Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

V. Capitel. Von den polygonal- oder vieleckigen Zahlen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

V. Capitel.

Von den polygonal oder vieleckigen Zahlen.

§. 425.

Die Summation der arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen und deren Differenz entweder 1, 2, 3, oder eine andere beliebige ganze Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den polygonal oder vieleckigen Zahlen, welche entstehen, wenn man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

§. 426.

Setzt man die Differenz = 1, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht diese arithmetische Progression = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 u. s. f. Nimmt man nun außer dem ersten Gliede die Summe von zwey, drey, vier Gliedern u. s. f., so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 u. s. f.

so daß $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ u. s. f. Diese Zahlen werden triangular (triagonal) oder dreyeckige Zahlen genannt, weil sich so viel Punkte, als eine solche Zahl anzeigt, durch ein Dreyeck vorstellen lassen, wie aus folgendem zu ersehen:

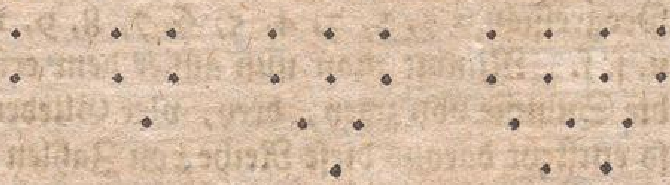
1. 3. 6. 10. 15.

21. 28.

§. 427.

Bey einem jeden dieser Dreyecke sieht man vorzüglich darauf, wie viel Punkte in einer jeden Seite sind; bey dem ersten ist nur eins, bey dem zweyten 2, bey dem dritten 3, bey dem vierten 4, u. s. f. Also nach der Anzahl der Punkte in einer Seite, welche schlechthin die Seite genannt wird, verhalten sich die dreyeckigen Zahlen, oder die Anzahl aller Punkte, welche schlechthin ein Dreyeck genannt wird, folgendergestalt:

Seite
Dreyeck



Seite
Dreyeck

§. 428.

Hier kommt also die Frage vor, wie aus der gegebenen Seite das Dreyeck gefunden werden soll? Diese Frage läßt sich leicht beantworten, weil man hier nur nöthig hat, die oben (§. 421) gegebene

Regel

Regel von der Summirung der natürlichen Zahlen anzuwenden.

Denn es sey die Seite $= n$, so wird das Dreyeck $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . n$, deren Summe $= \frac{nn+n}{2}$, folglich wird das Dreyeck $\frac{nn+n}{2}$. Ist also $n = 1$, so wird das Dreyeck $= 1$.

Ist $n = 2$, so ist das Dreyeck $\frac{4+2}{2} = 3$.

$n = 3$ — — $\frac{9+3}{2} = 6$.

$n = 4$ — — $\frac{16+4}{2} = 10$ u. s. f.

Nimmt man $n = 100$, so wird das Dreyeck $= 5050$ u. s. f.

Anmerk. Herr v. Jaucourt hat 1762 zu Haag eine Tafel der Triagonalzahlen herausgegeben, welche für $n = 1, 2, 3$ - - - bis incl. 20000 berechnet ist. Diese Tafeln können sehr nützlich seyn, eine große Menge arithmetischer Operationen zu erleichtern, wie es der Herausgeber in einer sehr weitläuftigen Einleitung zeigt.

§. 429.

Diese Formel $\frac{n^2+n}{2}$ wird nun die Generalformel für alle dreyeckige Zahlen genannt: weil sich aus derselben für eine jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreyeckige Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also vorgestellet werden $\frac{n(n+1)}{2}$, welches zur Erleichterung der Rechnung dienet, weil allezeit entweder n oder $n + 1$ eine gerade Zahl ist und sich durch 2 theilen läßt.

Also wenn $n = 12$, so ist das Dreyeck $= \frac{12.13}{2} = 6.13 = 78$. Ist $n = 15$, so ist das Dreyeck $= \frac{15.16.}{2} = 15.8 = 120$ u. s. f.

§. 430.

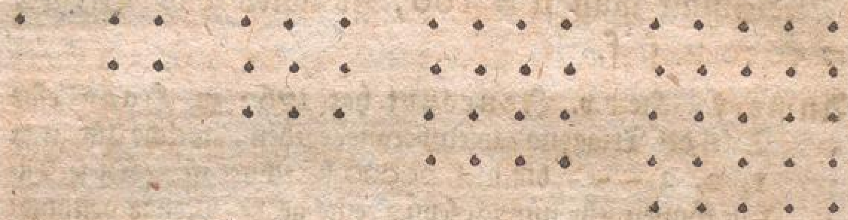
Setzt man die Differenz = 2, so hat man diese arithmetische Progression:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 u. s. f.
wovon die Summen folgende Reihe ausmachen:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 u. s. f.

