Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

X. Capitel. Von den höhern Potenzen zusammengesetzter Größen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

X. Capitel.

Von den höhern Potenzen zusammengesetzter Größen.

§. 340.

Nach den Quadrat- und Cubiczahlen folgen die höhern Potenzen, welche durch Exponenten, wie schon oben gemeldet worden ist, angezeigt zu werden pflegen, nur muß man die Wurzel, wenn sie zusammengesetzt ist, in Klammern einschließen. Also deutet $(a+b)^5$ die fünfte Potenz von $a+b$, und $(a-b)^6$ die sechste Potenz von $a-b$ an. Wie aber diese Potenzen entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeigt werden.

§. 341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potenz, so werden die höhern Potenzen durch die Multiplication folgendergestalt gefunden:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$a+b$$
$$a^2+ab$$
$$+ab+ab$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$a+b$$
$$a^3+2a^2b+ab^2$$
$$+a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$a+b$$
$$a^4+3a^3b+a^2b^2+ab^3$$
$$+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4$$
$$(a+b)^4 = a^4 4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$a+b$$
$$a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4$$
$$+a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$a+b$$
$$a^6+5a^5b+10a^4b^2+10a^3b^3+5a^2b^4+ab^5$$
$$+a^5b+5a^4b^2+10a^3b^3+10a^2b^4+5ab^5+b^6$$
$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

u. s. f.

§. 342.

Eben so werden auch die Potenzen von der Wurzel a — b gefunden, welche von den vorigen nur darin unterschieden sind, daß das 2te, 4te, 6te, kurz jedes gerade Glied das Zeichen minus bekommt, wie aus folgendem zu ersehen:

(a — b)

$$
\begin{array}{l}
(a-b)^1 = a-b \\
\qquad a-b \\
\hline
\qquad a^2-ab \\
\qquad\quad -ab+b^2 \\
\hline
(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \\
\qquad a-b \\
\hline
\qquad a^3-2a^2b+2b^2 \\
\qquad\quad -a^2b+2ab^2-b^3 \\
\hline
(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\
\qquad a-b \\
\hline
\qquad a^4-3a^3b+3a^2b^2-ab^3 \\
\qquad\quad -a^3b+3a^2b^2-3ab^3+b^4 \\
\hline
(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4 \\
\qquad a-b \\
\hline
\qquad a^5-4a^4b+6a^3b^2-4a^2b^3+ab^4 \\
\qquad\quad -a^4b+4a^3b^2-6a^2b^3+4ab^4-b^5 \\
\hline
(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5 \\
\qquad a-b \\
\hline
\qquad a^6-5a^5b+10a^3b^2-10a^3b^3+5a^2b^4-ab^5 \\
\qquad -a^5b+5a^4b^2-10a^3b^3+10a^2b^4-3ab^5+b^6 \\
\hline
(a-b)^6 = a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6
\end{array}
$$

u. s. f.

Hier bekommen nemlich alle ungerade Potenzen von b das Zeichen —, die geraden aber behalten das Zeichen +, wovon der Grund offenbar ist; denn da in der Wurzel — b steht, so gehen die Potenzen davon folgendergestalt fort: $-b$, $+b^2$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$, u. s. f., wo die geraden Potenzen alle das Zeichen +, die ungeraden aber das Zeichen — haben.

§. 343.

§. 343.

Es kommt hier aber diese wichtige Frage vor, wie ohne diese Rechnung wirklich fortzusetzen, alle Potenzen sowohl von $a+b$ als von $a-b$ gefunden werden können? Wobey vor allen Dingen zu merken, daß wenn man die Potenzen von $a+b$ anzugeben im Stande ist, daraus von selbst die Potenzen von $a-b$ entstehen, denn man darf nur die Zeichen der geraden Glieder, nemlich des 2ten, 4ten, 6ten, 8ten u. s. f. verändern. Es kommt daher hier darauf an, eine Regel festzusetzen, nach welcher eine jede Potenz von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, gefunden werden könne, ohne daß man nöthig habe die Rechnung durch alle vorhergehende anzustellen.

