Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XI. Capitel. Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweis der vorigen Regel, wie eine jede Potenz von einer zusammengesetzten Größe leicht gefunden werden soll, beruhet. Ferner eine kurze ...

XI. Capitel.

Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweis der vorigen Regel beruhet.

§. 352.

Wenn man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurückgehet, so wird man finden, daß jedes Glied so oft vorkommt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen lassen, als z. B. bey der zweyten Potenz, kommt das Glied ab zweymal vor, weil man ab und ba schreiben kann; hingegen kommt daselbst a^2 oder aa nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bey der dritten Potenz kann das Glied a^2b oder aab auf dreyerley Weise geschrieben werden, als aab, aba, baa, und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bey der vierten Potenz kann das Glied a^3b, oder aaab, auf viererley Weise versetzt werden, als aaab, aaba, abaa, baaa, deswegen ist auch sein Coefficient 4, und das Glied aabb hat 6 zum Coefficienten, weil sechs Versetzungen statt finden, aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab. Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

§. 353.

In der That, wenn man erwäget, daß z. B. die vierte Potenz von einer jeden Wurzel, wenn dieselbe auch aus mehr als zwey Gliedern besteht, als $(a+b+c+d)^4$ gefunden wird, wenn diese vier Factoren mit einander multiplicirt werden: I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$, so muß jeder Buchstabe des ersten mit einem jeden des andern, und ferner mit einem jeden

jeden des dritten, und endlich noch mit einem jeden des vierten multiplicirt werden, daher ein jedes Glied aus 4 Buchstaben bestehen und so vielmal vorkommen wird, als sich desselben Buchstaben unter einander versetzen lassen, woraus denn sein Coefficient bestimmt wird.

§. 354.

Hier kommt es also darauf an zu wissen, wie vielmal eine gewisse Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobey insonderheit darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Denn wenn alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfachen Potenzen, als a^2, a^3, a^4 u. s. f. alle 1 zum Coefficienten haben.

§. 355.

Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bey zweyen, nemlich ab anfangen, wo offenbar zwey Versetzungen statt finden, als ab, ba.

Hat man drey Buchstaben abc, so ist zu merken, daß ein jeder die erste Stelle haben könne, da denn die zwey übrigen zweymal versetzt werden können. Wenn also a zuerst steht, so hat man zwey Versetzungen abc, acb; steht b zuerst, so hat man wieder zwey, bac, bca; und eben so viel, wenn c zuerst steht, cab, cba. Daher in allem die Zahl der Versetzungen $3 \cdot 2 = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ seyn wird.

Hat man vier Buchstaben abcd, so kann ein jeder die erste Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drey übrigen sechs Versetzungen. Daher in allem die Anzahl der Versetzungen $4 \cdot 6 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ seyn wird.

Hat man fünf Buchstaben abcde, so kann ein jeder die erste Stelle haben und für jede lassen sich die vier übrigen 24 mal versetzen. Daher die Anzahl aller Versetzungen 5. 24 = 120 = 5. 4. 3. 2. 1.

§. 356.

So groß nun auch immer die Anzahl der Buchstaben seyn mag, wenn dieselben nur alle ungleich unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen ganz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu ersehen.

Anzahl der Buchstaben:	Anzahl der Versetzungen:
I.	1 = 1
II.	2. 1 = 2
III.	3. 2. 1 = 6
IV.	4. 3. 2. 1 = 24
V.	5. 4. 3. 2. 1 = 120
VI.	6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720
VII.	7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5040
VIII.	8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320
IX.	9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 362880
X.	10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 3628800

§. 357.

Es ist aber wohl zu merken, daß diese Zahlen nur alsdann statt finden, wenn alle Buchstaben unter sich ungleich sind, denn wenn zwey oder mehr einander gleich sind, so wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer; und wenn gar alle einander gleich sind, so hat man nur eine einzige. Wir wollen also sehen, wie nach der Anzahl der gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müssen.

§. 358.

