Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XII. Capitel. Von der Entwickelung der Jrrationalpotenzen durch unendliche Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

Diese ungeheuer große Zahl drückt alle mögliche Variationen von allen 24 Buchstaben des Alphabets aus.

6. Zusatz. In dem Hindenburgischen System findet man auch Combinationen mit Versetzungszahlen, womit es folgende Bewandniß hat.

Die Variationen gegebener Dinge, a, b, c u. s. f. enthalten alle ausführliche geschriebene Versetzungen der Combinationen dieser Dinge. Z. B. die Variationsarten aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, der 3 Dinge a, b, c; enthalten ab, ac, bc. Diese 3 Amben geben versetzt noch 3 Amben ba, ca, cb, die auch unter jene Variations-Amben befindlich sind; macht man nun diese Versetzungen nicht wirklich, und zeigt man bloß durch eine der Amben ab, ac, bc vorgeschriebenen Ziffer an, wie viel Versetzungen sie zulassen, so erhält man aa, 2ab, 2ac, bb, 2bc, cc, und dieses wäre alsdann von a, b, c eine Combination mit Versetzungszahlen, die allemal da statt findet, wo man nicht auf den Unterschied dieser Versetzungen achtet, wie z. B. wenn man a + b + c mit sich selbst multipliciren soll. In der Hindenburgischen combinatorischen Analytik ist dieser Unterschied zwischen Variationen und Combinationen mit Versetzungszahlen sehr wichtig.

XII. Capitel.

Von der Entwickelung der Irrationalpotenzen durch unendliche Reihen.

§. 361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel a + b eine jede Potenz gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn, als er nur immer will, so sind wir im Stande auf eine allgemeine Art die Potenz von a + b auszudrücken, wenn der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedruckt ist.

Also werden wir nach der oben (§. 359.) gegebenen Regel finden:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{2} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4 \text{ u. s. f.}$$

(§. 351. Zus.)

Beweis. Alle Glieder einer Potenz einer zweytheiligen Wurzel sind Variationen der Theile der Wurzel. In diesen Variationen kommen aber alle mögliche Versetzungen der Combinationen mit Wiederholungen vor, demnach muß auch die Zahl der Versetzungen derselben der Coefficient eines jeden Gliedes seyn.

Nun wissen wir bereits (aus §. 344. Zus.) wie die Glieder von $(a+b)^n$ ohne Coefficienten auf einander folgen; das $(r+1)$te Glied ist $a^{n-r}b^r$; in einem solchen Gliede sind demnach $n-r$, Aen, und r Ben, also überhaupt $n-r+r=n$ Buchstaben, d. h. jedes Glied von $(a+b)^n$ enthält so viel Buchstaben, als der Exponent n Einheiten hat. Wären diese Buchstaben alle verschieden, so würden diese n Buchstaben $n.\, n-1.\, n-2. \text{ - - - } 1$ Permutationen geben, (§. 360. 2 Zus); aber das $(r+1)$te Glied enthält $n-r$ aen, demnach bleiben nur noch $n.\, n-1.\, n-2 \text{ - - - } (n-(r-1))$ (§. 360. 2. Zus.) Permutationen, überdem sind in diesem Gliede noch r, ben, also bleiben bloß $\frac{n.\, n-1.\, n-2 \text{ - - - } (n-(r-2))(n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3. \text{ - - - } (r-1).\ r}$ Permutationen (§ 360. 2. Zus.) und dieses ist folglich der zum $(r+1)$ten Gliede gehörige Coefficient.

1. Zusatz. Eben so würde man das rte Glied von $(a+b)^n$ gleich $\frac{n.\, n-1.\, n-2 \text{ - - - } (n-(r-2))}{1.\ 2.\ 3. \text{ - - - } (r-1)} a^{n-(r-1)} b^{r-1}$ finden. Aus diesem gefundenen allgemeinen Gliede kann man nun leicht jedes verlangte Glied einer jeden Potenz von einer zweytheiligen Größe finden. Auch sieht man aus dem Beweise und aus diesem Zusatze, daß, wenn man den Coefficienten des rten Gliedes $= R$ setzt, so ist der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes $= R.\frac{n-(r-1)}{r}$.

