Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

VII. Capitel. Von dem größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer gegebenen Zahlen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

großen Zahlen. Also wenn man 288 : 144 = 2 : 1 sagt, so ist die Sache ganz deutlich, und wenn man fragt, wie sich 105 : 70 verhalte, so antwortet man, wie 3 : 2. Fragt man weiter, wie sich 576 : 252 verhalte, so antwortet man, wie 16 : 7.

§. 449.

Um also ein jedes Verhältniß auf das deutlichste darzustellen, so muß man den Exponenten desselben auf die kleinsten Zahlen zu bringen suchen, welches auf einmal geschehen kann, wenn die beyden Glieder des Verhältnisses durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt werden. Also wird das Verhältniß 576 : 252 auf einmal zu diesem 16 : 7 gebracht, wenn man die beyden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeinschaftlicher Theiler ist, dividirt.

§. 450.

Weil es nun hauptsächlich darauf ankommt, daß man von zwey gegebenen Zahlen ihren größten gemeinschaftlichen Theiler zu finden wisse, so soll dazu in dem folgenden Capitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

VII. Capitel.

Von dem größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer gegebenen Zahlen.

§. 451.

Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wenn Zähler und Nenner eines Bruchs so beschaffen sind, so läßt sich derselbe auch in keine kleinere Form bringen.

Also

Also sieht man, daß diese beyden Zahlen 48 und 35 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ungeachtet eine jede für sich ihre besondern Theiler hat. Deswegen kann auch das Verhältniß 48 : 35 nicht in kleinern Zahlen ausgedrückt werden, denn ob gleich sich beyde durch 1 theilen lassen, so werden doch dadurch die Zahlen nicht kleiner.

§. 452.

Wenn aber die Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so wird derselbe, und so gar der größte gemeinschaftliche Theiler durch folgende Regel gefunden:

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, durch den übrig bleibenden Rest dividire man ferner den vorhergehenden Divisor, durch den hier übrig bleibenden Rest dividire man wieder den letzt vorhergehenden Divisor, und auf solche Art verfahre man so lange, bis die Division aufgeht; da denn der letzte Divisor der größte gemeinschaftliche Theiler der beyden gegebenen Zahlen seyn wird.

Diese Untersuchung wird für die gegebenen Zahlen 576 und 252 also zu stehen kommen.

```
252|576|2
   |504|
   -----
     72|252|3
       |216|
       -----
         36|72|2
           |72|
           ----
             0
```

Hier ist also der größte gemeinschaftliche Theiler 36.

§. 453.

Es wird dienlich seyn, diese Regel durch einige

Beyspiele zu erläutern. Man suche daher den größten gemeinschaftlichen Theiler zwischen den Zahlen 504 und 312.

312	504	1
	312	
192	312	1
	192	
120	192	1
	120	
72	120	1
	72	
48	72	1
	48	
24	48	2
	48	
	0	

Also ist 24 der größte gemeinschaftliche Theiler, und deswegen läßt sich das Verhältniß 504 : 312 auf die bequemere Form 21 : 13 bringen.

§. 454.

Es seyen ferner diese zwey Zahlen 625 und 529 gegeben, für welche der größte gemeinschaftliche Theiler gesucht werden soll:

529	625	1
	529	
96	529	5
	480	
49	96	1
	49	
47	49	1
	47	
2	47	23
	46	
1	2	2
	2	
	0	

Hier

Hier ist also der größte gemeinschaftliche Theiler 1, und deswegen läßt sich das Verhältniß 625 : 529 auf keine leichtere Form bringen; oder dasselbe läßt sich durch keine kleinere Zahlen ausdrücken.

§. 455.

Es ist nun noch nöthig, den Beweis von dieser Regel zu geben. Es sey a die größere und b die kleinere der gegebenen Zahlen, d aber ein gemeinschaftlicher Theiler derselben. Da sich nun so wohl a als b durch d theilen lassen, so wird sich auch $a - b$ dadurch theilen, auch $a - 2b$ und $a - 3b$, und überhaupt $a - nb$.

