weggenommen werden muß.

Es sey z. B. $a = 10$ und $b = 1$, so wird das Quadrat von $9 = 100 - 20 + 1 = 81$ seyn.

§. 312.

Da wir nun diese Gleichung haben: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, so wird $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$ seyn; das Quadrat von $a - 1$ wird also gefunden, wenn man von a^2 subtrahirt $2a - 1$, welches die Summe der beyden Wurzeln a und $a - 1$ ist.

Es sey z. B. $a = 50$, so ist $a^2 = 2500$ und $a - 1 = 49$, daher $49^2 = 2500 - 99 = 2401$.

§. 313.

Dieses läßt sich auch durch Brüche erläutern. Denn wenn man für die Wurzel $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$, welches 1 ausmacht, nimmt, so wird das Quadrat seyn:
$\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25}$, das ist 1.

Ferner

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, welches $\frac{1}{6}$ ist, wird seyn $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

§. 314.

Wenn die Wurzel aus mehr Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen. Also von $a + b + c$ wird das Quadrat gefunden, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
a + b + c \\
a + b + c \\
\hline
a^2 + ab + ac \qquad + bc \\
\quad + ab + ac + b^2 + bc + c^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2
\end{array}
$$

woraus man sieht, daß dasselbe I. aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel und II. aus dem doppelten Product von je zwey Theilen mit einander besteht.

§. 315.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, wollen wir die Zahl 256 in diese drey Theile zertheilen $200 + 50 + 6$; daher das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt seyn wird:

$$
\begin{array}{r}
40000 \\
2500 \\
36 \\
20000 \\
2400 \\
600 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
256 \\
256 \\
\hline
1536 \\
1280 \\
512 \\
\hline
65536
\end{array}
$$

65536 und dieses ist dem 256.256 vollkommen gleich.

§. 316.

Wenn einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regel gefunden, wenn man nur bey den doppelten Producten

Achtung giebt, was für ein Zeichen einem jeden zukommt.

Also von $a - b - c$ wird das Quadrat seyn:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc.$$

Wenn also die Zahl 256 also vorgestellet wird: $300 - 40 - 4$, so bekömmt man:

positive Theile	negative Theile
+ 90000	— 24000
1600	2400
320	— 26400
16	
+ 91936	
— 26400	

65536. Quadrat von 256, wie oben.

Zusatz. Wenn die Wurzel vieltheilig ist, so enthält das Quadrat derselben die Quadrate aller Theile, und die doppelten Producte aus der Summe aller ersten Theile in den nächstfolgenden.

Beweis:

Man setze, die vieltheilige Wurzel sey $a + b + c + d + e$ - - - - $+ x$, so soll

$$(a + b + c + d + e - - - x)^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$
$$+ 2(a + b)c + c^2$$
$$+ 2(a + b + c)d + d^2$$
$$+ 2(a + b + c + d)e + e^2$$
$$+ 2(a + b + c + d + e)f + f^2$$
$$\vdots$$
$$+ 2(a + b + c - - + v + w)x + x^2 \text{ seyn.}$$

Folgende Schlüsse werden uns von der Richtigkeit dieser Producte überzeugen:

Es sey $a + b + c + d + e - - x = A + x$,

so ist $(a + b + c + d - + x)^2 = A^2 + 2Ax + x^2$

A ist gleich $(a + b + c - - - - -)$ nemlich allen Theilen weniger x,

folglich $2Ax + \cancel{x^2}$ [handschriftlich: x^2] $= 2(a + b + c - + v + w)x + x^2$.

Nun setze man $A = (a + b + c - + v + w) = B + w$, so daß also B wiederum einen Theil weniger hat, als A, so ist

$A^2 = B^2$

$$A^2 = B^2 + 2Bw + w^2$$

also ist $2Bw + w^2 = 2(a + b + c - - - + v)w + w^2$.

Aus dem bisherigen ist schon klar, daß der in Klammern eingeschlossene Factor von unten an gerechnet immer im folgenden einen Theil weniger haben wird, als der nächst vorhergehende, daß also zuletzt nur zwey Theile übrig bleiben können, nemlich $a + b$, deren Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ ist.

VII. Capitel.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel in zusammengesetzten Größen.

§. 317.

Um eine sichere Regel zur Ausziehung zusammengesetzter Wurzeln zu finden, müssen wir das Quadrat von der Wurzel $a + b$, welches $a^2 + 2ab + b^2$ ist, genau in Erwägung ziehen, und suchen, wie man wieder aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen könne. Hierüber sind folgende Betrachtungen anzustellen.

§. 318.

Erstlich, da das Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen müsse; und wenn das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potenzen von einem Buchstaben, als a, immer abnehmen, so ist klar, daß das erste Glied das Quadrat von dem ersten Glied der Wurzel seyn werde. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats a^2 ist, so ist offenbar, daß das erste Glied der Wurzel, a seyn müsse.