Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

VIII. Capitel. Von den geometrischen Proportionen.

dendus enthalten ist, daher der Dividendus durch p theilbar seyn, folglich diese Form mp haben wird. Diese Zahlen nun p und mp lassen sich beyde durch p theilen, und haben ganz gewiß keinen größern gemeinschaftlichen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine größere, als sie selbst ist, theilen läßt. Daher ist auch der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorgeschriebenen Regel ist.

§. 460.

Wir wollen noch ein Exempel hersetzen und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinschaftlichen Theiler suchen, da dann die Rechnung folgende seyn wird:

```
1728|2304|1
    |1728|
    ------
      576|1728|3
         |1728|
         ------
             0
```

Also ist 576 der größte gemeinschaftliche Theiler, und das Verhältniß 1728 : 2304 wird auf dieses gebracht 3 : 4; folglich verhält sich 1728 : 2304 eben so wie 3 : 4.

VIII. Capitel.

Von den geometrischen Proportionen.

§. 461.

Zwey geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie beyde einerley Exponenten haben, und die Gleichheit zweyer solcher Verhältnisse wird eine geometrische Proportion genannt, und auf folgende Art geschrieben: $a : b = c : d$, mit Worten aber wird dieselbe also ausgesprochen: a verhält sich zu b wie sich c verhält zu d, oder a zu b wie c zu d. Ein Beyspiel einer solchen Proportion ist nun $8 : 4 = 12 : 6$. Denn von dem Verhältniß $8 : 4$ ist der Exponent 2, und eben diesen Exponenten hat auch das Verhältniß $12 : 6$.

§. 462.

Wenn also $a : b = c : d$ eine geometrische Proportion ist, so müssen die Exponenten auf beyden Seiten gleich, und folglich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ seyn; und umgekehrt, wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist $a : b = c : d$.

§. 463.

Eine geometrische Proportion besteht daher aus vier Gliedern, welche also beschaffen sind, daß das erste durch das zweyte dividirt eben so viel giebt, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folgt eine sehr wichtige Haupteigenschaft aller geometrischen Proportionen, welche darin besteht: daß das Product aus dem ersten und vierten Gliede immer eben so groß ist, als das Product aus dem zweyten und dritten. Oder kürzer: das Product der äußern Glieder ist dem Product der mittlern Gliedern gleich.

§. 464.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, so sey $a : b = c : d$ eine geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Man multiplicire einen jeden dieser Brüche mit b,

so

so bekommt man $a = \frac{bc}{d}$; man multiplicire ferner auf beyden Seiten mit d, so bekommt man $ad = bc$. Nun aber ist ad das Product der äußern Glieder und bc das Product der mittlern, welche beyde Producte, folglich einander gleich sind.

§. 465.

Wenn umgekehrt vier Zahlen a, b, c, d, so beschaffen sind, daß das Product der äußern ad dem Product der mittlern bc gleich ist, so stehen dieselben in einer geometrischen Proportion. Denn da $ad = bc$, so dividire man beyderseits durch bd, und man bekommt $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; daher wird $a : b = c : d$.

§. 466.

Die vier Glieder einer geometrischen Proportion als $a : b = c : d$ können auf verschiedene Arten versetzt werden, so daß die Proportion bleibt. Es kommt nemlich nur darauf an, daß das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich bleibe, oder daß $ad = bc$. Also wird man haben, erstlich $b : a = d : c$, zweytens $a : c = b : d$, drittens $d : b = c : a$, viertens $d : c = b : a$.

§. 467.

Außer diesen lassen sich auch noch viele andere Proportionen aus einer gegebenen Proportion herleiten. Denn wenn $a : b = c : d$, so ist erstlich $a + b : a$ oder das erste + dem andern zum ersten, wie $c + d : c$, oder das dritte + dem vierten zum dritten, nemlich $a + b : a = c + d : c$, oder auch $a + b : b = c + d : d$. Denn in der ersten Proportion ist das Product aus den äußern Gliedern $ac + bc$, und das Product aus den mittlern $ac + ad$. Da nun aus der angenommenen Grundproportion $a : b$

$= c : d$ die Gleichheit der Producte bc und ad fließt, so erhellet auch hieraus die Gleichheit der Producte $ac + bc$ und $ac + ad$; folglich die Richtigkeit der Proportion $a + b : a = c + d : c$ (§. 465). Auf eine ähnliche Art kann man sich auch von der Richtigkeit der letztern Proportion $a + b : b = c + d : d$ überzeugen, weil die äußern Glieder in einander multiplicirt eben so viel geben, als das Product aus den mittlern Gliedern.

