Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

IX. Capitel. Von den Cubiczahlen zusammengesetzter Größen und von der Ausziehung der Cubicwurzeln.

Um jedesmal $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2+b}}$ unter der Form $\sqrt{A}$ zu erhalten, so daß A rational ist, darf man nur $\sqrt{a^2+b} = x$ setzen, dieses giebt $b = x^2 - a^2$, wo man alsdann x nach Belieben annehmen kann.

Soll aber $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2+b}}$ rational werden, so überlege man, daß $\sqrt{2A}$ nicht anders rational ist, als wenn $A = 2c^2$. Daher setze man $a \pm \sqrt{a^2+b} = 2c^2$, also $2c^2 - a = \pm\sqrt{a^2+b}$ und $4c^4 - 4c^2a + a^2 = a^2 + b$, folglich $b = 4c^2(c^2 - a)$, da kann man c nach Gefallen annehmen, und hat $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2+b}} = \sqrt{4c^2} = 2c$.

IX. Capitel.

Von den Cubiczahlen zusammengesetzter Größen und von der Ausziehung der Cubicwurzeln.

§. 333.

Um den Cubus von der Wurzel $a+b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches $a^2 + 2ab + b^2$ ist, nochmals mit $a+b$ multipliciren, da dann der Cubus seyn wird:

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad\; + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Dieser besteht also aus dem Cubus beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus $3a^2b + 3ab^2$, welches so viel ist als $(3ab).(a+b$; und dieses ist das dreyfache Product der beyden Theile mit der Summe derselben multiplicirt.

§. 334.

Wenn also die Wurzel aus zwey Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regel leicht finden, als z. B. da die Zahl $5 = 3 + 2$, so ist der Cubus davon $= 27 + 8 + 18 . 5$, ist also $= 125$.

Es sey ferner die Wurzel $7 + 3 = 10$, so wird der Cubus $343 + 27 + 63 . 10 = 1000$.

Um den Cubus von 36 zu finden, so setze man die Wurzel $36 = 30 + 6$ und der Cubus wird seyn:

$$27000 + 216 + 540 . 36 = 46656.$$

Zusatz. Wenn die Wurzel vieltheilig (polynomisch) ist, so enthält die Cubiczahl die Würfel aller Theile, die dreyfachen Producte aus dem Quadrate der Summe aller vorhergehenden Theile in den nächst folgenden, und die dreyfachen Producte aus der Summe aller vorhergehenden Theile in das Quadrat des nächst folgenden.

Beweis:

Es sey $a+b+c+ - - - x$ die vieltheilige Wurzel, so ist der Cubus davon

$$\begin{array}{l}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\quad +3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 \\
\quad +3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3 \\
\quad +3(a+b+c+d)^2e+3(a+b+c+d)e^2+e^3 \\
\quad +3(a+b+c+d+e)^2f+3(a+b+c+d+e)f^2+f^3 \\
\quad \vdots \\
\quad +3(a+b+c+d+e - - +w)^2x+3(a+b+c+d+e - - \\
\qquad\qquad +w)x^2+x^3
\end{array}$$

Von der Richtigkeit dieser Producte überzeugt man sich folgendergestalt:

man setze $(a+b+c+ - - - - + w + x)^3 = (A + x)^3 =$
$= A^3 + 3A^2x + 3Ax^2 + x^3$.

Nun ist

$$3A^2x + 3Ax^2 + x^3 = 3(a+b+c+d+e - - + w)^2x + 3(a+b+c+d+e - - - w)x^2 + x^3$$

Setzt man wieder $A^3 = (B + w)^3 = B^3 + 3B^2w + 3Bw^2 + w^3$, so giebt $3B^2w + 3Bw^2 + w^3$ die zweyte Reihe von unten, und B hat wiederum einen Theil weniger als A.

Eben

Eben so kann jetzt wieder $B^3 = (C + v)^3 = C^3 + 3C^2v + v^3$ setzen, wo C wieder ein Theil weniger als B hat. Fährt man immer so fort, so werden zuletzt nur die zwey Theile $a + b$ übrig bleiben, deren Cubus die oberste Reihe giebt.

