Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

X. Capitel. Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

machen 26 Fl. holl.) Wenn nun Agio di B° in Amsterdam 5 p. C. (das ist 105 Cour. macht 100 B°) und der Wechselcours von Leipzig nach Amsterdam in B° $133\frac{1}{4}$ p. C. (das ist für 100 Thl. zahlt man in Leipzig $133\frac{1}{4}$ Thl.). Endlich 2 Thl. holl. 5 Fl. holl. thun, wie viel sind nach diesen Coursen für solche 1000 Ducaten in Leipzig an sächsischen Gelde zu bezahlen.

		~~5~~, ~~1000~~ Duc.
Duc. ~~5~~	:	26 Fl. holl. Cour.
~~105~~, 21	:	4, ~~20~~, ~~100~~ Fl. holl. B°
~~5~~	:	~~2~~ Thl. holl. B°
~~400~~, ~~2~~	:	533 Thl. in Leipzig
21	:	3) 55432 (1
		7) 18477 (4
		2639

Antwort: $2639\frac{13}{21}$ Thl.
oder 2639 Thl. 15 gute Grsch.

X. Capitel.

Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

§. 488.

Zwey oder mehr Verhältnisse werden zusammengesetzt, wenn man sowohl die Vordersätze als die Hintersätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdann sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beyden Producten aus den zwey oder mehr gegebenen Verhältnissen zusammengesetzt sey.

Z. B.

Z. B. aus den Verhältnissen a : b, c : d, e : f entsteht durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß: ace : bdf.

§. 489.

Da ein Verhältniß einerley bleibt, wenn man seine beyden Glieder durch einerley Zahl dividirt oder abkürzt, so kann man die obige Zusammensetzung sehr erleichtern, wenn man die Vordersätze gegen die Hintersätze aufhebt oder abkürzt, wie schon im vorigen Capitel geschehen ist.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnissen wird das daraus zusammengesetzte solcher Gestalt gefunden.

Die gegebenen Verhältnisse sind:

12 : 25, 28 : 33 und 55 : 56

$$\begin{array}{lcr}
\cancel{12},\ \cancel{4},\ 2 & : & 5\ \cancel{25} \\
\cancel{28} & : & \cancel{3},\ \cancel{33} \\
\cancel{55},\ \cancel{5} & : & \cancel{2},\ \cancel{56} \\
\hline
2 & : & 5
\end{array}$$

Also erhält man durch die Zusammensetzung das Verhältniß 2 : 5.

§. 490.

Eben dieses findet auch auf eine allgemeine Art bey den Buchstaben statt; und es ist besonders der Fall merkwürdig, wo immer ein Vordersatz dem vorigen Hintersatz gleich ist. Also wenn die gegebenen Verhältnisse sind:

$$\begin{array}{c}
a : b \\
b : c \\
c : d \\
d : e \\
e : a \\
\hline
\end{array}$$

so ist das zusammengesetzte Verhältniß wie 1 : 1.

§. 491.

Um den Nutzen dieser Lehre zu zeigen, so bemerke man, daß zwey viereckige Felder unter sich ein Verhältniß haben, welches aus den Verhältnissen ihrer Längen und ihrer Breiten zusammengesetzt ist.

Es heißen z. B. zwey solche Felder A und B. Von jenem sey die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Von diesem sey die Länge 360 Fuß und die Breite 100 Fuß, so ist das Verhältniß der Länge wie 500 : 360 und der Breite wie 60 : 100.

$$\begin{array}{ccc} \cancel{500}\ 5 & : & 6,\ \cancel{360} \\ \underline{\cancel{60}} & \underline{:} & \underline{\cancel{100}} \\ 5 & : & 6. \end{array}$$

Also verhält sich das Feld A zu dem Felde B wie 5 zu 6.

§. 492.

Ein anderes Beyspiel. Das Feld A sey 720 Fuß lang und 88 Fuß breit; das Feld B aber sey 660 Fuß lang und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwey Verhältnisse zusammensetzen:

$$\begin{array}{lccc} \text{Verhältniß der Längen} & \cancel{720},\ \cancel{8} & : & 15,\ \cancel{60},\ \cancel{660} \\ \text{Verhältniß der Breiten} & \underline{\cancel{88}\ \cancel{8},2} & \underline{:} & \underline{\cancel{90}} \\ & 16 & : & 15 \end{array}$$

Und dieses ist das Verhältniß der Felder A und B.

§. 493.