2. Zusatz.

1,	2,	3,	4	- - -	r	- - -	n,	n+1
n+1,	n,	n−1,	n−2	- - -	n−(r−2)	- - -	2,	1

Die

Die obere Reihe ist der Index der Glieder von $(a+b)^n$ von der Linken angezählt, die untere Reihe ist jene umgekehrt geschrieben. Daraus sieht man nun, welche Glieder von beyden Enden angezählt, gleich weit abstehen. So stehet z. B das rte Glied von einem Ende eben so weit ab, als das $(n-(r-2))$te vom andern Ende; also gehören zu Gliedern, die von den äußersten gleich weit abstehen, einerley Coefficienten. Dieses ließe sich schon daraus schließen, weil einerley herauskommen muß, ob man die Potenz von $(a+b)$ oder von $(b+a)$ macht, d. i. ob man die Reihe von $(a+b)^n$ vorwärts oder rückwärts liest.

3. Zusatz. Das rte Glied von $(a+b)^n$ war $\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,-\,-\,(n-(r-2))}{1.\;2.\;3\;-\;-\;(r-1)}\,a^{n-(r-1)}\,b^{r-1}$.
Setzt man $r=n+2$, so erhält man das $(n+2)$te Glied gleich $\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,-\,-\,(n-(n+2)-2))}{1.\;2.\;3.\;-\;-\;-\;(n+1)}\,a^{n-(n+1)}\,b^{n+1}$, bey welchem Gliede der Coefficient und also das Glied selbst null ist. Eben so verhält es sich auch mit jedem noch folgenden Gliede, denn ihr Coefficient ist immer ein Product, von welchem der eine Factor der Coefficient des $(n+2)$ten Gliedes ist. So muß es auch seyn, denn es können, wenn n eine ganze positive Zahl ist, nur $(n+1)$ Glieder statt finden.

4. Zusatz. Jetzt will ich noch zeigen, wie man die nte Potenz von $(a+b)$ unter eine einfachere Gestalt bringen kann, welche bey vielen Anwendungen bequemer ist.

Wir haben nemlich gefunden, daß

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.a^{n-4}b^4 - - -$$

Dieses ist nun $= a^n + \frac{n}{1}\,a^n.\frac{b}{a} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.a^n\frac{b^2}{a^2} +$

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\;2.\;3.}\,a^n\frac{b^3}{a^3} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\,\frac{n-3}{4}.a^n\frac{b^4}{a^4} + - - -$$

Man setze nun den Quotienten von $\frac{b}{a} = Q$, so ist das

1ste Glied $= a^n$	$=$	—	—	—	A
2te - -	$=\frac{n}{1}A.Q =$	—	—	—	B
3te - -	$=\frac{n-1}{2}.B.Q =$	—	—	—	C

das 4te Glied $= \frac{n-2}{3}. C. Q. = - - - D$

5te - - $= \frac{n-3}{4}. D. Q. = - - - E$

6te - - $= \frac{n-4}{5}. E. Q. = - - - F$

7te - - $= \frac{n-5}{6}. F. Q. = - - - G$

u. s. f.

also $(a+b)^n = A + \frac{n}{1} A. Q. + \frac{n-1}{2}. B. Q. + \frac{n-2}{3}. C. Q. + \frac{n-3}{4}. D. Q. + \ldots$

Ferner $(a-b)^n = A - \frac{n}{1} A. Q. + \frac{n-1}{2}. B. Q. - \frac{n-2}{3}. C. Q. + \frac{n-3}{4}. D. Q. - \ldots$

Hier werden nemlich alle Glieder negativ, worin ungerade Potenzen von b vorkommen, das wäre also hier das 2te, 4te, 6te Glied u. s. f.