Stellen a, b, c, d - - - x bloß einfache Zahlen vor, so ist $\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + \overset{r-3}{d} - - - \overset{0}{x}$ eine $r + 1$ ziffrigte Zahl, und

$$\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} - - - + \overset{0}{x}\right)^3 =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \overset{3r}{a^3} + \overset{3r-1}{3a^2b} + \overset{3r-2}{3ab^2} + \overset{3r-3}{b^3} \\ \quad + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b}\right)^2 \overset{r-2}{c} + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b}\right)^2 \overset{2r-4}{c^2} + \overset{r-6}{c^3} \\ \quad + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c}\right)^2 . \overset{r-3}{d} + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c}\right) . \overset{2r-6}{d^2} + \overset{3r-9}{d^3} \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ \quad + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + - - \overset{1}{w}\right)^2 \overset{0}{x} + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + - - \overset{1}{w}\right)^{0} \overset{0}{x^2} + \overset{0}{x^3} \end{array}\right.$$

Hieraus siehet man, in welchen Stellen die Theile eines Würfels einer vieltheiligen Wurzel anfangen.

§. 335.

Wenn aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nemlich $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemerken.

Erstlich wenn der Cubus nach der Potenz eines Buchstaben ordentlich geschrieben wird, so erkennt man aus dem ersten Gliede a^3 so gleich das erste Glied der Wurzel a, dessen Cubus jenem gleich ist, und wenn man denselben wegnimmt, so behält man diesen Rest: $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, aus welchem das zweyte Glied der Wurzel gefunden werden muß.

§. 336.

Da wir nun schon wissen, daß das zweyte Glied $+ b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie dasselbe aus dem obigen Rest gefunden werden könne. Es läßt sich aber derselbe Rest durch folgende zwey

Factoren ausdrücken: $(3a^2 + 3ab + b^2) . b$; wenn man also den Rest durch $3a^2 + 3ab + b^2$ dividirt, so erhält man das verlangte zweyte Glied der Wurzel, nemlich $+ b$.

§. 337.

Weil aber das zweyte Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt; allein es ist genug, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher $3a^2$ ist, oder das dreyfache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andre Theil b finden, woraus hernach der Divisor vollständig gemacht werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß daher alsdann zu $3a^2$ noch $3ab$ hinzufügen, das ist das dreyfache Product des ersten Theils mit dem andern, und hernach b^2, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

§. 338.

Es sey z. B. dieser Cubus gegeben:

$$a^3 + 12a^2 + 48a + 64 \,(a + 4$$
$$a^3$$
$$3a^2 + 12a + 16 \,|\, + 12a^2 + 48a + 64$$
$$|\, + 12a^2 + 48a + 64$$
$$o$$

Es sey ferner dieser Cubus gegeben:

$$a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \,(a^2 - 2a + 1$$
$$a^6$$
$$3a^4 - 6a^3 + 4a^2 \,|\, -6a^5 + 15a^4 - 20a^3$$
$$|\, -6a^5 + 12a^4 - 8a^3$$
$$3a^4 - 12a^3 + 12a^2 + 3a^2 - 6a + 1 \,|\, 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1$$
$$|\, 3a^4 - 12a^2 + 15a^2 - 6a + 1$$
$$o$$

§. 339.

§. 339.

Hierauf gründet sich auch die gemeine Regel, die Cubicwurzeln aus Zahlen zu finden. Z. B. mit der Zahl 2197, welche sich durch die allgemeine Formel, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, vorstellen läßt, wird die Rechnung also angestellt:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2197\,(\overset{a}{10} + \overset{b}{3} = 13 \\
a^3 = 1000 & \\
\hline
3a^2 = 300 & 1197 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
3ab = 90 & \\
b^2 = 9 & \\
\hline
3a^2 + 3ab + b^2 = 399 & 1197 = (3a^2 + 3ab + b^2).b \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Es sey ferner der Cubus 34965783 gegeben, woraus die Cubicwurzel gefunden werden soll.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 34965783\,(300 + 20 + 7 = 327 \\
 & 28000000 \\
\hline
270000 & 7965783 \\
18000 & \\
400 & \\
\hline
288400 & 5768000 \\
\hline
307200 & 2197783 \\
6720 & \\
49 & \\
\hline
313969 & 2197783 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$