Sind zwey Buchstaben einander gleich, so werden die zwey Versetzungen nur für eine gerechnet. Daher die obige Zahl auf die Hälfte gebracht oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drey Buchstaben

ben einander gleich, so werden 6 Versetzungen nur für eine gerechnet; daher die obigen Zahlen durch $6 = 3.2.1$ getheilt werden müssen. Eben so wenn vier Buchstaben einander gleich sind, so müssen die obigen Zahlen durch 24, das ist durch $4.3.2.1$ getheilt we den u. s. f.

Hieraus kann man nun bestimmen, wie vielmal diese Buchstaben aaabbc versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, und sie würden, wenn sie ungleich wären, $6.5.4.3.2.1$ Versetzungen zulassen. Weil aber hier a dreymal vorkommt, so muß diese Zahl durch $3.2.1$, und weil b zweymal vorkommt, noch ferner durch 2.1 getheilt werden, daher die Anzahl der Versetzungen $= \frac{6.5.4.3.2.1.}{3.2.1.2.1.} = 5.4.3. = 60$ seyn wird.

§. 359.

Hieraus können wir nun die Coefficienten eines jeden Gliedes für eine jede Potenz bestimmen, welches wir z. B. für die siebente Potenz $(a+b)^7$ zeigen wollen. Das erste Glied ist a^7, welches nur einmal vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen $7.6.5.4.3.2.1$, wenn sie alle ungleich wären. Da aber im zweyten Gliede a^6b, sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch $6.5.4.3.2.1$ getheilt werden, daher der Coefficient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1.} = \frac{7}{1} = 7$ seyn wird.

Im dritten Gliede a^5b^2 kommt a fünfmal und b zweymal vor, daher die obige Zahl erstlich durch $5.4.3.2.1$ und noch durch 2.1 getheilt werden muß, daher der Coefficient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1.}{5.4.3.2.1.1.2.} = \frac{7.6.}{1.2.}$ seyn wird.

Im vierten Gliede a^4b^3 steht a viermal und b dreymal; daher die obige Zahl erstlich durch $4.3.2.1$

und hernach noch durch 3.2.1 oder 1.2.3 getheilt werden muß, da denn der Coefficient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3}$ $= \frac{7.6.5}{1.2.3}$ seyn wird.

Eben so wird für das fünfte Glied a^3b^4 der Coefficient $= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ u. s. f., wodurch die oben gegebene Regel erwiesen wird.

§. 360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter, und lehret, wie man auch von solchen Wurzeln, die aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potenzen finden soll. Wir wollen dieses nur mit der dritten Potenz von $a + b + c$ erläutern, worin alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müssen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficienten haben wird, also wird die dritte Potenz oder $(a+b+c)^3$ seyn:

$$a^3 + 3aab + 3aac + 3abb + 6abc + 3acc + b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3.$$

Laßt uns setzen, es sey $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, so wird der Cubus von $1 + 1 + 1$, das ist von 3,

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1 = 27 \text{ seyn.}$$

Setzt man $a = 1$, $b = 1$ und $c = -1$, so wird der Cubus von $1 + 1 - 1$, das ist von 1,

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1 = 1 \text{ seyn.}$$

1. Zusatz. Der Unterschied zwischen Permutationen und Combinationen ist folgender:

Permutationen sind die Versetzungen, welche bey einer gegebenen Anzahl von Dingen möglich sind, z. B. die Permutationen von drey Dingen a, b, c sind folgende: abc, acb, bac, bca, cab, cba, wie in diesem Capitel gelehrt worden.

Combinationen (Verbindungen) entstehen, wenn man aus einer gegebenen Anzahl von Dingen je 2, je 3, je 4 u. s. f. auf alle mögliche Arten verbindet, doch so, daß keine Versetzungen irgend einer Combination zugelassen werden.