Ist n gerade, so müssen, da $(n+1)$ Glieder da sind, $\frac{n}{2}$ Glieder auf jeder Seite des mittlern Gliedes liegen, und die von diesem gleich weit abstehende Glieder haben einerley Coefficienten.

Ist n ungerade, so ist die Zahl der Glieder $(n+1)$ gerade, daher alsdann $\frac{n+1}{2}$ Glieder vorwärts und rückwärts einerley Coefficienten haben.

§. 362.

Wollte man die gleiche Potenz von der Wurzel $a-b$ nehmen, so darf man nur die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten Gliedes u. s. f. verändern, und man hat daher: $(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1}. \frac{n-1}{2}. a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}. \frac{n-1}{2}. \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}. \frac{n-1}{2}. \frac{n-2}{3}. \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4$ u. s. f.

1. Zusatz. Wenn der Exponent n eine gebrochene Zahl ist, so giebt es für $(a+b)^n$ kein letztes Glied.

Beweis. Denn wenn die Potenz aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern bestehen soll; so ist nöthig, daß man bey wirklicher Bestimmung dieser Glieder (§. 361. 3. Zus.) auf einen Coefficienten komme, der = 0 ist; welches aber bey dieser Voraussetzung nicht geschehen kann.

Man setze nemlich, der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes, also auch das Glied selbst sey gleich Null, so haben wir folgende Gleichung:

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2\ ---\ (n-(r-2))(n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\ ---\ (r-1).\ r} = 0$$

mit $\frac{n.\,n-1.\,n-2\ ---\ (n-(r-2))}{1.\ 2.\ 3\ ---\ (r-1).\ r}$ dividirt, giebt

$$n-(r-1) = 0, \text{ folglich } n = r-1.$$

Da nun r eine ganze Zahl seyn muß, so ist auch $r-1$ eine ganze Zahl, daher müßte auch n eine ganze Zahl seyn, welches wider die Voraussetzung ist.

2. **Zusatz.** Wenn man in der Formel $(a+b)^n = A + \frac{n}{1}.A.Q + \frac{n-1}{2}.B.Q + \frac{n-2}{3}.C.Q\ ---$ überall statt n die gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$ setzt, so ist

$$(a+b)^{\frac{p}{q}} = A + \frac{p}{q}A.Q + \frac{p-q}{2q}.B.Q + \frac{p-2q}{3q}C.Q + \frac{p-3q}{4q}.D.Q + \frac{p-4q}{5q}E.Q + ---$$

3. **Zusatz.** Wir wollen diese Formeln mit einigen Beyspielen erläutern:

I.) $(\frac{1}{2}x + 2y)^5$ zu bestimmen.

Hier ist $a = \frac{1}{2}x$; $Q = \frac{2y}{\frac{1}{2}x} = \frac{4y}{x}$, und $n = 5$; also ist nach §. 361. 4. Zus.

$a^n = (\frac{1}{2}x)^5 = \frac{1}{32}x^5 =$ — — — A

$\frac{n}{1}.A.Q = 5.\frac{1}{32}x^5.\frac{4y}{x} = \frac{5}{8}x^4y =$ — B

$\frac{n-1}{2}.B.Q = \frac{4}{2}.\frac{5}{8}x\,y.\frac{4y}{x} = 5x^3y^2 =$ — C

$\frac{n-2}{3}.C.Q = 5.x^3y^2.\frac{4y}{x} = 20x^2y^3 =$ — D

$\frac{n-3}{4}.D.Q = \frac{2}{4}.20x^2y^3.\frac{4y}{x} = 40xy^4 =$ E

$\frac{n-4}{5}$

$\frac{n-4}{5}. E. Q = \frac{1}{5}. 40xy^4. \frac{4y}{x} = 32y^5 =$ — F

$\frac{n-5}{5}. F. Q = 0.$

Also ist $(\frac{1}{2}x + 2y)^5 = \frac{1}{32}x^5 + \frac{5}{8}x^4y + 5x^3y^2 + 20x^2y^3 + 40xy^4 + 32y^5$.