§. 344.

Wenn man bey den oben gefundenen Potenzen die Zahlen, die einem jeden Gliede vorgesetzt sind, wegläßt, welche Zahlen die Coefficienten genannt werden, so bemerkt man in den Gliedern eine sehr schöne Ordnung. Denn erstlich kömmt eben die Potenz von a vor, welche verlangt wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potenzen von a immer um eins niedriger, die Potenzen von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summe der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Wenn man also die zehnte Potenz von $a+b$ verlangt, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fort gehen:

$a^{10}, a^9b^1, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, a^1b^9, b^{10}$

Zusatz. Die Glieder der nten Potenz von $a+b$ würden ohne Coefficienten in folgender Ordnung stehen:

$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, a^{n-3}b^3, --- a^{n-r}b^r --- a^{n-n}b^n$.

Von vorne an gezählt ist $a^{n-r}b^r$ das $(r+1)$te Glied, und $a^{n-n}b^n = b^n$ ist das $n+1$ und letzte Glied, also bestehet jede Potenz einer zweytheiligen Größen aus so viel einzelnen Glieder,

als

als der um 1 vermehrte Exponent anzeigt. Es versteht sich, daß der Exponent eine ganze Zahl seyn muß.

§. 345.

Es muß also nur noch gezeigt werden, wie man die dazu gehörigen Coefficienten finde, oder mit welchen Zahlen ein jedes Glied multiplicirt werden soll. Was das erste Glied anbetrift, so ist sein Coefficient immer 1 und bey dem zweyten Gliede ist der Coefficient allemal der Exponent der Potenz selbst. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemerken. Inzwischen wenn diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, so kann man leicht so weit gehen als man will, wie aus folgender Tabelle zu sehen:

Potenz: I.	Coefficienten 1, 1.
II.	1, 2, 1.
III.	1, 3, 3, 1.
IV.	1, 4, 6, 4, 1.
V.	1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI.	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII.	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII. . . .	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX. . .	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X.	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

u. s. f.

Also wird von $a + b$ die zehnte Potenz seyn:

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

§. 346.

Bey diesen Coefficienten ist zu merken, daß die Summe derselben für jede Potenz die gleiche Potenz von 2 geben müsse. Denn man setze $a = 1$, und $b = 1$, so wird ein jedes Glied außer dem Coefficienten $= 1$, so daß nur die Coefficienten zusammen genommen werden müssen. Daher denn die zehnte Potenz seyn wird $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

Iste $1+1 = 2 = 2^1$.
IIte $1+2+1 = 4 = 2^2$.
IIIte $1+3+3+1 = 8 = 2^3$.
IVte $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$.
Vte $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.
VIte $1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$.
VIIte $1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 = 2^7$.
u. s. f.

§. 347.

Bey diesen Coefficienten ist noch zu merken, daß sie vom Anfang bis in die Mitte steigen, hernach aber in eben der Ordnung wieder abnehmen. Bey den geraden steht der größte in der Mitte, bey den ungeraden aber sind zwey mittlere, welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung selbst aber verdient noch genauer in Erwägung gezogen zu werden, damit man dieselben für eine jede Potenz finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regel gegeben werden soll; der Beweis aber davon wird in folgenden Capiteln geführt werden.

§. 348.

Um die Coefficienten für eine gegebene Potenz, als z. B. die siebente zu finden, so schreibe man folgende Brüche der Ordnung nach hinter einander:

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7}.$$

wo nemlich die Zähler von dem Exponenten der verlangten Potenz anfangen und immer um eins vermindert

mindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. f. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweyten Coefficienten; die zwey ersten Brüche mit einander multiplicirt den dritten, die drey ersten mit einander multiplicirt den vierten u. s. f.