Hernach ist auch das erste — dem andern zum ersten, wie das dritte — dem vierten zum dritten; oder $a - b : a = c - d : c$.

Denn nimmt man die Producte der äußern und mittlern Glieder, so ist offenbar $ac - bc = ac - ad$, weil $ad = bc$. Ferner wird auch $a - b : b = c - d : d$, weil $ad - bd = bc - bd$ und $ad = bc$ ist

§. 468.

Alle Proportionen, die sich aus der Proportion $a : b = c : d$ herleiten lassen, können folgendergestalt auf eine allgemeine Art vorgestellt werden:

$$ma + nb : pa + qb = mc + nd : pc + qd.$$

Denn das Product der äußern Glieder ist

$$mpac + npbc + mqad + nqbd,$$

und weil $ad = bc$, so wird dasselbe

$$mpac + npbc + mqbc + nqbd.$$

Das Product der mittlern Glieder aber ist

$$mpac + mqbc + npad + nqbd,$$

und weil $ad = bc$, so wird dasselbe

$$mpac + mqbc + npbc + nqbd,$$

welches mit jenem einerley ist.

Zusatz. Wenn $m = q = 1$ und $n = p = 0$, so wird aus obiger Proportion folgende:

$$a : b = c : d.$$

Wenn $m = n = q = 1$ und $p = 0$, so entstehet folgende Proportion:

$$a + b : b = c + d : d.$$

So

So würde man alle besondere Proportionen aus jener allgemeinen ableiten können, wobey man merken muß, daß hier das Zeichen + weiter nichts als Hinzufügung der Größen bedeuten soll, übrigens können allerdings diese hinzugefügten Größen negativ seyn, so daß in diesem letzten Fall die Proportion $a+b:b = c+d:d$ in folgende verwandelt: $a-b:b=c-d:d$ werden kann.

§. 469.

Also kann man aus einer gegebenen Proportion, als z. B. $6:3 = 10:5$, unendlich viel andere herleiten, wovon wir nur einige hersetzen wollen:

1) $3:6=5:10$.

2) $6:10=3:5$.

3) $(3+6):6=(5+10):10$ oder $9:6=15:10$, folgt aus No. 1.

4) $(6-3):3=(10-5):5$ oder $3:3=5:5$, folgt aus $6:3=10:5$.

5) $(3+6):3=(5+10):5$ oder $9:3=15:5$, folgt aus $6:3=10:5$.

6) $9:15=3:5$, folgt aus No. 5.

§. 470.

Da in einer geometrischen Proportion das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich ist, so kann man, wenn die drey ersten Glieder bekannt sind, aus denselben das vierte finden. Es seyen die drey ersten Glieder $24:15=40$ zu ... Denn da hier das Product der mittlern 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten, das ist mit 24 multiplicirt, auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und da wird der Quotient das gesuchte vierte Glied 25 geben. Daher ist die Proportion $24:15=40:25$. Und wenn allgemein die drey ersten Glieder $a:b=c:\ ...$ sind, so setze man für das unbekannte vierte Glied den Buchstaben d, und da $ad=bc$ seyn muß, so dividire man

beyder-

beyderseits durch a und man wird $d = \frac{bc}{a}$ bekommen; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$; woraus sich die allgemeine Regel herleiten läßt, daß man die vierte geometrische Proportionalzahl findet, wenn man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt und das Product durch das erste Glied dividirt.

§. 471.

Hierauf beruhet nun der Grund der in allen Rechenbüchern so berühmten Regeldetri, weil darin aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer geometrischen Proportion stehet, also daß sich die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten.

§. 472.