Wenn a und b das gemeinschaftliche Maaß d haben, so ist $\frac{a \pm b}{d} = \frac{a}{d} \pm \frac{b}{d}$ auch eine ganze Zahl, weil die Summe oder Differenz zweyer ganzen Zahlen offenbar eine ganze Zahl seyn muß, daher ist $a \pm b$ auch durch d theilbar. Eben so schließt man, daß, da $a \pm b$ und b durch d theilbar ist, so muß es auch $a \pm b \pm b = a \pm 2b$ seyn u. s. f.

§. 456.

Dieses ist auch rückwärts wahr, und wenn die Zahlen b und $a - nb$ sich durch d theilen lassen, so muß sich auch die Zahl a dadurch theilen lassen. Denn da sich nb theilen läßt, so würde sich $a - nb$ nicht theilen lassen, wenn sich nicht auch a theilen ließe.

Es sey $\frac{nb}{d}$ = der ganzen Zahl q, so ist $\frac{a \pm nb}{d} = \frac{a}{d} \pm \frac{nb}{d} = \frac{a}{d} \pm q = p$, wo p ebenfalls eine ganze Zahl bedeutet, also muß $\frac{a}{d} = p \mp q$ seyn. Da nun p und q ganze Zahlen sind, so ist auch ihre Summe und ihre Differenz eine ganze Zahl, daher auch $\frac{a}{d}$ eine ganze Zahl seyn muß.

§. 457.

Ferner ist zu merken, daß, wenn d der größte gemeinschaftliche Theiler der beyden Zahlen b und a — nb ist, derselbe auch der größte gemeinschaftliche Theiler der Zahlen a und b seyn werde. Denn wenn für diese Zahlen a und b noch ein größerer gemeinschaftlicher Theiler als d statt fände, so würde derselbe auch ein gemeinschaftlicher Theiler von b und a — nb, folglich d nicht der größte seyn. Nun aber ist d der größte gemeinschaftliche Theiler von b und a — nb, also muß auch d der größte gemeinschaftliche Theiler von a und b seyn.

§. 458.

Diese drey Sätze vorausgesetzt, wollen wir nun die größere Zahl a durch die kleinere b, wie die Regel befiehlt, theilen, und für den Quotienten n annehmen, so erhält man den Rest a — nb, welcher immer kleiner ist als b. Da nun dieser Rest a — nb mit dem Divisor b eben denselben größten gemeinschaftlichen Theiler hat, als die gegebenen Zahlen a und b, so theile man den vorigen Divisor b durch diesen Rest a — nb, und da wird ebenfalls der herauskommende Rest mit dem nächst vorhergehenden Divisor eben denselben größten gemeinschaftlichen Theiler haben, und so immer weiter.

§. 459.

Man fährt aber auf diese Art fort, bis man auf eine solche Division kommt, welche aufgeht oder wo kein Rest übrig bleibt. Es sey daher p der letzte Divisor, welcher gerade etliche mal in seinem Dividendus

dendus enthalten ist, daher der Dividendus durch p theilbar seyn, folglich diese Form mp haben wird. Diese Zahlen nun p und mp lassen sich beyde durch p theilen, und haben ganz gewiß keinen größern gemeinschaftlichen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine größere, als sie selbst ist, theilen läßt. Daher ist auch der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorgeschriebenen Regel ist.

§. 460.

Wir wollen noch ein Exempel hersetzen und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinschaftlichen Theiler suchen, da dann die Rechnung folgende seyn wird:

1728 | 2304 | 1
| 1728 |

576 | 1728 | 3
| 1728 |

0

Also ist 576 der größte gemeinschaftliche Theiler, und das Verhältniß 1728 : 2304 wird auf dieses gebracht 3 : 4; folglich verhält sich 1728 : 2304 eben so wie 3 : 4.

VIII. Capitel.

Von den geometrischen Proportionen.

§. 461.

Zwey geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie beyde einerley Exponenten haben, und die Gleichheit zweyer solcher Verhältnisse wird eine geo-