Diese Zahlen werden quadrangular (tetragonal) oder viereckige Zahlen genannt, und sind eben diejenigen, welche oben (§. 115) Quadrate genannt worden. Es lassen sich nemlich so viel Punkte, als eine solche Zahl anzeigt, in ein Viereck bringen:

1, 4, 9, 16, 25,



36, 49,

§. 431.

Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks eben so viel Punkte enthält, als die Quadratwurzel davon anzeigt. Also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber, wenn die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Progression 1, 3, 5, 7 u. s. f. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben (§. 422) = n^2

$= n^2$ gefunden worden. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben (§. 115 u. f.) ausführlich gehandelt worden.

§. 432.

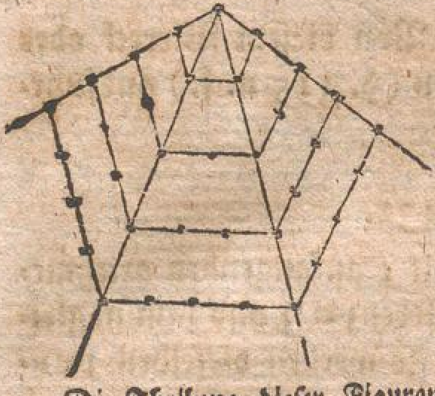
Setzt man in einer mit 1 anfangenden arithmetischen Progression die Differenz = 3 und nimmt gleicher Gestalt die Summen, so werden dieselben pentagonal oder fünfeckige Zahlen genannt, ob sich dieselben gleich nicht mehr so gut durch Punkte vorstellen lassen. Dieselben schreiten demnach folgendermaßen fort.

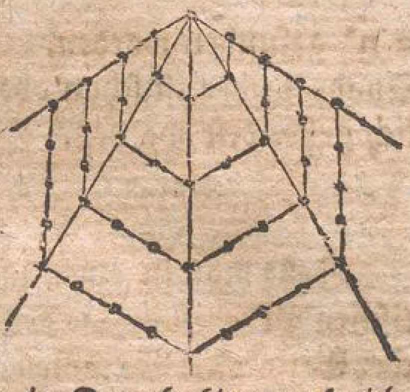
Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
arith. Prog.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176

u. s. f. und der Zeiger weiset die Seite eines jeden Fünfecks an.

Zusatz. Folgende Regel wird die wirkliche Construction der Polygonalzahlen sehr erleichtern: man zeichne anfangs ein kleines reguläres Polygon von so viel Seiten, als verlangt werden. Die Zahl der Seiten bleibt für eine und eben dieselbe Reihe von Polygonalzahlen, und ist gleich der um 2 vermehrten Differenz derjenigen arithmetischen Reihe, woraus jene Reihe entstanden ist. Nun wählt man einen Winkel dieses Polygons, um von ihm aus durch alle Winkelpunkte unbestimmte Linien zu ziehen, wovon aus geometrischen Gründen immer 3 weniger als das Polygon Seiten hat, Diagonalen sind. Auf eine der verlängerten Seiten des kleinen Polygons trage man alsdann die Seite dieses Polygons so oft, als man will. Durch diese solchergestalt erhaltenen Punkte ziehe man mit den Seiten des kleinen Polygons Parallelen; diese Parallelen theile man endlich in eben so viele gleiche Theile, als die zu ihnen gehörigen Diagonalen haben, so hat man die verlangte Construction.

Diese Regel ist ganz allgemein und gilt vom Triangel an bis zum Polygon von unendlich vielen Seiten. Folgende zwey Figuren werden diese Regel hinlänglich erläutern:





Die Theilung dieser Figuren in Dreyecke bietet noch viele merkwürdige Betrachtungen und artige Verwandlungen der allgemeinen Formel dar, durch welche man, wie in diesem Capitel gelehrt worden, die Polygonalzahlen ausdrückt; allein hier dürfen wir uns nicht dabey aufhalten.

§. 433.

