Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

III. [Capitel]. Von den arithmetischen Progressionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

§. 401.

Man kann nach der Regel des vorhergehenden §. weiter fortschreiten, und wie man aus dem ersten und zweyten Gliede das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solchergestalt die arithmetische Progreßion fortsetzen so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweyte, so wird das dritte $= 2b - a$; das vierte $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$; das fünfte $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$; das sechste $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$; das siebente $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ u. s. f. das nte $= (n - 1)b - (n - 2)a$.

III. Capitel.

Von den arithmetischen Progreßionen.

§. 402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine **arithmetische Progreßion** genannt.

Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u. s. f. eine arithmetische Progreßion, weil dieselben immer um eins steigen und diese Reihe, als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 u. s. f. ist auch eine arithmetische Progreßion, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

§. 403.

Die Zahl, um welche die Glieder einer arithmetischen Progreßion größer oder kleiner werden, wird die Differenz oder der Unterschied genannt. Wenn also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, so kann man die arithmetische Progression so weit man will fortsetzen. Es sey z. B. das erste Glied = 2 und die Differenz = 3, so wird die steigende Progression seyn:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 u. s. f.

wo ein jedes Glied gefunden wird, wenn man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

§. 404.

Man pflegt über die Glieder einer solchen arithmetischen Progression die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. zu schreiben, damit man sogleich sehen könne, das wie vielste Glied ein jegliches sey, und die so darüber geschriebene Zahlen werden Zeiger oder Indices genannt. Das obige Exempel kommt daher also zu stehen:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
arith. Prog.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29 u. s. f.

woraus man sieht, daß 29 das zehnte Glied ist.

§. 405.

Es sey a das erste Glied und d die Differenz, so wird die arithmetische Progression folgende seyn:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$,	$a+7d$ u. s. f.

Hieraus kann man sogleich ein jedes Glied finden, ohne daß man erst alle vorhergehende zu wissen braucht, und dieses allein aus dem ersten Gliede a und der Differenz d. Also wird z. B. das 10te Glied seyn $= a + 9d$, das 100te $= a + 99d$, und auf eine allgemeine Art wird das nte Glied seyn: $a + (n - 1)d$.

§. 406.

Wenn die arithmetische Progression irgendwo abgebrochen wird, so muß man vorzüglich das erste und das letzte Glied merken, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $= a + (n - 1)d$. Dies wird also gefunden, wenn man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt. Man habe z. B. eine arithmetische Progression von 100 Gliedern, wovon das erste $= 4$ und die Differenz $= 3$, so wird das letzte Glied $99 \cdot 3 + 4 = 301$ seyn.

§. 407.

Hat man das erste Glied $= a$ und das letzte $= z$, nebst der Anzahl der Glieder $= n$, so kann man daraus die Differenz $= d$ finden. Denn da das letzte Glied $z = a + (n - 1)d$ ist, so hat man, wenn man auf beiden Seiten subtrahirt, $z - a = (n - 1)d$. Wenn man also von dem letzten Gliede das erste subtrahirt, so hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder $z - a$ ist das Product von $(n - 1)$ in d. Man darf also nur $z - a$ durch $n - 1$ dividiren, so bekommt man die Differenz $d = \frac{z - a}{n - 1}$, woraus sich diese Regel ergiebt: man subtrahirt vom letzten Gliede das erste, den Rest theilt man durch die Anzahl der Glieder weniger eins, so bekommt man die Differenz; woraus man hernach die ganze Progression bestimmen kann.

§. 408.

Es hat z. B. einer eine arithmetische Progression von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26 ist, und von welcher die Differenz gesucht

sucht werden soll. Man muß also das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren und den Rest 24 durch 9 — 1, das ist durch 8 dividiren, so bekommt man die Differenz = 3, und die Progression selbst wird seyn:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26. \end{array}$$

Um ein anderes Beispiel zu geben, so sey das erste Glied 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, wovon die arithmetische Progression verlangt wird. Hier bekommt man zur Differenz $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$, und die verlangte Progression wird seyn:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 1, & 1\frac{1}{9}, & 1\frac{2}{9}, & 1\frac{3}{9}, & 1\frac{4}{9}, & 1\frac{5}{9}, & 1\frac{6}{9}, & 1\frac{7}{9}, & 1\frac{8}{9}, & 2. \end{array}$$

Noch ein Beispiel. Es sey das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz $\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1} = \frac{10\frac{1}{6}}{6} = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$, folglich wird die Progression seyn:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7. \\ 2\frac{1}{3}, & 4\frac{1}{36}, & 5\frac{13}{18}, & 7\frac{5}{12}, & 9\frac{1}{9}, & 10\frac{29}{36}, & 12\frac{1}{2}. \end{array}$$

§. 409.

Wenn ferner das erste Glied a und das letzte z, mit der Differenz d gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder n finden. Denn da $z - a = (n-1)d$, so dividire man beyderseits mit d und da bekommt man $\frac{z-a}{d} = n - 1$. Da nun n um eins größer ist als $n - 1$, so wird $n = \frac{z-a}{d} + 1$, folglich findet man die Anzahl der Glieder, wenn man den Unterschied zwischen dem ersten und letzten Gliede $z - a$ durch die Differenz dividirt und zum Quotienten $\frac{z-a}{d}$ noch eins addirt.

