Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

VI. Capitel. Von den geometrischen Verhältnissen.

Polygonalzahlen:

Differ. d. Reihe	Zahlen		
1	Triagonal	—	1, 3, 6, 10, 15 u. s. f.
2	Quadrat	—	1, 4, 9, 16, 25 u. s. f.
3	Pentagonal	—	1, 5, 12, 22, 35 u. s. f.
4	Hexagonal	—	1, 6, 15, 28, 45 u. s. f.

u. s. f.

Die Potenzen machen auch besondere Reihen von Zahlen aus. Die zwey ersten finden sich wieder in den figurirten Zahlen, und die 3te in den Polygonalzahlen; dieses wird man einsehen, indem für a in der hier unten stehenden Tafel nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. setzt.

Potenzenzahlen.

a^0	—	—	—	1, 1, 1, 1, 1, u. s. f.
a^1	—	—	—	1, 2, 3, 4, 5, u. s. f.
a^2	—	—	—	1, 4, 9, 16, 25 u. s. f.
a^3	—	—	—	1, 8, 27, 64, 125, u. s. f.
a^4	—	—	—	1, 16, 81, 256, 625, u. s. f.

u. s. f.

Die Algebraisten des 16ten und 17ten Jahrhunderts haben sich sehr viel mit diesen verschiedenen Arten von Zahlen und ihren Beziehungen unter einander beschäftiget; sie haben hierbey sonderbare Veränderungen und Eigenschaften entdeckt; aber da ihr Nutzen nicht sehr groß ist, so übergeht man mit Recht diese Art von Untersuchungen in den heutigen Lehrbüchern der Mathematik.

VI. Capitel.

Von den geometrischen Verhältnissen.

§. 440.

Das geometrische Verhältniß zwischen zwey Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie vielmal die eine Zahl größer sey als die andere? und es wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt, daher denn der Quotient die Benennung des Verhältnisses anzeigt.

§. 441.

§. 441.

Es ist daher bey einem geometrischen Verhältnisse dreyerley zu betrachten. Erstlich, die erste der beyden gegebenen Zahlen, welche der Vorsatz oder das Vorderglied genannt wird. Zweytens, die andere derselben, welche der Nachsatz oder das Hinterglied heißt. Drittens, die Benennung oder Exponent des Verhältnisses, welche gefunden wird, wenn man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt, z. B. wenn zwischen den Zahlen 18 und 12 das Verhältniß angezeigt werden soll, so ist 18 der Vorsatz, 12 der Nachsatz, und der Exponent des Verhältnisses wird $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$ seyn, woraus man erkennt, daß der Vorsatz 18 den Nachsatz 12, einmal und noch $\frac{1}{2}$ mal in sich begreift.

§. 442.

Um das geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einander stehender Puncte, die zwischen dem Vorsatz und Nachsatz gesetzt werden.

Also $a : b$ zeigt das Verhältniß zwischen a und b an, welches Zeichen, wie schon oben bemerkt worden, auch die Division anzuzeigen pflegt, und eben deswegen hier gebraucht wird, weil, um dieses Verhältniß zu erkennen, die Zahl a durch b getheilt werden muß. Dieses Zeichen wird mit Worten so ausgesprochen: a verhält sich zu b, oder schlechtweg a zu b.

§. 443.

Der Exponent oder Name eines solchen Verhältnisses wird daher durch einen Bruch vorgestellt, dessen Zähler der Vorsatz, der Nenner aber der Nachsatz ist. Um der Deutlichkeit willen aber muß man diesen Bruch immer auf seine kleinste Form bringen,

gen,

gen, welches geschieht, wenn man den Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler theilet, wie oben geschehen, da der Bruch $\frac{12}{18}$ auf $\frac{2}{3}$ gebracht ist, indem man den Zähler und Nenner durch 6 getheilt hat.

§. 444.

Die Verhältnisse sind also nur in so fern unterschieden, als ihr Exponent verschieden ist, und es giebt daher so viel verschiedene Arten von Verhältnissen, als verschiedene Exponenten gefunden werden können.