Z. B. die

Z. B. die Combinationen von den 3 Dingen a, b, c, sind folgende: nimmt man von diesen 3 Dingen je 1 und 1, so hat man 3 Combinationen, nemlich a, b und c, welche man auch einfache Verwechselungen, oder wenn man nach Graden zählen will, Verwechselungen vom ersten Grade nennet. Verbindet man je 2 und 2 dieser Dinge, so hat man 3 zweyfache Verwechselungen, oder 3 Verwechselungen vom 2ten Grade oder Amben, nemlich ab, ac, und bc.

Verbindet man je 3 und 3 diese Dinge, so erhält man nur eine einzige dreyfache Verwechselung, oder eine einzige Verwechselung vom dritten Grade oder Terne, nemlich abc.

Höhere Combinationen können aus 3 Dingen ohne Wiederholung nicht gemacht werden. Da aber bey dem Combiniren zuweilen erlaubt ist, ein Ding öfter als einmal zu setzen, zuweilen nicht, so entstehen zwey Arten von Combinationen,

nemlich 1) mit Wiederholungen,

und 2) ohne Wiederholungen.

Diese 2te Art von Combination ist die eben gezeigte. Sollen jene 3 Dinge mit Wiederholungen combinirt werden, so giebt es folgende Combinationen:

Amben aa, ab, ac, bb, bc, cc.
Ternen aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc.
Quaternen aaaa, aaab, aaac, aabb u. s. f.

Jede Ambe, Terne, Quaterne u. s. f. nennt man eine Complexion. Jede einzelne Complexion ist öfters noch mehrerer Versetzungen fähig. Z. B. die Complexionen aa, bb, cc, oder aaa, bbb u. s. f. sind keiner Versetzungen, aber ab, ac, bc u. s. f. folgender Versetzungen fähig: ba ca, cb u. s. f. Werden nun diese Versetzungen, die jede einzelne Complexion zuläßt, mitgenommen, so entstehen Variationen.

Die Variationen gehen also aus der Vereinigung von Combinationen und Permutationen hervor. Sie unterscheiden sich von den Combinationen bloß dadurch, daß bey dem Variiren alle Versetzungen, die jede einzelne Complexion zuläßt, mitgenommen werden müssen.

Um die Permutationen, Combinationen und Variationen gegebener Dinge bequem zu finden, bezeichne man die gegebenen Dinge nach der Reihe mit den Ziffern 1, 2, 3 u. s. f. wie folget: $\overset{1}{a}, \overset{2}{b}, \overset{3}{c}, \overset{4}{d}$ u. s. f. Eine solche bezifferte Reihe gegebener Dinge heißt index oder indiculus.

Sind also die drey Dinge a, b, c gegeben, so ist der index $\overset{1}{a}, \overset{2}{b}, \overset{3}{c}$.

I.) Um alle Permutationen von diesen drey Dingen zu erhalten, nehme man aus unserm bekannten Zahlensystem alle Zahlen, die mit den drey Ziffern 1, 2, 3 geschrieben werden, in der Ordnung, wie sie im Zahlensysteme folgen, nemlich 123, 132, 213, 231, 312, 321. Legt man diesen Zahlen nach dem Index die Buchstaben unter, so sind die gesuchten Permutationen folgende:

123, 132, 213, 231, 312, 321,
abc acb bac bca cab cba

II.) Combinationen aus diesen drey gegebenen Dingen.

Um alle Amben, Ternen, Quaternen u. s. f. zu erhalten, schreibe man alle zwey- drey- vierziffrige Zahlen u. s. f. auf, die bloß die Ziffern 1, 2, 3 enthalten. Aber um keine Versetzungen zu erhalten, behalte man bloß diejenigen Zahlen, in welchen die Ziffern in eben der Ordnung stehen, als in der Reihe der einzelnen gegebenen Dinge, d. h. man lasse alle Zahlen, wie 21, 31, desgleichen 231, 312 u. s. f. weg, wo eine größere Ziffer vor einer kleinern steht.

1. Combinationen mit Wiederholungen:

Amben 11, 12, 13, 22, 23, 33
aa, ab, ac, bb, bc, cc

Ternen 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333
aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc

Quaternen 1111, 1112, 1113, 1122, 1123
aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, u. s. f.

