Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

IV. Capitel. Von der Summirung der arithmetischen Progressionen.

ten, so muß man die Differenz bey fallenden Reihen negativ setzen, denn eine negative Größe addiren, oder eine positive subtrahiren, giebt einerley Resultate. Daß d negativ wird, liegt also gar nicht in dem Begriff von Differenz, sondern in der Art, wie die Glieder der Progression gebildet werden sollen.

IV. Capitel.

Von der Summirung der arithmetischen Progressionen.

§. 412.

Wenn eine arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summe derselben zu suchen. Diese findet man, wenn man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig seyn würde, wenn die Progression aus sehr viel Gliedern besteht, so kann eine Regel gegeben werden, mit deren Hülfe diese Summe ganz leicht gefunden wird.

§. 413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied = 2, die Differenz = 3, das letzte Glied = 29, und die Anzahl der Glieder = 10 ist.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Hier ist nun die Summe des ersten und letzten Gliedes = 31, die Summe des zweyten und vorletzten Gliedes = 31, die Summe des dritten und dritten vom Ende = 31, die Summe des vierten und vierten vom Ende = 31 u. s. f., woraus man ersieht, daß immer zwey Glieder, die von dem ersten und letzten gleich weit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

§. 414.

Der Grund davon fällt auch so gleich in die Augen. Denn wenn das erste Glied = a gesetzt, das letzte = z, die Differenz aber = d wird, so ist die Summe des ersten und letzten = $a + z$. Hernach ist das zweyte Glied $a + d$ und das vorletzte = $z - d$, welche zusammen genommen $a + z$ ausmachen. Ferner ist das dritte Glied $a + 2d$ und das dritte vom Ende = $z - 2d$, welche zusammen auch $a + z$ betragen. Woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellet.

§. 415.

Um nun die Summe der obigen Progression zu finden, nemlich von $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$, so schreibe man eben diese Progression rückwärts darunter und addire Glied für Glied, wie folget:

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ \underline{29+26+23+20+17+14+11+8+5+2} \\ 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

Diese gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe ist offenbar zweymal so groß als die Summe der gegebenen Progression. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Progression, und also ist derselben Summe = $10 \cdot 31 = 310$. Da nun diese Summe zweymal so groß ist, als die Summe der arithmetischen Progression, so wird die wahre Summe = 155 seyn.

§. 416.

Wenn man auf diese Art mit einer jeden arithmetischen Progression verfährt, wovon das erste Glied = a, das letzte = z, und die Anzahl der Glieder = n ist, indem man eben dieselbe Progression rück-

wärts

wärts darunter schreibt und Glied vor Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied a + z, deren Anzahl = n, folglich ist die Summe derselben = n (a + z), welche zweymal so groß ist, als die Summe der Progression, daher ist die Summe der arithmetischen Progression selbst = $\frac{n(a+z)}{2}$.

§. 417.

Hieraus ergiebt sich nun folgende einfache Regel, um die Summe einer jeden arithmetischen Progression zu finden:

Man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summe der ganzen Progression anzeigen.

Oder welches dasselbe ist: man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch: man multiplicire die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder, so bekommt man die Summe der ganzen Progression.

§. 418.

Es ist nöthig, diese Regel mit einigen Beispielen zu erläutern. Es sey daher die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, bis 100 gegeben, von welchen die Summe gesucht werden soll. Diese wird nach der ersten Regel seyn $\frac{100 . 101}{2} = 50 . 101 = 5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlag-Uhr in 12 Stunden thue? Zu diesem Ende müssen die Zahlen 1, 2, 3 bis 12, zusammen addirt werden, die Summe wird also seyn $\frac{12 . 13}{2} = 6 . 13 = 78$.

Wollte man die Summe von eben dieser Reihe bis 1000 fortgesetzt wissen, so würde dieselbe seyn 500500; bis 10000 fortgesetzt, wird dieselbe = 50005000 seyn.

§. 419.