Also ist der erste Coefficient $= 1$, der 2te $= \frac{7}{1} = 7$, der 3te $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2} = 21$, der 4te $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3} = 35$, der 5te $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3}.\frac{4}{4} = 35$, der 6te $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3}.\frac{4}{4}.\frac{3}{5} = 21$, der 7te $= 21.\frac{1}{3} = 7$, der 8te $= 7.\frac{1}{7} = 1$.

§. 349.

Also für die zweyte Potenz hat man diese Brüche $\frac{2}{1}.\frac{1}{2}$, daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{2}{1} = 2$, der 3te $2.\frac{1}{2} = 1$.

Für die dritte Potenz hat man diese Brüche: $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{3}{1} = 3$, der 3te $3.\frac{2}{2} = 3$, der 4te $\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3} = 1$.

Für die vierte Potenz hat man diese Brüche: $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{4}{1} = 4$, der 3te $\frac{4}{1}.\frac{3}{2} = 6$, der 4te $\frac{4}{3}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3} = 4$, der 5te $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4} = 1$.

§. 350.

Diese Regel schaft uns also den Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wissen, sondern sogleich für eine jede Potenz die dahin gehörigen Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potenz schreibt man diese Brüche: $\frac{10}{1}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{10}$. Daher bekommt man den ersten Coefficient $= 1$, den zweyten Coefficient $= \frac{10}{1} = 10$.

den 3ten $= 10.\frac{9}{2} = 45$, den 4ten $= 45.\frac{8}{3} = 120$,
den 5ten $= 120.\frac{7}{4} = 210$, den 6ten $= 210.\frac{6}{5} = 252$,
den 7ten $= 252.\frac{5}{6} = 210$, den 8ten $= 210.\frac{4}{7} = 120$,
den 9ten $= 120.\frac{3}{8} = 45$, den 10ten $= 45.\frac{2}{9} = 10$,
den 11ten $= 10.\frac{1}{10} = 1$.

§. 351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben ohne den Werth derselben zu berechnen, und auf diese Art wird es leicht seyn, eine jede Potenz von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, hinzuschreiben.

Also ist die 100te Potenz von $a+b$ oder $(a+b)^{100}$ $= a^{100} + \frac{100}{1} a^{99}b + \frac{100.99.}{1.\ 2} a^{98}b^2 + \frac{100.99.98.}{1.\ 2.\ 3} a^{97}b^3 + \frac{100.99.98.97.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} a^{96}b^4$ u. s. f. woraus die Ordnung der folgenden Glieder leicht zu ersehen.

Zusatz. Die nte Potenz von $(a+b)$ ist also nach dieser Regel folgende:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.a^{n-1}b^1 + \frac{n\ n-1}{1.\ 2.} a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3.} a^{n-3}b^3 + \text{- - -} + \frac{n.n-1.n-2.\text{- - -}(n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\text{- - - -}\ r} a^{n-r}b^r + \text{- - -} \frac{n.n-1.n-2.\text{- -}(n-(n-1))}{1.\ 2.\ 3.\text{- - -}\ n} a^{n-n}b^n.$$

Der Exponent n ist, wie vorausgesetzt wird, eine ganze Zahl. Der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes (§. 344.) ist $\frac{n.n-1.n-2.\text{ - - }(n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\text{ - - - }r}$, und das letzte oder $(n+1)$te Glied ist $\frac{n.n-1.n-2\text{ - - }(n-(n-1))}{1.\ 2.\ 3\text{ - - - }n} a^{n-n}b^n = b^n$.

Setzt man $a = b = 1$, so erhält man

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n\ n-1}{1.\ 2.} + \frac{n.n-1.n-2.}{1.\ 2.\ 3} + \text{- - -} \frac{n.n-1.n-2.\text{ - - }(n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\text{ - - }(r-1).\ r} + \text{- - -}$$

Dieses letztere ist ein allgemeiner Beweis 346 §.