Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

II. Capitel. Von den arithmetischen Proportionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

II. Capitel.

Von den arithmetischen Proportionen.

§. 390.

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine arithmetische Proportion genannt.

Also wenn $a - b = d$ und auch $p - q = d$, so daß der Unterschied zwischen den Zahlen p und q eben so groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so machen diese vier Zahlen eine arithmetische Proportion aus, welche also geschrieben wird $a - b = p - q$, wodurch angezeigt wird, daß der Unterschied zwischen a und b eben so groß sey, als zwischen p und q.

§. 391.

Eine arithmetische Proportion besteht daher aus vier Gliedern, welche so beschaffen seyn müssen, daß, wenn man das zweyte von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als wenn man das vierte von dem dritten abzieht. Also machen diese Zahlen 12, 7, 9, 4, eine arithmetische Proportion aus, weil $12 - 7 = 9 - 4$.

§. 392.

Wenn man eine arithmetische Proportion hat, als $a - b = p - q$, so lassen sich darin das zweyte und dritte Glied verwechseln und es wird auch $a - p = b - q$ seyn. Denn da $a - b = p - q$, so addire man erstlich beyderseits b, und so hat man $a = b + p - q$. Hernach subtrahire man beyderseits p, so bekommt man $a - p = b - q$.

Da also $12 - 7 = 9 - 4$, so ist auch $12 - 9 = 7 - 4$.

§. 393.

In einer jeden arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweyten und zugleich das dritte mit dem vierten verwechseln. Denn wenn $a - b = p - q$, so ist auch $b - a = q - p$. Denn $b - a$ ist das Negative von $a - b$ und eben so ist auch $q - p$ das Negative von $p - q$. Da nun $12 - 7 = 9 - 4$, so ist auch $7 - 12 = 4 - 9$.

§. 394.

Besonders aber ist bey einer jeden arithmetischen Proportion diese Haupteigenschaft wohl zu bemerken, daß die Summe des zweyten und dritten Gliedes immer eben so groß sey, als die Summe des ersten und vierten Gliedes, welchen Satz einige auch so ausdrücken: die Summe der mittlern Glieder ist allezeit so groß, als die Summe der äußern. Also da $12 - 7 = 9 - 4$, so ist $7 + 9 = 12 + 4$, denn jedes macht 16.

§. 395.

Um diese Haupteigenschaft zu beweisen, so sey $a - b = p - q$: man addire beyderseits $b + q$, so bekommt man $a + q = b + p$, das ist, die Summe des ersten und vierten Gliedes ist gleich der Summe des zweyten und dritten. Hieraus erhellt auch umgekehrt folgender Satz: wenn vier Zahlen, als a, b, p, q, so beschaffen sind, daß die Summe der zweyten und dritten so groß ist, als die Summe der ersten und vierten, nemlich daß $b + p = a + q$, so sind diese Zahlen gewiß in einer arithmetischen Proportion, und es wird $a - b = p - q$ seyn. Denn da $a + q = b + p$, so subtrahire man beyderseits $b + q$, und so bekommt man $a - b = p - q$.

Da

Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summe der mittlern 13 + 15 = 28 = der Summe der äußern 18 + 10 ist, so sind dieselben auch gewiß in einer arithmetischen Proportion und folglich 18 — 13 = 15 — 10.

§. 396.

Aus dieser Eigenschaft kann man leicht folgende Frage auflösen: wenn von einer arithmetischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben sind, wie soll man daraus das vierte finden? Es seyen die drey ersten Glieder a, b, p und für das vierte, welches gefunden werden soll, schreibe man q, so hat man a + q = b + p. Nun subtrahire man beyderseits a, so bekommt man q = b + p — a. Also wird das vierte Glied gefunden, wenn man das zweyte und dritte zusammen addirt und von der Summe das erste subtrahirt. Es seyen z. B. 19, 28, 13 die drey ersten Glieder, so ist die Summe des zweyten und dritten = 41, davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die arithmetische Proportion wird 19 — 28 = 13 — 22, oder 28 — 19 = 22 — 13, oder 28 — 22 = 19 — 13 seyn.

§. 397.

Wenn in einer arithmetischen Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drey Zahlen, welche also beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist, als die andere weniger der dritten, oder daß der Unterschied zwischen der ersten und andern so groß ist, als der Unterschied zwischen der andern und dritten. Solche 3 Zahlen sind 19, 15, 11, weil 19 — 15 = 15 — 11. Dergleichen Proportionen werden stetige genannt, da man hingegen diejenigen, wo die mittlern Glieder ungleich sind, wie bey den vorigen Beyspielen, unstetige Proportionen zu nennen pflegt.

§. 398.

Drey solche Zahlen schreiten in einer arithmetischen Progression fort, welche entweder steigt, wenn die zweyte um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Exempel 4, 7, 10, oder fällt, wenn die Zahlen um gleich viel kleiner werden als 9, 5, 1.

§. 399.

Es seyn die Zahlen a, b, c in einer arithmetischen Progression, so muß $a - b = b - c$ seyn; hieraus folget, bey der Gleichheit der mittlern und äußern Summe, $2b = a + c$. Nimmt man auf beyden Seiten a weg, so bekommt man $c = 2b - a$.

§. 400.

Wenn also von einer stetigen arithmetischen Proportion die zwey ersten Glieder gegeben sind, als a und b, so wird daraus das dritte gefunden, wenn man das zweyte verdoppelt und davon das erste subtrahirt. Es seyn 1 und drey die zwey ersten Glieder einer stetigen arithmetischen Proportion, so wird das dritte $= 2 . 3 - 1 = 5$ seyn, und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion $1 - 3 = 3 - 5$.

Zusatz. Da nach §. 399. in einer stetigen arithmetischen Proportion $2b = a + c$ ist, so findet man $b = \frac{a + c}{2}$, das heißt, die mittlere arithmetische Proportionalzahl, wird gefunden, wenn man die Summe aus dem ersten und letzten Gliede halbirt. Z. B. es sey 8 das erste und 14 das letzte Glied, so ist das mittlere $= \frac{8 + 14}{2} = 4 + 7 = 11$, und wirklich ist $8 - 11 = 11 - 14$.

§. 401.

§. 401.

Man kann nach der Regel des vorhergehenden §. weiter fortschreiten, und wie man aus dem ersten und zweyten Gliede das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solchergestalt die arithmetische Progression fortsetzen so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweyte, so wird das dritte $= 2b - a$; das vierte $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$; das fünfte $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$; das sechste $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$; das siebente $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ u. s. f. das nte $= (n-1)b - (n-2)a$.

III. Capitel.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine **arithmetische Progression** genannt.

Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u. s. f. eine arithmetische Progression, weil dieselben immer um eins steigen und diese Reihe, als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 u. s. f. ist auch eine arithmetische Progression, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

§. 403.

Die Zahl, um welche die Glieder einer arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, wird