2. Combinationen ohne Wiederholungen:

Amben 12, 13, 23
ab, ac, bc.

Ternen 123
abc

Quaternen und höhere Combinationen können aus 3 Dingen, wie schon oben gesagt ist, ohne Wiederholungen nicht gemacht werden.

III.) Variationen aus eben den drey Dingen:

Man verfahre wie in II. bey den Combinationen, nur daß man von allen Zahlen, die mit den drey Ziffern 1, 2, 3 geschrieben werden können, keine einzige weglassen darf. Man erhält daher folgende:

Amben 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33
aa, ab, ac, ba, ab, bc, ca, cb, cc

Ternen	111,	112,	113,	121,	122,	123,	131,	132,	133
	aaa,	aab,	aac,	aba,	abb,	abc,	aca,	acb,	acc
	211,	212	213,	221,	222,	223,	231,	232,	233
	baa	bab	bac	bba,	bbb	bbc	bca,	bcb,	bcc
	311,	312,	313,	321,	322,	323,	331,	332,	333
	caa	cab	cac,	cba,	cbb,	cbc,	cca,	ccb,	ccc
Quat.	1111,	1112,	1113,	1121,	1122,	1123,	1131,	1132,	1133
	aaaa	aaab	aaac,	aaba,	aabb,	aabc,	aaca,	aacb,	aacc
	1211,	1212,	1213	1221,	1222,	1223,	1231,	1232,	1233
	abaa	abab	abac,	abba,	abbb,	abbc,	abca,	abcb,	abcc
	1311,	1312,	1313	1321,	1322,	1323,	1331,	1332,	1333
	acaa,	acab	acac,	acba	acbb,	acbc,	acca,	accb,	accc
	2111,	2112	2113	2121,	2122,	2123,	2131,	2132,	2133
	baaa,	baab,	baac,	baba,	babb,	babc,	baca	bacb,	bacc
	2211,	2212,	2213	2221,	2222,	2223	2231	2232,	2233
	bbaa,	bbab,	bbac,	bbba,	bbbb,	bbbc,	bbca,	bbcb,	bbcc
	2311,	2312	2313,	2321,	2322,	2323,	2331,	2332,	2333
	bcaa,	bcab,	bcac	bcba	bcbb,	bcbc,	bcca,	bccb,	bccc
	3111,	3112,	3113,	3121	3122	3123,	3131,	3132,	3133
	caaa,	caab,	caac,	caba,	cabb,	cabc,	caca,	cacb,	cacc
	3211,	3212,	3213,	3221,	3222,	3223,	3231,	3232,	3233
	cbaa	cbab,	cbac,	cbba,	cbbb,	cbbc,	cbca,	cbcb,	cbcc
	3311,	3312,	3313,	3321,	3322,	3323,	3331,	3332,	3333
	ccaa,	ccab,	ccac,	ccba,	ccbb,	ccbc,	ccca,	cccb,	cccc

u. s. f.

Variationen sind unter allen combinatorischen Arbeiten die **leichtesten**. Denn auch ohne Gebrauch von jenen Ziffern zu machen, wird diese Arbeit äußerst leicht auf folgende Art verrichtet.

Man schreibe die gegebenen Dinge, a, b, c u. s. f., die man variiren soll, sowohl horizontal, als auch vertical nach der Reihe, wie sie folgen, hin, und verfahre, wie folgendes Schema genugsam zeigt, so erhält man die Amben.

	a,	b,	c,	d - - -
a	aa,	ab,	ac,	ad - - -
b	ba,	bb,	bc,	bd - - -
c	ca,	cb,	cc,	cd - - -
d	da,	db,	dc,	dd - - -

