Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

VIII. Capitel. Von der Rechnung mit Jrrationalzahlen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

VIII. Capitel.

Von der Rechnung mit Irrationalzahlen.

§. 326.

Wenn zwey oder mehr Irrationalformeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches, wie oben (§. 8.) gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammen schreibt. Nur ist bey dem Abkürzen zu bemerken, daß statt $\sqrt{}\,a + \sqrt{}\,a$, $2\sqrt{}\,a$ geschrieben werde, und daß $\sqrt{}\,a - \sqrt{}\,a$ einander aufhebe oder nichts gebe. Also diese Formel $3 + \sqrt{}\,2$ und $1 + \sqrt{}\,2$ zusammen addirt, giebt $4 + 2\sqrt{}\,2$ oder $4 + \sqrt{}\,8$; ferner $5 + \sqrt{}\,3$ und $4 - \sqrt{}\,3$ zusammen addirt, giebt 9; ferner $2\sqrt{}\,3 + 3\sqrt{}\,2$ und $\sqrt{}\,3 - \sqrt{}\,2$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{}\,3 + 2\sqrt{}\,2$.

§. 327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction, indem man nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt lesen und hernach die Größen addiren darf, wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

$$\begin{array}{l} 4 - \sqrt{}\,2 + 2\sqrt{}\,3 - 3\sqrt{}\,5 + 4\sqrt{}\,6 \\ 1 + 2\sqrt{}\,2 - 2\sqrt{}\,3 - 5\sqrt{}\,5 + 6\sqrt{}\,6 \\ \hline 3 - 3\sqrt{}\,2 + 4\sqrt{}\,3 + 2\sqrt{}\,5 - 2\sqrt{}\,6 \end{array}$$

§. 328.

Bey der Multiplication ist nur zu merken, daß $\sqrt{}\,a$ mit $\sqrt{}\,a$ multiplicirt, a giebt. Wenn aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{}\,a$ mit $\sqrt{}\,b$ multiplicirt, $\sqrt{}\,ab$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

$1 + \sqrt{}\,1$

$$
\begin{array}{l}
1+\sqrt{2}\\
\underline{1+\sqrt{2}}\\
1+\sqrt{2}\\
\underline{\quad+\sqrt{2}+2}\\
1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
4+2\sqrt{2}\\
\underline{2-\sqrt{2}}\\
8+4\sqrt{2}\\
\underline{\quad-4\sqrt{2}-4}\\
8-4=4.
\end{array}
$$

§. 329.

Eben dieses gilt auch von den unmöglichen Größen; wobey nur zu merken, daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt, $-a$ giebt.

Wenn man den Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ suchen sollte, so geschähe solches, wenn man erstlich das Quadrat nimmt und dasselbe nochmals mit der Zahl $-1+\sqrt{-3}$ multiplicirt, wie folgt:

$$
\begin{array}{l}
-1+\sqrt{-3}\\
\underline{-1+\sqrt{-3}}\\
+1-\sqrt{-3}\\
\underline{\quad-\sqrt{-3}-3}\\
+1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3}=(-1+\sqrt{-3})^2\\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-1+\sqrt{-3}}\\
\qquad\qquad\qquad\quad +2+2\sqrt{-3}\\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-2\sqrt{-3}+6}\\
\text{also } (-1+\sqrt{-3})^3=\quad 2+6=8
\end{array}
$$

§. 330.

Bey der Division hat man nur nöthig, schlechweg einen Bruch zu setzen, und alsdann kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so daß der Nenner rational wird. Denn wenn der Nenner $a+\sqrt{b}$ ist, und man oben und unten mit $a-\sqrt{b}$ multiplicirt, so wird der neue Nenner a^2-b seyn und hat also kein Wurzelzeichen mehr. Man dividire z. B. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$, so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten mit $1 - \sqrt{2}$, so bekommt man für den Zähler

$$\begin{array}{l} 3 + 2\sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \\ \hline 3 + 2\sqrt{2} \\ \quad - 3\sqrt{2} - 4 \\ \hline 3 - \sqrt{2} - 4 = -\sqrt{2} - 1 \end{array}$$

für den Nenner

$$\begin{array}{l} 1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \\ \hline 1 + \sqrt{2} \\ \quad - \sqrt{2} - 2 \\ \hline 1 - 2 = -1 \end{array}$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1, so bekommt man für den Zähler $+\sqrt{2}+1$, und für den Nenner $+1$.