Die erste Art ist nun unstreitig, wenn der Exponent 1 wird; und dieses geschieht, wenn die beyden Zahlen gleich sind, als $3:3$, $4:4$, $a:a$, wovon der Exponent 1 wird, und deswegen heißt diese Art das Verhältniß der Gleichheit.

Hierauf folgen diejenigen, deren Exponent eine ganze Zahl wird, als $4:2$, wo der Exponent 2 ist. Ferner $12:4$, wo der Exponent 3 ist, und $24:6$, wo der Exponent 4 ist u. s. f.

Hernach kommen solche vor, deren Exponent durch Brüche ausgedrückt wird. Als $12:9$, dessen Exponent $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist, $18:27$, dessen Exponent $\frac{2}{3}$ ist u. s. f.

§. 445.

Es sey nun a der Vorsatz, b der Nachsatz und der Exponent d, so haben wir schon gesehen, daß, wenn a und b gegeben ist, daraus $d = \frac{a}{b}$ gefunden werde.

Ist aber der Nachsatz b nebst den Exponenten d gegeben, so findet man daraus den Vorsatz $a = bd$, weil bd durch b dividirt, d giebt; endlich wenn der Vorsatz a nebst den Exponenten d gegeben ist, so findet

findet man daraus den Nachsatz $b = \frac{a}{d}$. Denn wenn man den Vorsatz a durch diesen Nachsatz $\frac{a}{d}$ dividirt, so ist der Quotient d, das ist der Exponent.

§. 446.

Ein jedes Verhältniß $a : b$ bleibt unverändert, wenn man den Vorsatz und Nachsatz mit einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, weil der Exponent einerley bleibt. Denn wenn d der Exponent von $a : b$ ist, also daß $d = \frac{a}{b}$, so ist auch von diesem Verhältniß $na : nb$ der Exponent $\frac{a}{b} = d$; und von diesem Verhältniß $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ ist der Exponent gleichfalls $\frac{a}{b} = d$.

§. 447.

Wenn der Exponent in die kleinste Form gebracht worden, so läßt sich daraus das Verhältniß deutlich erkennen und mit Worten ausdrücken. Nemlich wenn der Exponent auf diesen Bruch $\frac{p}{q}$ gebracht worden, so sagt man $a : b = p : q$, das ist mit Worten: a zu b wie p zu q. Also da von diesem Verhältniß $6 : 3$ der Exponent $\frac{2}{1}$ oder 2 ist, so hat man $6 : 3 = 2 : 1$. Eben so sagt man $18 : 12 = 3 : 2$ und $24 : 18 = 4 : 3$ und ferner $30 : 45 = 2 : 3$. Läßt sich aber der Exponent nicht abkürzen, so wird auch das Verhältniß nicht deutlicher; denn wenn man $9 : 7 = 9 : 7$ sagt, so wird es nicht begreiflicher.

§. 448.

Wenn sich aber der Exponent auf sehr kleine Zahlen bringen läßt, so erhält man eine deutliche Erkenntniß von einem Verhältniß zwischen zwey sehr großen Zahlen. Also wenn man 288 : 144 = 2 : 1 sagt, so ist die Sache ganz deutlich, und wenn man fragt, wie sich 105 : 70 verhalte, so antwortet man, wie 3 : 2. Fragt man weiter, wie sich 576 : 252 verhalte, so antwortet man, wie 16 : 7.

§. 449.

Um also ein jedes Verhältniß auf das deutlichste darzustellen, so muß man den Exponenten desselben auf die kleinsten Zahlen zu bringen suchen, welches auf einmal geschehen kann, wenn die beyden Glieder des Verhältnisses durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt werden. Also wird das Verhältniß 576 : 252 auf einmal zu diesem 16 : 7 gebracht, wenn man die beyden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeinschaftlicher Theiler ist, dividirt.

§. 450.

Weil es nun hauptsächlich darauf ankommt, daß man von zwey gegebenen Zahlen ihren größten gemeinschaftlichen Theiler zu finden wisse, so soll dazu in dem folgenden Capitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

VII. Capitel.

Von dem größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer gegebenen Zahlen.

§. 451.

Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wenn Zähler und Nenner eines Bruchs so beschaffen sind, so läßt sich derselbe auch in keine kleinere Form bringen.

Also