Um die Ternen zu finden, verfahre man, wie folgendes Schema deutlich vor Augen liegt:

	aa,	ab,	ac,	ad,	ba,	bb,	bc ---
a	aaa,	aab,	aac,	aad,	aba,	abb,	abc ---
b	baa,	bab,	bac,	bad,	bba,	bbb,	bbc, ---
c	caa,	cab,	cac,	cad,	cba,	cbb,	cbc ---
d	daa,	dab,	dac,	dad,	dba,	dbb,	dbc ---
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Wie die Quaternen gefunden werden, zeigt folgendes Schema:

	aa,	ab	ac,	ad,	ba,	bb,	bc ---
aa	aaaa,	aaab,	aaac,	aaad,	aaba,	aabb,	aabc ---
ab	abaa,	abab	abac,	abad,	abba	abbb,	abbc ---
ac	acaa,	acab	acac	acad,	acba,	acbb,	acbc ---
ad	adaa,	adab,	adac,	adad,	adba,	adbb,	adbc ---
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

u. s. f.

Man sieht deutlich, daß durch obige Verbindung der einzelnen Dinge mit einander die Amben, durch Verbindung der Amben mit den einzelnen Dingen die Ternen entstehen. Die Quaternen entstehen durch Verbindung der Amben selbst u. s. f.

Ich könnte hier noch manches Lehrreiche mittheilen, wenn es der Platz erlaubte; übergehen darf ich aber nicht, daß die hier von mir mitgetheilte Definitionen von Permutationen, Combinationen (mit und ohne Wiederholung) und Variationen, ganz dem Hindenburgischen Begriff gemäß sind. Dieser große Analyst hat sich durch seine erfundene combinatorische Analytik einen unsterblichen Ruhm erworben. Anfänger erhalten von diesem ganz neuen Zweige der Analysis einen kurzen aber deutlichen Unterricht in einer kleinen vortreflichen Schrift des Herrn Prof. Fischer: über den Ursprung der Theorie der Dimensionszeichen und ihr Verhältniß gegen die combinatorische Analytik des Herrn Prof. Hindenburg. Halle, 1794. 4.

2. Zusatz. Noch will ich hier einige allgemeine Formeln mit ihren Anwendungen mittheilen.

Formel für alle Permutationen von N verschiedenen Dingen.

$n.(n-1)(n-2)\ ---\ 1.$ oder $1.2.3.\ ---\ n$, sind darunter m gleiche Größen, so ist die Anzahl der Permutationen: $= n.(n-1)(n-2)\ ---\ (m+1)$ oder $(m+1)(m+2)(m+3)\ ---\ n$; wären überdem noch p und r gleiche Buchstaben vorhanden, so giebt $\frac{n.(n-1)(n-2)\ --\ (m+1)}{1.2.3.\ --\ p.\ 1.2.3.\ --\ r}$ die möglichen Permutationen.

Aufg.

Aufg. Wie viel verschiedene 9 ziffrige Zahlen können mit den 9 bekannten Zahlzeichen geschrieben werden?

Aufl. $1.2.3.4.5. \cdots 9 = 362880.$

Aufg. Wie oft können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden?

Aufl. $1.2.3 \cdots 24 = 620\overset{\text{III}}{448}\,401\,733\overset{\text{II}}{239}\,439\overset{\text{I}}{360}\,000$

Wenn alle Buchstaben dieser Permutationen sollten auf einer Fläche geschrieben werden, und man einem Buchstaben, auch nur eine Quadratlinie, Raum einräumt, so müßte diese Fläche doch 144000mal größer, als die Oberfläche der Erde seyn. Alle jetzt lebende Menschen auf dem ganzen Erdboden würden in 1000 Millionen Jahren nicht alle mögliche Versetzungen der 24 Buchstaben schreiben können, wenn auch jeder täglich 40 Seiten schreibt, deren jede 40 verschiedene Versetzungen der 24 Buchstaben enthält.

3. Zusatz. Formeln für Combinationen mit Wiederholungen von n verschiedenen Dingen:

Amben $= \frac{n.(n+1)}{1.\ 2.}$; Ternen $= \frac{n.(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}$; Quaternen $= \frac{n.(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$; also Rnen $= \frac{n.(n+1)(n+2)\cdots(n+(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\cdots r}$

4. Zusatz. Formeln für Combinationen ohne Wiederholungen von n verschiedenen Dingen.

Amben $= \frac{n.(n-1)}{1.\ 2.}$; Ternen $= \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$; Quaternen $\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$, folglich Rnen $= \frac{n.(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\ 4\cdots r}$.