II.) Man soll $\sqrt[10]{(1+x)^{10}.(1-x)}$ angeben.

Da $\sqrt[10]{(1+x)^{10}(1-x)} = (1+x)(1-x)^{\frac{1}{10}}$ ist, so muß man $(1-x)^{\frac{1}{10}}$ suchen, und es sodann mit $1+x$ multipliciren.

Nun findet sich hier $a = 1$; $Q = \frac{-x}{1} = -x$; $p = 1$; $q = 10$.

Für diese Werthe findet man nun die ersten Glieder von $(1-x)^{\frac{1}{10}}$ auf folgende Art, und man kann noch, so viel man will, Glieder davon auf gleiche Art bestimmen.

$a^{\frac{1}{10}} = 1 =$ — — — A

$\frac{p}{q}. A. Q = \frac{1}{10}. -x = -\frac{1}{10}x =$ — B

$\frac{p-q}{2q}. B. Q = \frac{-9}{20}. -\frac{1}{10}x. -x = \frac{-9x^2}{20.10} =$ C

$\frac{p-2q}{3q}. C. Q = \frac{-19}{30}. \frac{-9x^2}{20.10}. -x = \frac{-171x^3}{30.20.10} =$ D

$\frac{p-3q}{4q}. D. Q = \frac{-29}{40}. \frac{-171x^3}{30.20.10}. -x = \frac{-4959x^4}{40.30.20.10} =$ E

u. s. f.

Daher ist

$$(1-x)^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10}x - \frac{9x^2}{200} - \frac{171x^3}{6000} - \frac{4959x^4}{240000} - - -$$

Multiplicirt man nun dieses mit $1+x$, so findet man

$$(1+x)(1-x)^{\frac{1}{10}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{10}x - \frac{9x^2}{200} - \frac{171x^3}{6000} - \frac{4959x^4}{240000} \\ + x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{9x^3}{200} - \frac{171x^4}{6000} - - - \end{array} \right.$$

$$= 1 + \frac{9}{10}x - \frac{29x^2}{200} - \frac{147x^3}{2000} - \frac{3933x^4}{80000} - - -$$

§. 363.

Diese Formeln dienen, um alle Arten von Wurzeln auszudrücken. Denn da wir gezeigt haben, wie die Wurzeln auf gebrochene Exponenten gebracht

werden können, und daß $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ u. s. f. so wird auch seyn:
$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ und
$\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$ u. s. f.

Wir haben daher, um die Wurzel von $a+b$ zu finden, nur nöthig, in der obigen allgemeinen Formel für den Exponenten n den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, daher wir erstlich für die Coefficienten bekommen werden:
$\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$, $\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$. Hernach ist $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ und $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^2\sqrt{a}}$ u. s. f.

Oder man kann diese Potenzen von a auch so ausdrücken: $a^n = \sqrt{a}$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a}$, $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$, $a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3}$, $a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}$ u. s. f.

§. 364.

Dieses vorausgesetzt, wird die Quadratwurzel aus $a+b$ folgendergestalt ausgedrückt werden: $\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,b^2\frac{\sqrt{a}}{a^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}b^3\frac{\sqrt{a}}{a^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\,b^4\frac{\sqrt{a}}{a^4}$ u. s. f.

§. 365.

Wenn nun a eine Quadratzahl ist, so kann $\sqrt{a}$ angegeben, und also die Quadratwurzel aus $a+b$, ohne Wurzelzeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden.

Also wenn $a = c^2$, so ist $\sqrt{\ } a = c$, und man wird haben: $\sqrt{\ } (c^2 + b) = c + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c} - \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{c^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128} \cdot \frac{b^4}{c^7}$ u. s. f.