Wenn also die Seite n gesetzt wird, so läßt sich jede fünfeckige Zahl durch die oben (§. 423) erklärte Formel $\frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$ ausdrücken. Wenn z. B. $n=7$, so ist das Fünfeck $\left(\frac{3.7-1}{2}\right) 7 = 70$. Will man die fünfeckige Zahl von der Seite 100 wissen, so setzt man $n = 100$ und bekommt 14950.

§. 434.

Setzt man die Differenz $=4$, so erhält man auf diese Art die hexagonal oder sechseckigen Zahlen, welche in folgender Ordnung fortschreiten:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
arith. Prog.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37.
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190.

Hier giebt der Zeiger wieder die Seite eines jeden Sechsecks an.

§. 435.

Wenn also die Seite n ist, so wird die sechseckige Zahl nach der (in §. 424) gegebenen Formel $= 2nn - n = n(2n-1)$, wobey zu merken ist, daß alle diese sechseckigen Zahlen zugleich dreyeckige Zahlen sind. Denn wenn man in diesen immer eine überspringt, so erhält man die sechseckige.

§. 436.

§. 436.

Auf gleiche Weise findet man die siebeneckigen, achteckigen, neuneckigen Zahlen u. s. f., von welchen wir die Generalformeln hier insgesammt hersetzen wollen. Wenn also die Seite n ist, so wird seyn

das Dreyeck $= \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Viereck $= \frac{2n^2+0n}{2} = n^2$

V eck $= \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

VI eck $= \frac{4n^2-2n}{2} = 2n^2-n = n\,(2n-1)$

VII eck $= \frac{5n^2-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$

VIII eck $= \frac{6n^2-4n}{2} = 3n^2-2n = n(3n-2)$

IX. eck $= \frac{7n^2-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$

X eck $= \frac{8n^2-6n}{2} = 4n^2-3n = n(4n-3)$

XI eck $= \frac{9n^2-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$

XII eck $= \frac{10n^2-8n}{2} = 5n^2-4n = n(5n-4)$

XX eck $= \frac{18n^2-16n}{2} = 9n^2-8n = n(9n-8)$

XXV eck $= \frac{23n^2-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$

m eck $= \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$

Man wird leicht einsehen, daß diese Tafel nur eine erweiterte von §. 424. ist.

§. 437.

Wenn also die Seite n ist, so hat man auf eine allgemeine Art die m eckige Zahl $= \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$ woraus man alle nur mögliche vieleckige Zahlen finden kann, deren Seite $= n$. Wollte man daraus die

die zweyeckigen Zahlen finden, so würde m = 2 und dieselbe = n seyn.

Setzt man m = 3, so wird die III eckige Zahl = $\frac{nn+n}{2}$

Setzt man m = 4, so wird die IV eckige Zahl = nn u. s. f.

Zusatz. Die allgemeine Formel $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$ ist hier nach einem bey den besondern Formeln bemerkten Gesetz gefunden worden. Man findet solche aber unmittelbar durch folgende Schlüsse:

Der Buchstabe m sey die Zahl der Winkel, wovon das Vieleck benannt wird, so ist die Differenz der arithmetischen Reihe, aus welcher die gesuchte Polygonalzahl entsteht, = m — 2, und n sey die Anzahl der Glieder dieser Reihe.

Da nun in jeder arithmetischen Reihe das letzte Glied $z = a+(n-1)d$ und $S=(a+z)\frac{n}{2}$, so ist in unserer obigen Reihe $a=1$; $d=m-2$; $z=1+(n-1)(m-2)$, also die Summe des ersten und letzten Gliedes $=2+(n-1)(m-2)$, und diese Summe mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt, giebt $\frac{(2+(n-1)m-2))n}{2} = \frac{(m-2)(n-1)n+2n}{2} = \frac{(m-2)(n^2-n)+2n}{2} = \frac{(m-2)n^2-(m-2)n+2n}{2} = \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$

Die zweyeckigen Zahlen zu finden, muß man m = 2 setzen, dieses giebt also $\frac{(2-2)n^2-(2-4)n}{2} = n$. Die arithmetische Progression, woraus diese zweyeckige Zahlen entstehen, wäre, da die Differenz $m-2=0$, und das erste Glied 1 ist, lauter Einzen. Diese zweyeckige Zahlen können nicht anders durch Punkte vorgestellt werden, als in einer geraden Linie, denn diese ihre zwey Endpuncte stellen die zwey Winkelpuncte vor, aber genau genommen, giebt es so wenig 2eckige Zahlen, als es eine 2seitige geradlinigte Figur giebt. Die kleinste Figur ist die, worin m = 3 ist.