Es ist auch wirklich $+\sqrt{2}+1$ eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; denn $\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt, giebt $3+2\sqrt{2}$, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{array}{l} 1 + \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \\ \hline 1 + \sqrt{2} \\ \quad + \sqrt{2} + 2 \\ \hline \text{giebt } 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}. \end{array}$$

Ferner $8 - 5\sqrt{2}$ durch $3 - 2\sqrt{2}$ dividirt, giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3 + 2\sqrt{2}$, so bekommt man für den Zähler

$$
\begin{array}{l}
8-5\sqrt{2} \\
3\cancel{8}+2\sqrt{2} \\
\hline
24-15\sqrt{2} \\
\quad +16\sqrt{2}-20 \\
\hline
24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2}
\end{array}
$$

und für den Nenner

$$
\begin{array}{l}
3-2\sqrt{2} \\
3+2\sqrt{2} \\
\hline
9-6\sqrt{2} \\
\quad +6\sqrt{2}-4.2 \\
\hline
9-8=+1
\end{array}
$$

Folglich ist der Quotient $4+\sqrt{2}$, wie folgende Probe zeigt:

$$
\begin{array}{l}
4+\sqrt{2} \\
3-2\sqrt{2} \\
\hline
12+3\sqrt{2} \\
\quad -8\sqrt{2}-4 \\
\hline
12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}.
\end{array}
$$

§. 331.

Auf solche Weise können dergleichen Brüche immer in andere verwandelt werden, wovon der Nenner rational ist. Also wenn dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$ gegeben ist, und man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt: $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner: dieser Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$; ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ in $\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$ verwandelt.

 §. 332.

§. 332.

Wenn in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$; ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

Zusatz. Die Analysten kommen bey ihren Untersuchungen öfters auf sonderbare Gleichungen. Z. B. wer sieht wohl auf den ersten Blick ein, daß $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ sey? und doch kann sich jeder sehr leicht davon auf folgende Art überzeugen:

Man quadrire diese Gleichung, so erhält man:

$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})}+1-\sqrt{-3}=6$$

oder $\quad 2+2\sqrt{1^2-(\sqrt{-3})^2}=6$

oder $\quad 2+2\sqrt{1-(-3)}=6$

also $\quad 2+2\sqrt{4}=6$

oder $\quad 2+2.2=6.$

Eben so findet man, daß $\sqrt{1+2\sqrt{-2}}+\sqrt{1-2\sqrt{-2}}=\sqrt{8}$ und $\sqrt{5-\sqrt{-11}}+\sqrt{5-\sqrt{-11}}=\sqrt{22}$ ist.

Ganz allgemein sey $\sqrt{a+\sqrt{-b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{-b}}$ gegeben, so ist $(\sqrt{a+\sqrt{-b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{-b}})^2=a+\sqrt{-b}\pm 2\sqrt{(a+\sqrt{-b})(a-\sqrt{-b})}+a-\sqrt{-b}=2a\pm 2\sqrt{a^2+b}$,

folglich $\sqrt{a+\sqrt{-b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{-b}}=\sqrt{2a\pm 2\sqrt{a^2+b}}$

Im ersten Beyspiele ist $a=1$ und $b=3$; im zweyten ist $a=1$ und $b=-8$ (denn $2\sqrt{-2}$ ist $=\sqrt{-8}$) und im 3ten Beyspiele ist $a=5$ und $b=11$.

Setzt man $a=b=1$, so erhält man $\sqrt{1+\sqrt{-1}}+\sqrt{1-\sqrt{-1}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}}$; da $2\sqrt{2}>2$ ist (denn $(2\sqrt{2})^2>2^2$), so ist für das $+$ Zeichen der Werth reel, für $-$ aber unmöglich oder imaginair.

Um

Um jedesmal $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2+b}}$ unter der Form $\sqrt{A}$ zu erhalten, so daß A rational ist, darf man nur $\sqrt{a^2+b} = x$ setzen, dieses giebt $b = x^2 - a^2$, wo man alsdann x nach Belieben annehmen kann.

Soll aber $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2+b}}$ rational werden, so überlege man, daß $\sqrt{2A}$ nicht anders rational ist, als wenn $A = 2c^2$. Daher setze man $a \pm \sqrt{a^2+b} = 2c^2$, also $2c^2 - a = \pm \sqrt{a^2+b}$ und $4c^4 - 4c^2a + a^2 = a^2 + b$, folglich $b = 4c^2(c^2 - a)$, da kann man c nach Gefallen annehmen, und hat $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2+b}} = \sqrt{4c^2} = 2c$.

IX. Capitel.

Von den Cubiczahlen zusammengesetzter Größen und von der Ausziehung der Cubicwurzeln.

§. 333.

Um den Cubus von der Wurzel $a + b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches $a^2 + 2ab + b^2$ ist, nochmals mit $a + b$ multipliciren, da dann der Cubus seyn wird:

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Dieser besteht also aus dem Cubus beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus $3a^2b + 3ab^2$, welches so viel ist als $(3ab).(a+b$; und dieses ist das dreyfache Product der beyden Theile mit der Summe derselben multiplicirt.