Es

Es sey z. B. das erste Glied = 4, das letzte = 100, und die Differenz = 12, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{100-4}{12}+1=9$, und diese neun Glieder sind folgende:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Es sey das erste Glied = 2, das letzte = 6, und die Differenz = $1\frac{1}{3}$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$, und diese vier Glieder sind:

1,	2,	3,	4.
2,	$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{2}{3}$,	6.

Es sey ferner das erste Glied = $3\frac{1}{3}$, das letzte $7\frac{2}{3}$, und die Differenz = $1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder = $\frac{7\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}}+1=4$, und diese vier Glieder sind:

1,	2,	3,	4.
$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{7}{9}$,	$6\frac{2}{9}$,	$7\frac{2}{3}$.

§. 410.

Es ist aber hier wohl zu merken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine ganze Zahl seyn muß. Wenn man also in obigem Beispiele für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Frage ungereimt gewesen.

Wenn folglich für $\frac{z-a}{d}$ keine ganze Zahl gefunden würde, so ließe sich diese Frage nicht auflösen, und man müßte antworten, daß die Frage unmöglich wäre. Daher muß sich bey dergleichen Fragen die Zahl $z-a$ durch d theilen lassen.

1. Zusatz. Soll endlich, wenn von einer arithmetischen Progression das letzte Glied z, die Differenz d, und die Anzahl der Glieder n gegeben wird, das erste Glied a gefunden werden, so ist da $a+(n-1)d=z$, auch $a=z-(n-1)d$, d. h. man findet das erste Glied a, wenn man das Product aus der Differenz d in die Zahl der Glieder

Glieder n weniger 1 von dem letzten Gliede abzieht. Es sey z. B. das letzte Glied $z = 100$, die Anzahl der Glieder $n = 9$, und die Differenz $d = 12$, so wird das erste Glied $a = 100 - (9 - 1) 12 = 100 - 8 . 12 = 4$ seyn, und dieses war auch in der ersten Progression §. 409 wirklich das erste Glied.

2. **Zusatz.** Was bisher von den steigenden arithmetischen Progressionen gesagt worden ist, läßt sich auch auf die fallenden anwenden, wenn man bey diesen das letzte Glied, wie das erste, und das erste, wie das letzte Glied einer steigenden Progression behandelt.

§. 411.

Bey einer jeden arithmetischen Progression sind also folgende vier Stücke zu betrachten:

I. das erste Glied a, II. das letzte Glied z,
III. die Differenz d, IV. die Anzahl der Glieder n,

welche so beschaffen sind, daß, wenn drey derselben bekannt sind, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:

I. Wenn a, d und n bekannt sind, so hat man $z = a + (n - 1) d$.

II. Wenn z, d und n bekannt sind, so hat man $a = z - (n - 1) d$.

III. Wenn a, z und n bekannt sind, so hat man $d = \frac{z - a}{n - 1}$.

IV. Wenn a, z und d bekannt sind, so hat man $n = \frac{z - a}{d} + 1$.

Zusatz. Für fallende Reihen ist a das letzte und z das erste Glied und die Differenz $= - d$, daher für solche Reihen $z = a - (n - 1) d$ und $a = z + (n - 1) d$, und $d = \frac{a - z}{n - 1}$ und $n = \frac{a - z}{d} + 1$. Daß bey fallenden Reihen die Differenz d negativ ist, entsteht bloß aus der Art, wie ein Glied aus dem vorhergehenden gemacht wird, in Vergleichung der Entstehung des eben so vielten Gliedes in einer steigenden Reihe von eben der Differenz. Bey dieser wird nemlich die Differenz zu dem vorhergehenden Gliede addirt, da hingegen bey jener Reihe solche abgezogen werden muß. Will man nun das Wort addiren beybehalten,

ten, so muß man die Differenz bey fallenden Reihen negativ setzen, denn eine negative Größe addiren, oder eine positive subtrahiren, giebt einerley Resultate. Daß d negativ wird, liegt also gar nicht in dem Begriff von Differenz, sondern in der Art, wie die Glieder der Progression gebildet werden sollen.

IV. Capitel.

Von der Summirung der arithmetischen Progressionen.

§. 412.

Wenn eine arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summe derselben zu suchen. Diese findet man, wenn man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig seyn würde, wenn die Progression aus sehr viel Gliedern besteht, so kann eine Regel gegeben werden, mit deren Hülfe diese Summe ganz leicht gefunden wird.

§. 413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied = 2, die Differenz = 3, das letzte Glied = 29, und die Anzahl der Glieder = 10 ist.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Hier ist nun die Summe des ersten und letzten Gliedes = 31, die Summe des zweyten und vorletzten Gliedes = 31, die Summe des dritten und dritten vom Ende = 31, die Summe des vierten und vierten vom Ende = 31 u. s. f., woraus man ersieht, daß immer zwey Glieder, die von dem ersten und letzten gleich weit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

§. 414.