§. 438.

Um diese Regel mit einigen Beispielen zu erläutern, so suche man die XXV eckige Zahl, deren Seite 36 ist. Man suche erstlich für die Seite n die XXV

eckige

eckige Zahl; dieses geschiehet, indem man in der allgemeinen Formel $m = 25$ setzt, so wird dieselbe $= \frac{23n^2 - 21n}{2}$. Nun setze man $n = 36$, so bekommt man die gesuchte Zahl $= \frac{23.36^2 - 21.36}{2} = 14526$.

§. 439.

Frage. Einer hat ein Haus gekauft und wird gefragt, wie theuer? darauf antwortet er, die Zahl der Thaler, die er dafür bezahlet, sey die 365 eckige Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden, so wird $m = 365$, und also das 365eck von $n = \frac{363n^2 - 361n}{2}$. Nun ist $n = 12$, folglich das 365eck von $12 = \frac{363.12^2 - 361.12}{2}$ $= 23970$. Das Haus ist also mit 23970 Thaler bezahlt worden.

Zusatz. Euler hatte dieses Capitel überschrieben: Von den figurirten oder vieleckigen Zahlen. Warum wir das Wort figurirten weggelassen haben, wird aus folgendem erhellen.

Einige Algebraisten unterscheiden nicht ohne Grund figurirte und Polygonal-Zahlen. In der That entstehen auch die Zahlen, welche man gewöhnlich figurirte nennt, alle aus einer einzigen arithmetischen Progression, und jede Reihe dieser Zahlen wird gebildet, indem man die Glieder der vorhergehenden Reihe zusammen addirt.

Hingegen wird jede Reihe der Polygonalzahlen aus einer andern arithmetischen Progression gemacht; daher auch aufs strengste genommen nur eine einzige Reihe der figurirten Zahlen, zu gleicher Zeit eine Reihe von Polygonalzahlen ist. Eine aufmerksame Betrachtung der folgenden Tabelle wird einen jeden leicht davon überzeugen.

Figurirte Zahlen:

Beständige Zahlen	—	1, 1, 1, 1, 1, 1 u. s. f.
Natürliche —	—	1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. f.
Triagonal —	—	1, 3, 6, 10, 15, 21 u. s. f.
Pyramidal —	—	1, 4, 10, 20, 35, 56 u. s. f.
Trigonal-pyramidal.	—	1, 5, 15, 35, 70, 126 u. s. f.

u. s. f.

Polygonalzahlen:

Differ. d. Reihe	Zahlen		
1	Trigonal	—	1, 3, 6, 10, 15 u. s. f.
2	Quadrat	—	1, 4, 9, 16, 25 u. s. f.
3	Pentagonal	—	1, 5, 12, 22, 35 u. s. f.
4	Hexagonal	—	1, 6, 15, 28, 45 u. s. f.

u. s. f.

Die Potenzen machen auch besondere Reihen von Zahlen aus. Die zwey ersten finden sich wieder in den figurirten Zahlen, und die 3te in den Polygonalzahlen; dieses wird man einsehen, indem für a in der hier unten stehenden Tafel nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. setzt.

Potenzenzahlen.

a^0	—	—	—	1, 1, 1, 1, 1, u. s. f.
a^1	—	—	—	1, 2, 3, 4, 5, u. s. f.
a^2	—	—	—	1, 4, 9, 16, 25 u. s. f.
a^3	—	—	—	1, 8, 27, 64, 125, u. s. f.
a^4	—	—	—	1, 16, 81, 256, 625, u. s. f.

u. s. f.

Die Algebraisten des 16ten und 17ten Jahrhunderts haben sich sehr viel mit diesen verschiedenen Arten von Zahlen und ihren Beziehungen unter einander beschäftiget; sie haben hierbey sonderbare Veränderungen und Eigenschaften entdeckt; aber da ihr Nutzen nicht sehr groß ist, so übergeht man mit Recht diese Art von Untersuchungen in den heutigen Lehrbüchern der Mathematik.

VI. Capitel.

Von den geometrischen Verhältnissen.

§. 440.

Das geometrische Verhältniß zwischen zwey Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie vielmal die eine Zahl größer sey als die andere? und es wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt, daher denn der Quotient die Benennung des Verhältnisses anzeigt.

§. 441.