Frage. Einer kauft ein Pferd mit dieser Bedingung: für den ersten Hufnagel zahlt er 5 Groschen, für den zweyten 8, für den dritten 11, und immer 3 Groschen mehr für einen jeden folgenden. Es sind aber in allem 32 Nägel, wie viel kostet ihm das Pferd?

Hier wird also die Summe von einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 5, die Differenz = 3, und die Anzahl der Glieder = 32 ist, gesucht.

Hier muß nun zuerst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regel (§. 406) gefunden wird = $5 + 31 . 3 = 98$, und hieraus ergiebt sich die gesuchte Summe $\frac{103 . 32}{2} = 103 . 16 = 1648$; also kostet das Pferd 1648 Groschen, oder 68 Rthl. 16 Gr.

§. 420.

Es sey auf eine allgemeine Art das erste Glied = a, die Differenz = d, und die Anzahl der Glieder = n, woraus die Summe der ganzen Progression gefunden werden soll; da nun das letzte Glied $z = a + (n - 1)d$ seyn muß, so ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 2a + (n - 1)d$, welche mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt, $2na + n(n - 1)d$ giebt, daher die gesuchte Summe seyn wird $= na + \frac{n(n-1)}{2} d$.

Nach dieser Formel, weil in dem obigen Beispiel $a = 5$, $d = 3$, und $n = 32$ war, erhält man die Summe $5 . 32 + \frac{31 . 32 . 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$ wie vorher.

§. 421.

Wenn die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. bis n zusammen addirt werden soll, so hat man, um diese Summe zu finden, das erste Glied = 1, das letzte = n und die Anzahl der Glieder, woraus die Summe gefunden wird $\frac{nn+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$. Setzt man n = 1766, so wird die Summe aller Zahlen von 1 bis 1766 seyn = 883. 1767 = 1560261.

§. 422.

Es sey die Progression der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. f. gegeben, welche bis auf n Glieder fortgesetzt ist, wovon die Summe verlangt wird.

Hier ist nun das erste Glied = 1, die Differenz = 2, die Anzahl der Glieder = n; daraus wird das letzte Glied $1+(n-1)2=2n-1$ seyn; woraus man die gesuchte Summe = n^2 erhält.

Folglich darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multipliciren. Man mag also von dieser Progression so viel Glieder zusammen addiren als man will, so ist die Summe immer ein Quadrat, nemlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie es auch folgende Beispiele bestätigen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 u.s.f.
Prog.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19 u.s.f.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 u.s.f.

§. 423.

Es sey ferner das erste Glied = 1, die Differenz = 3 und die Anzahl der Glieder = n, so hat man diese Progression 1, 4, 7, 10 u. s. f., wovon das letzte Glied $1+(n-1)3=3n-2$ seyn wird; daher die Summe des ersten und letzten Gliedes = $3n-1$;

folglich die Summe der Progression $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$.
Nimmt man $n = 20$, so ist die Summe $= 10 . 59 = 590$.

§. 424.

Es sey das erste Glied $= 1$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, so wird das letzte Glied $1 + (n - 1)d$ seyn. Hierzu das erste addirt, giebt $2 + (n-1)d$, dies mit der Anzahl der Glieder multiplicirt, $2n + n(n-1)d$, daher die Summe der Progression $n + \frac{n(n-1)d}{2}$ seyn wird.

Wir wollen hier folgendes Täfelchen anhängen, worin der Buchstabe S die Summe der Progression anzeigt, und das erste Glied immer 1 ist,

wenn $d = 1$, so ist $S = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{nn+n}{2}$

$d = 2$ — $S = n + \frac{2n(n-1)}{2} = nn$

$d = 3$ — $S = n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$

$d = 4$ — $S = n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2nn-n$

$d = 5$ — $S = n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5nn-3n}{2}$

$d = 6$ — $S = n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3nn-2n$

$d = 7$ — $S = n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7nn-5n}{2}$

$d = 8$ — $S = n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4nn-3n$

$d = 9$ — $S = n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9nn-7n}{2}$

$d = 10$ — $S = n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn-4n$

u. s. f.

so daß, wenn $d = n$, $S = n + \frac{n^2(n-1)}{2}$ ist.

V. Ca-