Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XIII. Capitel. Von der Entwickelung der negativen Potenzen durch unendliche Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ u. s. f., wovon die zwey ersten Glieder $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ geben, dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man setze daher $2 = \frac{64}{27}$, so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$, und daher

$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Diese zwey Glieder geben $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{73}$, wovon der Cubus $\frac{753571}{373248}$ ist. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$, also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solchergestalt kann man, wenn man will, immer näher kommen, besonders wenn man noch mehr Glieder nehmen will.

Anmerk. Ich werde im Anhange noch einige hierher gehörige Formeln mittheilen, welche in der Ausübung sehr brauchbar sind. Immer wird die hier gelehrte Näherung bequemer seyn, als die Arbeit der gewöhnlichen Rechenkunst.

XIII. Capitel.

Von der Entwickelung der negativen Potenzen.

§. 370.

Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} ausgedrückt werden kann, daher wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedrückt, so daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potenz von $a+b$, deren Exponent -1 ist, kann angesehen werden: daher die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch für diesen Fall gehört.

§. 371.

Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, so setze man in der oben gefundenen Formel $n = -1$, so wird man erstlich für die Coefficienten haben: $\frac{n}{1} = -1$, $\frac{n-1}{2} = -1$, $\frac{n-2}{3} = -1$, $\frac{n-3}{4} = -1$, $\frac{n-4}{5} = -1$ u. s. f. hernach für die Potenzen von a: $a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^2}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^4}$ u. s. f. Daher erhalten wir $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ u. s. f., welches eben diejenige Reihe ist, die schon oben (§. 303.) durch die Division gefunden worden.

§. 372.

Da ferner $\frac{1}{a(+b)^2}$ so viel ist als $(a+b)^{-2}$, so kann auch diese Formel in eine unendliche Reihe aufgelöset werden.

Man setze nemlich $n = -2$, so hat man erstlich für die Coefficienten: $\frac{n}{1} = -\frac{2}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{4}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{4}$ u. s. f. und für die Potenzen von a hat man $a^n = \frac{1}{a^2}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^5}$ u. s. f. daher erhalten wir $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1} \cdot \frac{b}{a^3} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^4}$, $- \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \frac{b^3}{a^5} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{b^4}{a^6}$ u. s. f. Nun aber ist $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5$ u. s. f. Also werden wir haben: $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8}$ u. s. f.

§. 373.

Setzen wir weiter $n = -3$, so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$, das ist für $\frac{1}{(a+b)^3}$. Für die Coefficienten wird also seyn: $\frac{n}{1} = -\frac{3}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4}$ u. s. f., für die Potenzen von a aber $a^n = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ u. s. f. Hieraus erhalten wir $\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7}$ u. s. f. $= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}}$ u. s. f.

Wir wollen nun ferner annehmen $n = -4$, so haben wir für die Coefficienten: $\frac{n}{1} = -\frac{4}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$ u. s. f.

Für die Potenzen von a aber $a^n = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^6}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^7}$, $a^{n-4} = \frac{1}{a^8}$ u. s. f., woraus gefunden wird: $\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^6}$ u. s. f. $= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9}$ u. s. f.

§. 374.

Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für eine jede dergleichen negative Potenz auf eine allgemeine Art haben werde:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\,\frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\,\frac{b^3}{a^{m+3}} \text{ u. s. f.}$$

Aus welcher Formel nun alle dergleichen Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden, wo man auch sogar für m Brüche annehmen kann, um irrationale Formen auszudrücken.

1. Zusatz. Wenn bey $(a+b)^n$ der Exponent n negativ ist, so giebt es kein letztes Glied für die Potenz.

Beweis. Es müßte, wie in §. 362. 1. Zusatz, das $(r+1)$te Glied Null seyn, nemlich

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,-\,-\,-\,(n-(r-2))(n-(r-1))}{1.\;2.\;3\,-\,-\,-\,(r-1).\;r} = 0$$

also $n-(r-1)=0$, folglich $n=r-1$.

Da aber der Voraussetzung gemäß n negativ ist, so haben wir

$$\begin{array}{r} -n = r-1 \\ +n = +\,n \\ \hline 0 = n+r-1, \end{array}$$ welches ungereimt ist.

Dieses erhellet freilich auch schon so: $(a+b)^{-n} = \frac{1}{(a+b)^n}$,

$\frac{1}{(a+b)^n}$

aber $\cancel{\frac{1}{a+b}}$ giebt eine unendliche Reihe, wie man im 5ten Cap. des II. Abschnitts gesehen hat, daher auch $\left(\frac{1}{a+b}\right)^n = \frac{1}{(a+b)^n}$ eine Reihe von unendlich viel Glieder geben wird.

