Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

VII. Capitel. Von der Ausziehung der Quadratwurzel in zusammengesetzten Größen.

$$A^2 = B^2 + 2Bw + w^2$$

also ist $2Bw + w^2 = 2(a + b + c - - - + v)w + w^2$.

Aus dem bisherigen ist schon klar, daß der in Klammern eingeschlossene Factor von unten an gerechnet immer im folgenden einen Theil weniger haben wird, als der nächst vorhergehende, daß also zuletzt nur zwey Theile übrig bleiben können, nemlich $a + b$, deren Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ ist.

VII. Capitel.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel in zusammengesetzten Größen.

§. 317.

Um eine sichere Regel zur Ausziehung zusammengesetzter Wurzeln zu finden, müssen wir das Quadrat von der Wurzel $a + b$, welches $a^2 + 2ab + b^2$ ist, genau in Erwägung ziehen, und suchen, wie man wieder aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen könne. Hierüber sind folgende Betrachtungen anzustellen.

§. 318.

Erstlich, da das Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen müsse; und wenn das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potenzen von einem Buchstaben, als a, immer abnehmen, so ist klar, daß das erste Glied das Quadrat von dem ersten Glied der Wurzel seyn werde. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats a^2 ist, so ist offenbar, daß das erste Glied der Wurzel, a seyn müsse.

§. 319.

Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nemlich a gefunden, so betrachte man das übrige im Quadrat, welches $2ab + b^2$ ist, um zu sehen, wie man daraus den andern Theil der Wurzel, welcher b ist, finden könne. Hiebey bemerken wir, daß jenes übrige oder jener Rest $2ab + b^2$ durch folgendes Product vorgestellet werden könne $(2a + b)b$. Da nun dieser Rest zwey Factoren, $2a + b$ und b hat, so wird der letztere b, das ist der zweyte Theil der Wurzel, gefunden, wenn man den Rest $2ab + b^2$ durch $2a + b$ dividirt.

§. 320.

Um also den zweyten Theil der Wurzel zu finden, so muß man den Rest durch $2a + b$ dividiren, da dann der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn wird. Bey dieser Division aber ist zu merken, daß 2a das Doppelte von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a ist; das andere Glied b aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch offen bleiben; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabey nur auf das erste Glied 2a gesehen wird. So bald man aber den Quotienten gefunden, welcher hier b ist, so muß man denselben auch an die offene Stelle setzen und die Division vollenden.

§. 321.

Die Rechnung also, wodurch aus obigem Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ die Wurzel gefunden wird, kann also vorgestellt werden:

$$\begin{array}{r|l} & a^2 + 2ab + b^2 \;(a + b \\ & a^2 \\ \hline 2a + b & + 2ab + b^2 \\ & + 2ab + b^2 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

§. 322.

§. 322.

Auf solche Art kann auch die Quadratwurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wenn dieselben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2+6ab+9b^2\;(a+3b \\
 & a^2 \\
\hline
2a+3b & +6ab+9b^2 \\
 & +6ab+9b^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2-4ab+b^2\;(2a-b \\
 & 4a^2 \\
\hline
4a-b & -4ab+b^2 \\
 & -4ab+b^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9p^2+24pq+16q^2)\;3p+4q \\
 & 9p^2 \\
\hline
6p+4q & +24pq+16q^2 \\
 & +24pq+16q^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 25x^2-60x+36)\;5x-6 \\
 & 25x^2 \\
\hline
10x-6 & -60x+36 \\
 & -60x+36 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

§. 323.

Wenn bey der Division noch ein Rest bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als 2 Gliedern besteht. Alsdann werden die zwey schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das folgende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$\begin{array}{r|l}
 & a^2 + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 + c^2 \;(a + b - c \\
 & a^2 \\
2a + b & + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 + c^2 \\
 & + 2ab \qquad\qquad\qquad + b^2 \\
2a + 2b - c & - 2ac - 2bc + c^2 \\
 & - 2ac - 2bc + c^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \;(a^2 + a + 1 \\
 & a^4 \\
2a^2 + a & + 2a^3 + 3a^2 \\
 & + 2a^3 + a^2 \\
2a^2 + 2a + 1 & + 2a^2 + 2a + 1 \\
 & + 2a^2 + 2a + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 \;(a^2 - 2ab - 2b^2 \\
 & a^4 \\
2a^2 - 2ab & - 4a^3b + 8ab^3 \\
 & - 4a^3b + 4a^2b^2 \\
2a^2 - 4ab - 2b^2 & - 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\
 & - 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \,(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 & a^6 \\
\hline
2a^3 - 3a^2b & - 6a^5b + 15a^4b^2 \\
 & - 6a^5b + 9a^4b^2 \\
\hline
2a^3 - 6a^2b + 3ab^2 & + 6a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \\
 & + 6a^4b^2 - 18a^3b^3 + 9a^2b^4 \\
\hline
2a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - b^3 & - 2a^3b^3 + 6a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\
 & - 2a^3b^3 + 6a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

§. 323.