Hierdurch kann man aus einer jeden Zahl die Quadratwurzel ausziehen, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wovon einer ein Quadrat ist, welcher durch c^2 angedeutet wird. Will man z. B. die Quadratwurzel von 6 haben, so setzt man $6 = 4 + 2$, und da wird $c^2 = 4$, also $c = 2$ und $b = 2$, daher bekommt man $\sqrt{\ } 6 = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ u. s. f. Nimmt man hiervon nur die zwey ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ größer ist als 6. Nimmt man drey Glieder, so hat man $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

§. 366.

Bey eben diesem Exempel, weil $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, so kann man $6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$ setzen.

Also wird $c^2 = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, woraus wir nur die zwey ersten Glieder berechnen wollen, da denn $\sqrt{\ } 6 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20}$ herauskommt, wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als 6.

Setzen wir nun $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$, so wird $c = \frac{49}{20}$ und $b = -\frac{1}{400}$. Hieraus wieder nur die zwey ersten Glieder genommen, geben $\sqrt{\ } 6 = \frac{49}{20} + \frac{1}{2} \cdot - \frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$, wovon das Quadrat $= \frac{23049601}{3841600}$. Nun aber ist $6 = \frac{23049600}{3841600}$, also ist der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

 §. 367.

§. 367.

Eben so kann man auch die Cubicwurzel aus $a+b$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Denn da $\sqrt[3]{}(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, so wird in unserer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten $\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15}$ u. s. f.

Für die Potenzen von a aber ist $a^n = \sqrt[3]{}a$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{}a}{a}$, $a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{}a}{a^2}$, $a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{}a}{a^3}$ u. s. f., daher erhalten wir $\sqrt[3]{}(a+b) = \sqrt[3]{}a + \frac{1}{3}.b\frac{\sqrt[3]{}a}{a} - \frac{1}{9}.b^2\frac{\sqrt[3]{}a}{a^2} + \frac{5}{81}.b^3\frac{\sqrt[3]{}a}{a^3} - \frac{10}{243}.b^4\frac{\sqrt[3]{}a}{a^4}$ u. s. f.

§. 368.

Wenn also a ein Cubus, nemlich $a = c^3$, so wird $\sqrt[3]{}a = c$, und also fallen die Wurzelzeichen weg. Daher haben wir:

$$\sqrt[3]{}(c^3+b) = c + \frac{1}{3}.\frac{b}{c^2} - \frac{1}{9}.\frac{b^2}{c^5} + \frac{5}{81}.\frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243}.\frac{b^4}{c^{11}} \text{ u. s. f.}$$

§. 369.

Durch Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubicwurzel von einer jeden Zahl durch Annäherung finden, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wie $c^3 + b$, wovon der erste ein Cubus ist.

Also wenn man die Cubicwurzel von 2 verlangt, so setze man $2 = 1 + 1$, und so wird $c = 1$ und $b = 1$,

folg-

folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ u. s. f., wovon die zwey ersten Glieder $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ geben, dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man setze daher $2 = \frac{64}{27}$, so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$, und daher

$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Diese zwey Glieder geben $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{73}$, wovon der Cubus $\frac{753571}{373248}$ ist. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$, also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solchergestalt kann man, wenn man will, immer näher kommen, besonders wenn man noch mehr Glieder nehmen will.

Anmerk. Ich werde im Anhange noch einige hierher gehörige Formeln mittheilen, welche in der Ausübung sehr brauchbar sind. Immer wird die hier gelehrte Näherung bequemer seyn, als die Arbeit der gewöhnlichen Rechenkunst.

XIII. Capitel.

Von der Entwickelung der negativen Potenzen.

§. 370.

Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} ausgedrückt werden kann, daher wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedrückt, so daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potenz von $a+b$, deren Exponent -1 ist, kann angesehen werden: daher die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch für diesen Fall gehört.

§. 371.

Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, so setze man in der oben gefundenen Formel $n = -1$, so

 wird