Aufg. Wie viel Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen sind in der Berliner Zahlen-Lotterie?

Aufl. Da die Zahlenlotterie 90 Nummern erhält, so sind die Anzahl der Amben $= \frac{90.89}{1.\ 2.} = 4005$; Ternen $= \frac{90.89.88}{1.\ 2.\ 3.} = 117480$; Quaternen $= \frac{90.\ 89.\ 88.\ 87.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} = 2555190$; und Quinternen $= \frac{90.89.88.87.86.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} = 43949268.$

Aufg. Wenn von 90 Loosen oder Zahlen, die in einem Topfe unter einander gemischt sind, nur 5 als Treffer herausgezogen werden, und Jemand wollte behaupten, daß bey 10 von ihm unter den 90 gewählten Loosen 3 Treffer seyn würden;

den; wie verhält sich da die Wahrscheinlichkeit, daß unter den gewählten 10 Loosen 3 Treffer sich befinden sollten?

Aufl. 90 Loose enthalten $\frac{90.89.88.}{1.\ 2.\ 3.} = 117480$ Ternen, die 5 herausgezogenen Treffer enthalten nur $\frac{5.4.3.}{1.2.\ 3.} = 10$ Ternen, also kommen auf einen Treffer 11748 Fehler.

Da ferner aus 10 gewählten Loosen $\frac{10.9.8.}{1.\ 2.\ 3} = 120$ Ternen entstehen, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit unter den gewählten 10 Loosen eine Terne zu erhalten, zur Unwahrscheinlichkeit, wie 120 zu 11748, oder wie 10 : 979.

Aufg. Es will jemand in die gewöhnliche Zahlen-Lotterie von 90 Nummern so viel Zetteln zu 5 Nummern spielen, damit er alle herausgezogene 5 Nummern auf einem Zettel beysammen habe. Wie viel muß er in allem Zettel setzen? Wie viel Zetteln werden drey, und wie viele werden zwey Treffer enthalten? Auf wie viel Zetteln wird nur ein einzelner Treffer sich befinden? Und endlich, wie viel Zettel werden darunter seyn, worauf sich gar kein Treffer befindet?

Aufl. Da er alle 5 herausgezogene Nummern beysammen auf einem Zettel, d. h. eine Quinterne, haben will; so muß er alle Combinationen der 90 Nummern zu fünfen, nemlich $\frac{90.89.88.87.86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} = 43949268$ Zettel setzen, unter welchen er gewiß die Quinterne haben wird. Da nun auch bey den 5 herausgezogenen Nummern $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$ Quaternen möglich sind, woran jede mit allen $90 - 5 = 85$ gefehlten Nummern gespielt worden ist; so hat er $5.\ 85 = 425$ Quaternen. Ueberdies sind bey den herausgezogenen fünf Nummern $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ Ternen möglich, welche mit jeder Verbindung zu zweyen der 85 gefehlten Nummern gespielt worden sind; also hat er $10.\ \frac{85.84.}{1.\ 2.} = 35700$ Ternen. Eben so giebt es bey den 5 herausgezogenen Nummern $\frac{5.4.}{1.2.} = 10$ Amben, die mit jeder Verbindung zu Dreyen der 85 gefehlten Nummern gespielt worden sind; folglich hat er $10.\ \frac{85.84.83}{1.\ 2.\ 3} = 987700$ Amben. Ferner sind die 5 getroffenen Nummern mit jeder Verbindung zu Vieren der 85 gefehlten Nummern gespielt worden; folglich hat er $5.\ \frac{85.84.83.82.}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

$=$

$= 10123925$ einzelne Treffer. Endlich hat er noch $\frac{85.84.83.82.81}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 32801517$ Zettel, worauf sich gar kein Treffer befindet.