Hierbey sind noch einige besondere Umstände zu bemerken, als: wenn zwey Proportionen einerley erstes und drittes Glied haben, wie in diesen $a : b = c : d$ und $a : f = c : g$, so werden auch die zweyten den vierten proportional seyn, es wird sich nemlich verhalten $b : d = f : g$; denn da aus der ersten $a : c = b : d$, und aus der andern $a : c = f : g$ folgt, so sind die Verhältnisse $b : d$ und $f : g$ einander gleich, weil ein jedes dem Verhältnisse $a : c$ gleich ist. Also da $5 : 100 = 2 : 40$ und $5 : 15 = 2 : 6$, so folgt daraus, daß $100 : 40 = 15 : 6$.

§. 473.

Wenn aber zwey Proportionen so beschaffen sind, daß sich einerley mittlere Glieder darin befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten, wie die vierten. Wenn nemlich $a : b = c : d$ und

$f : b =$

$f : b = c : g$, so wird daraus $a : f = g : d$ folgen. Es sey z. B. diese Proportion gegeben: $24 : 8 = 9 : 3$ und $6 : 8 = 9 : 12$, so wird daraus folgen $24 : 6 = 12 : 3$. Der Grund davon ist offenbar; denn die erste giebt $ad = bc$ und die zweyte $fg = bc$, folglich wird $ad = fg$, und $a : f = g : d$, oder $a : g = f : d$.

§. 474.

Aus zwey gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wenn man die ersten und die zweyten, die dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen $a : b = c : d$ und $e : f = g : h$ entstehet durch die Zusammensetzung diese: $ae : bf = cg : dh$. Denn nach der ersten Proportion ist $ad = bc$ und aus der zweyten folgt $eh = fg$, also wird auch $adeh = bcfg$ seyn. Nun aber ist $adeh$ das Product der äußern, und $bcfg$ das Product der mittlern Glieder in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

§. 475.

Es seyen z. B. diese zwey Proportionen gegeben: $6 : 4 = 15 : 10$ und $9 : 12 = 15 : 20$, so giebt die Zusammensetzung derselben folgende Proportion:

$6.9 : 4.12 = 15.15 : 10.20$,

das ist $54 : 48 = 225 : 200$,

oder $9 : 8 = 9 : 8$.

§. 476.

Zuletzt ist hier noch zu merken, daß, wenn zwey Producte einander gleich sind, als $ad = bc$, daraus wieder eine geometrische Proportion gebildet werden kann. Es verhält sich nemlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweyten, wie der andere Factor des zweyten zum andern des ersten.

Es wird daher a : c = b : d seyn. Da z. B. 3. 8 = 4. 6, so folgt daraus diese Proportion: 8 : 4 = 6 : 3 oder 3 : 4 = 6 : 8, und da 3. 5 = 1. 15, so bekommt man 3 : 15 = 1 : 5 oder 5 : 1 = 15 : 3 oder 3 : 1 = 15 : 5.

IX. Capitel.

Anmerkungen über den Nutzen der Proportionen.

§. 477.

Diese Lehre ist in dem gemeinen Leben und im Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann. Die Preise und Waaren sind einander immer proportional und bey den verschiedenen Geldsorten kommt alles darauf an, ihre Verhältnisse zu einander zu bestimmen. Dieses wird dazu dienen, daß die vorgetragene Lehre besser erläutert und zum Nutzen angewendet werden kann.

§. 478.

Will man das Verhältniß zwischen zwey Münzsorten, z. B. zwischen einem Louisd'or und einem Ducaten erforschen, so muß man sehen, wie viel diese Stücke nach einerley Münzsorte gelten. Ein Louisd'or gilt in Conventionsgelde 5 Thaler, nnd ein Ducaten 2 Thaler 20 Groschen, d. i. $2\frac{5}{6}$ Thaler. Hieraus erhellt folgende Proportion:

1 Louisd'or : 1 Ducaten = 5 Thl. : $2\frac{5}{6}$ Thl.

Wenn man nun, um den Bruch wegzuschaffen, die letzten beyden Glieder dieser Proportion mit 6 multiplicirt, so erhält man:

1 Louis-