Aus dieser Regel folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechenbüchern für die Ausziehung der Quadratwurzel gegeben wird:

$$\sqrt{5|29} = 23.$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{}\,5 & 29 = 23. \\ 4 & \\ \hline 43 & 129 \\ & 129 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{}\,17 & 64 = 42. \\ 16 & \\ \hline 82 & 164 \\ & 164 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{}\,23 & 04 = 48. \\ 16 & \\ \hline 88 & 704 \\ & 704 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{}\,40 & 96 = 64. \\ 36 & \\ \hline 124 & 496 \\ & 496 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{}\,96 & 04 = 98. \\ 81 & \\ \hline 188 & 1504 \\ & 1504 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} \sqrt{}\,1 & 56 & 25 = 125. \\ 1 & & \\ \hline 22 & 56 & \\ & 44 & \\ \hline 245 & 1225 & \\ & 1225 & \\ \hline & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} \sqrt{}\,99 & 80 & 01 = 999. \\ 81 & & \\ \hline 189 & 1880 & \\ & 1701 & \\ \hline 1989 & 17901 & \\ & 17901 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

§. 325.

Wenn aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen, daß die gegebene Zahl kein Quadrat ist und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzelzeichens, welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschlossen wird. Also wird die Quadratwurzel von $a^2 + b^2$ auf diese Weise angedeutet: $\sqrt{}\,(a^2 + b^2)$; und $\sqrt{}\,(1 - xx)$ deutet die Quadratwurzel aus $1 - xx$ an. Statt dieses Wurzelzeichens kann man sich auch des gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ bedienen. Also wird auch durch $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel aus $a^2 + b^2$ angedeutet.

Zusatz. Aus der Arithmetik ist bekannt, daß die Einer zur Ordnung null, die Zehner zur ersten, die Hunderte zur zweyten, die Tausende zur dritten Ordnung gehören u. s. w.

Um anzudeuten, von welcher Ordnung eine Ziffer ist, schreibt man gerade über die Ziffer eine kleine Ziffer, welche die Ordnung anzeigen soll, und der Ordnungsexponent genannt wird, z. B. $\overset{6}{7}$ deutet an, daß 7 zur 6ten Ordnung gehört, oder 7000000.

Eine kleine Aufmerksamkeit wird sogleich lehren, daß der Ordnungsexponent auch anzeigt, wie viel Nullen man der ihm zugehörigen Ziffer anhängen soll. Eben so wird man leicht einsehen, daß $\overset{3}{7}\cdot\overset{9}{8} = \overset{3+9}{56} = \overset{12}{56}$; nemlich von dieser Zahl 56 gehört die 6, so wie die ganze Zahl, zur 12ten, und die 5 zur 13ten Ordnung.

Ferner $\left(\overset{7}{4}\right)^2 = \overset{7}{4}\cdot\overset{7}{4} = \overset{14}{4^2}$ und $\left(\overset{2}{3}\right)^5 = \overset{2}{3}\cdot\overset{2}{3}\cdot\overset{2}{3}\cdot\overset{2}{3}\cdot\overset{2}{3} = \overset{10}{3^5}$.

Dieses wenige vorausgesetzt, wird folgendes bey einiger Aufmerksamkeit verständlich seyn.

a, b, c, d, e, f - - - x; sollen einfache Zahlen vorstellen; so ist $\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}+\overset{r-2}{c}+\overset{r-3}{d}+\overset{r-4}{e}+\overset{r-5}{f} - - - +\overset{0}{x}$ eine allgemeine Darstellung einer $(r+1)$ ziffrigen Zahl.

Nun ist aus dem Zusatz des 316. §. bekannt, daß

$$\left(\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}+\overset{r-2}{c}+\overset{r-3}{d} - - - +\overset{0}{x}\right)^2$$

$$= \overset{2r}{a^2} + \overset{2r-1}{2ab} + \overset{2r-2}{b^2}$$

$$+ 2\left(\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}\right)\overset{r-2}{c} + \overset{2r-4}{c^2} = \overset{2r-2}{2ac} + \overset{2r-3}{2bc} + \overset{2r-4}{c^2}$$

$$2\left(\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}+\overset{r-2}{c}\right)\overset{r-3}{d} + \overset{2r-6}{d^3} = \overset{2r-3}{2ad} + \overset{2r-4}{2bd} + \overset{2r-5}{2cd} + \overset{2r-6}{d^3}$$

$$+2\left(\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}+\overset{r-2}{c}+\overset{r-3}{d}\right)\overset{r-4}{e} + \overset{2r-8}{e^2} = \overset{2r-4}{2ae} + \overset{2r-5}{2be} + \overset{2r-6}{2ce} + \overset{2r-7}{2de} + \overset{2r-8}{e^2}$$

$$\vdots$$

$$+2\left(\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}+\overset{r-2}{c}+\overset{r-3}{d} - - - +\overset{1}{w}\right)\overset{0}{x} + \overset{0}{x^2} = \overset{r}{2ax} + \overset{r-1}{2bx} + \overset{r-2}{2cx} +$$

$$\overset{r-3}{2dx} - - - \overset{1}{wx} + \overset{0}{x^2}$$

Um sogleich übersehen zu können, welche Glieder dieser Producte zu einerley Ordnung gehören, so schreibe man die Ordnungsexponenten von der höchsten bis zur niedrigsten in einer Horizontalreihe neben einander hin, und unter diese Ordnungsexponenten setze man in Verticalreihen die zu ihnen gehörigen Glieder, wie folget:

2r,

1	2	3	4	5	6	7te Glied		2r-(r+1)-1) Glied					u. s. f.	
2r,	2r-1,	2r-2,	2r-3,	2r-4,	2r-5,	2r-6,	- -	r,	r-1,	r-2,	r-3,	- -	1,	0.
a^2	2ab	b^2	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
		2ac	2bc	c^2	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
			2ad	2bd	2cd	d^2		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
				2ae	2be	2ce		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
								2ax	2bx	2cx	2dx	-	2wx	x^2

Hiebey bemerken wir nun folgendes: die Anzahl der in einer Verticalreihe befindlichen Producte ist immer in zwey zunächst auf einander folgende Verticalreihen gleich, und zwar

in der 1ten und 2ten ist die Anzahl der Producte 1
— 3ten und 4ten — — — 2
— 5ten und 6ten — — — 3
— 7ten und 8ten — — — 4
⋮ ⋮
- - (2n+1)ten und 2(n+1)ten - - - $\frac{2(n+1)}{2}=n+1$.

Man findet also die Anzahl der unter einander stehenden Producte in einer beliebigen Verticalreihe, wenn man zu der Zahl der Reihe, im Fall solche ungerade ist, eins addirt und diese Summe halbirt.

Ferner die höchste Ziffer des doppelten Products zweyer einfachen Zahlen ist höchstens von der 2ten Ordnung; denn 2. 9. 9 = 162, wo 2 von der nullten, 6 von der ersten und 1 von der zweyten Ordnung ist. Da nun 2. 9. 9 keine Ziffern höherer Ordnung geben, so kann das doppelte Product zweyer anderer einfachen Zahlen es um so weniger.

Die zur Ordnung r zugehörige Verticalreihe ist die (r+1)te, und die zu Nullten Ordnung gehörige ist die (2r+1)te. Nun glaubt sich vielleicht jemand berechtiget nach dem vorhergehenden zu schließen, daß in der (2r+1)ten Verticalreihe $\frac{2(r+1)}{2}=r+1$ Producte seyn müssen. Dieses wäre aber doch ganz falsch. Es ist nemlich hier noch eine Betrachtung zu machen, die wir oben absichtlich ausgelassen haben, um den Anfänger aufmerksam darauf zu machen, wie leicht man einen Beweis für richtig und vollständig halten kann, der es doch ganz und gar nicht ist.

Daß

Daß die Anzahl der Producte in der $(2n+1)$ten und $2(n+1)$ten Verticalreihe $= n+1$ sey, ist nur dann richtig, wann $2(n+1)$ kleiner oder gerade die Hälfte aller vorhandenen Verticalreihen ist.

Hier sind $(2r+1)$ Verticalreihen, daher muß $2(n+1) <$ oder $= \frac{2r+1}{2}$ seyn; da aber $2r+1$ eine ungerade Zahl ist, so kann $\frac{2r+1}{2}$ keine ganze Zahl, also auch nicht $2(n+1)$ gleich seyn, es muß daher $2(n+1) < \frac{2r+1}{2}$ seyn. Da $2r+1$ Verticalreihen vorhanden sind, so liegt eine in der Mitte, so daß sie auf jeder Seite r Verticalreihen hat; demnach kann $2(n+1)$ aufs höchste $= r$ seyn, und diese gehört zur $(r+1)$ten Ordnung.

Ist daher r eine gerade Zahl, so ist $\frac{r}{2}$, ist aber r ungerade, so ist $\frac{r+1}{2}$ die größte Anzahl von Producte, welche sich in einer Verticalreihe befinden.

Wenn ich sage, die $r$te Verticalreihe gehört zu $(r+1)$ten Ordnung, so zähle ich diese Reihen von der Linken zur Rechten; zählt man aber von der Rechten zur Linken, also von der Nullten Ordnung an, so gehört zur $r$ten Verticalreihe die $(r-1)$ Ordnung, und diese Reihe hat eben so viel Producte, als die zur $(r+1)$ten Ordnung gehörige.

Von der $(r+1)$ten Verticalreihe auf beyden Seiten gleich weit abstehende Reihen haben also immer gleich viel Glieder, mithin haben die zur nullten und ersten Ordnung gehörige Reihen nur 1 Glied, wie die zur $2r$ten und $(2r-1)$ten Ordnung gehörige Reihen u. s. f.

Der Platz erlaubt nicht, diese sehr nützliche allgemeine Betrachtungen weiter auszudehnen, und an besondern Beispielen die Anwendung zu zeigen. Indessen wird ein heller Kopf aus dem bisher Gesagten doch richtig zu bestimmen im Stande seyn, in welchen Stellen die Theile eines Quadrats einer vieltheiligen Wurzel ihren Anfang nehmen.