Aufg. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit — beym Würfelspiele mit drey Würfeln? Bey einem bestimmten gleichen Wurfe, etwa alle drey Sechsen zu werfen?

Aufl. Drey Würfel haben 18 Felder, die sich $\frac{18.17.16.}{1.\ 2.\ 3.} = 816$ mal zu Dreyen verbinden lassen; allein weil ein Würfel nicht mehr als ein einziges Feld auf einmal zeigen kann, so müssen von diesen 816 Verbindungen folgende ausgeschlossen werden:

α) Bey jedem Würfel jede Verbindung der sechs Felder zu Dreyen $= \frac{6.5.4}{1.2.3}.\ 3 = 60$;

β) Bey jedem Würfel jede Verbindung der sechs Felder zu Zweyen mit den 12 Feldern der beyden andern Würfel verbunden $= \frac{6.\ 5.}{1.\ 2.}.\ 12.\ 3 = 540$; mithin bleibt die Anzahl der möglichen Verbindungen nur $= 816 - (60 + 540) = 216$. Also verhält sich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, wie $1 : 216$, d. h. im Durchschnitte genommen immer unter 216 Würfen einmal alle drey Sechser fallen.

Anmerk. Ich habe diese Auflösung gewählt, weil sie deutlich zeigt, worin der Hr. Geh. Ober-Berg- und Bau-Rath Mönich in seinem Lehrbuch der Math. I. B. I. Anh. §. 15. fehlt, wenn er dieses Verhältniß, wie $1 : 816$ angiebt. Er vergaß nemlich den Abzug in α und β.

5. **Zusatz.** Formeln für alle Variationen von N verschiedenen Dingen.

Man hat n Einfache, n^2 Amben, n^3 Ternen, n^4 Quaternen, n^r Rnen. Wenn man also von n Dingen die Summe aller möglichen Variationen bestimmen will, so ist solche $n + n^2 + n^3 + n^4 - - - + n^r$. Dieses ist eine geometrische Reihe, deren Summe $= \frac{n^{r+1} - n}{n - 1}$ ist, wie weiter hin im 514 §. bewiesen wird. Z. B. Sey $n = r = 24$, so ist $\frac{24^{25} - 24}{24 - 1} =$

$$\frac{32009658644406818986777955348272600}{23} =$$

V IV III II I

1391724288887252999425128493408200.

Diese

Diese ungeheuer große Zahl drückt alle mögliche Variationen von allen 24 Buchstaben des Alphabets aus.

6. Zusatz. In dem Hindenburgischen System findet man auch Combinationen mit Versetzungszahlen, womit es folgende Bewandniß hat.

Die Variationen gegebener Dinge, a, b, c u. s. f. enthalten alle ausführliche geschriebene Versetzungen der Combinationen dieser Dinge. Z. B. die Variationsarten aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, der 3 Dinge a, b, c; enthalten ab, ac, bc. Diese 3 Amben geben versetzt noch 3 Amben ba, ca, cb, die auch unter jene Variations-Amben befindlich sind; macht man nun diese Versetzungen nicht wirklich, und zeigt man bloß durch eine der Amben ab, ac, bc vorgeschriebenen Ziffer an, wie viel Versetzungen sie zulassen, so erhält man aa, 2ab, 2ac, bb, 2bc, cc, und dieses wäre alsdann von a, b, c eine Combination mit Versetzungszahlen, die allemal da statt findet, wo man nicht auf den Unterschied dieser Versetzungen achtet, wie z. B. wenn man $a+b+c$ mit sich selbst multipliciren soll. In der Hindenburgischen combinatorischen Analytik ist dieser Unterschied zwischen Variationen und Combinationen mit Versetzungszahlen sehr wichtig.

XII. Capitel.

Von der Entwickelung der Irrationalpotenzen durch unendliche Reihen.

§. 361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel $a+b$ eine jede Potenz gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn, als er nur immer will, so sind wir im Stande auf eine allgemeine Art die Potenz von $a+b$ auszudrücken, wenn der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedruckt ist.