2. Zusatz. Da $(a+b)^{-n} = a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$, so setze man $\frac{b}{a} = y$ und $\frac{y}{1+y} = z$, also $\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{b}{a+b} = z$; ferner folgt aus $\frac{y}{1+y} = z$, daß $y = z + zy$ und $y - zy = z$, oder $y(1-z) = z$.

$= z$. Daher $y = \frac{z}{1-z}$, und $1+y = 1+\frac{z}{1-z} = \frac{1-z+z}{1-z} = \frac{1}{1-z}$ und $(1+y)^{-n} = \frac{1}{(1-z)^{-n}} = (1-z)^n$.

Nun ist $(1-z)^n = 1 - \frac{n}{1}.z + \frac{n.n-1}{1.\ 2}z^2 - \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}z^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}z^4 - - -$

In dieser Reihe setze man statt z seinen ihm gleichen Werth $\frac{b}{a+b}$ und multiplicire jedes Glied mit $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, so erhält man

$$(a+b)^{-n} = a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^n}(1+y)^{-n}$$
$$= \frac{1}{a^n}(1-z)^n = \frac{1}{a^n} - \frac{n}{1}.\frac{b}{a^n(a+b)} + \frac{n.n-1.}{1.\ 2}.\frac{b^2}{a^n(a+b)^2} - \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}.\frac{b^3}{a^n(a+b)^3} + - - -$$

Diese Reihe bricht ab, wenn $-n$ eine ganze verneinte Zahl ist. Dieses scheint dem obigen Satz zu widersprechen, worin ausdrücklich gesagt wird, daß für $-n$ kein letztes Glied statt findet, d. i. die Reihe unendlich ist.

Mit diesem Widerspruch verhält es sich so: durch geschickte Substitution erhielten wir oben $(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^n$. Was hier linker Hand der Gleichung stehet, giebt eine unendliche, was rechter Hand stehet, eine endliche Reihe. Ueberdem ist bewiesen, daß für $-n$ nie eine endliche Reihe entstehen kann; dieses läßt schon vermuthen, daß der Grund in der Substitution liegen muß; wir haben nemlich $\frac{y}{1+y} = z$ gesetzt, also läßt sich $z = \frac{b}{a+b}$ durch $y = \frac{b}{a}$ nicht anders als durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Das Unendliche in $(a+b)^{-n}$ wird also durch $\frac{1}{a^n}(1-z)^n = \frac{1}{a^n}\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^n$ nicht aufgehoben, sondern nur versteckt.

Anmerk. Der für $(a\pm b)^n$ aus der Combinationslehre hergeleitete Beweis gilt nur, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Daß aber dieser Satz auch für gebrochene, negative, irrationale und unmögliche Größen wahr ist, bedarf einer weitläufigeren Rechtfertigung, die wenigstens an diesem Orte nicht mitgetheilt werden kann.

§. 375.

§. 375.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen: da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ u. s. f.}$$

so wollen wir diese Reihe mit $a + b$ multipliciren, weil alsdann die Zahl 1 herauskommen muß. Die Multiplication wird aber also zu stehen kommen:

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ u. s. f.}$$

$$a + b$$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^4}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a3} - \frac{b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

Product 1, wie nothwendig folgen muß.

§. 376.

Da wir ferner gefunden haben: $\frac{1}{(a+b2} = \frac{1}{a2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7}$ u. s. f., so muß, wenn man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, ebenfalls 1 herauskommen. Es ist aber $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und die Multiplication wird also zu stehen kommen:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ u. s. f.}$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$1 - \frac{2b}{a} + \frac{3b^2}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a4} - \frac{6b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$+ \frac{2b}{a} - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$+ \frac{b^2}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

Product 1, wie die Natur der Sache erfordert.

§. 377.

§. 377.

Sollte man aber diese für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit $a+b$ multipliciren, so müßte $\frac{1}{a+b}$ herauskommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ u. s. f. welches auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} \text{ u. s. f.}$$
$$a+b$$

$$\frac{1}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{3b^2}{a^3} - \frac{4b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5} \text{ u. s. f.}$$
$$+ \frac{b}{a^2} - \frac{2b^2}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} - \frac{4b^4}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

Ende des zweyten Abschnitts.

Des