Um ferner den Raum oder Inhalt zweyer Zimmer gegen einander zu vergleichen, so ist bekannt, daß ihr Verhältniß aus dreyen zusammengesetzt ist, nemlich aus dem Verhältniß der Länge, der Breite und der Höhe. Es sey z. B. ein Zimmer A, dessen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß und die Höhe = 14 Fuß. Von einem andern Zimmer B aber sey die Länge = 42 Fuß, die Breite = 24 Fuß und die Höhe = 10 Fuß, so sind die drey Verhältnisse:

der

der Länge	$\cancel{36}, \cancel{6}, \cancel{3}$	:	$\cancel{42}, \cancel{6}$
der Breite	$\cancel{16}, 2,$	:	$\cancel{24}, \cancel{3}$
der Höhe	$\cancel{14}, 2,$	:	$\cancel{10}, 5$
	4	:	5

Also verhält sich der Inhalt des Zimmers A zu dem Inhalt des Zimmers B wie 4 zu 5.

§. 494.

Wenn die Verhältnisse, welche man auf diese Art zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen ~~hen~~ daraus *vervielfältigte Verhältnisse.* Nemlich aus zwey gleichen entsteht ein *doppeltes* oder *quadratisches Verhältniß*; aus drey gleichen ein *dreyfaches* oder *cubisches* u. s. f. Also aus den Verhältnissen a : b und a : b ist das zusammengesetzte Verhältniß $a^2 : b^2$; daher sagt man, die Quadrate stehen in einem doppelten Verhältniß ihrer Seiten. Und aus dem Verhältniß a : b dreymal gesetzt, entsteht das Verhältniß $a^3 : b^3$, daher sagt man, daß die Cubi ein dreyfaches Verhältniß ihrer Seiten haben.

§. 495.

In der Geometrie wird gezeigt, daß zwey kreisrunde Plätze in dem doppelten Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen, d. h. daß sie sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten.

Es sey ein solcher Platz A, dessen Durchmesser = 45 Fuß; der Durchmesser eines andern cirkelrunden Platzes B aber sey = 30 Fuß, so wird sich jener Platz zu diesem wie 45. 45 zu 30. 30 verhalten, oder ihr Verhältniß ist aus folgenden zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt:

$\cancel{45}, \cancel{9}, 3$	:	$\cancel{30}, \cancel{6}, 2$
$\cancel{45}, \cancel{9}, 3$	:	$\cancel{30}, \cancel{6}, 2$
9	:	4

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

§. 496.

Ferner wird auch in der Geometrie bewiesen, daß sich die Inhalte zweyer Kugeln, wie die Cubiczahlen ihrer Durchmesser verhalten. Wenn also der Durchmesser einer Kugel A ein Fuß, und einer andern Kugel B zwey Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel A sich zum Inhalt der Kugel B wie $1^3 : 2^3$ oder wie $1 : 8$ verhalten.

Wenn also diese Kugeln aus einerley Materie bestehen, so wird die Kugel B achtmal mehr wiegen, als die Kugel A.

§. 497.

Hieraus kann man das Gewicht der Kanonenkugeln aus ihren Durchmessern finden, wenn man nur von einer das Gewicht hat. Es sey z. B. das Gewicht einer Kugel A, 5 Pfund und ihr Durchmesser = 2 Zoll; man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel B, deren Durchmesser = 8 Zoll ist. Hier hat man nun diese Proportion $2^3 : 8^3 = 5 : x$. Das Gewicht x, d. i. der Kugel B, beträgt also 320 ℔. Von einer andern Kugel C aber, deren Durchmesser = 15 Zoll, wird das Gewicht gefunden:

$2^3 : 15^3 = 5 : x$. Antwort: $2109\frac{3}{8}$ ℔ $= x$.

§. 498.

Sucht man das Verhältniß zweyer Brüche, als $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, so kann dasselbe immer durch ganze Zahlen ausgedrückt werden; denn man darf nur beyde Brüche mit bd multipliciren, so kommt dieses Verhältniß $ad : bc$ heraus, welches jenem gleich ist, daher entsteht folgende Proportion $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Läßt sich nun ad gegen bc noch abkürzen, so wird das Verhältniß noch leichter. Also $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15 . 36 : 24 . 25 = 9 : 10$.

§. 499.

Es wird ferner gefragt, wie sich diese Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gegen einander verhalten; hier ist sogleich erwiesen, daß sich $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ wie $b : a$ verhält, welches mit Worten also ausgesprochen wird: daß sich zwey Brüche, deren Zähler 1 ist, unter sich umgekehrt, wie ihre Nenner verhalten. Dieses gilt auch von zweyen Brüchen, welche gleiche Zähler haben. Denn da $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, so verhalten sie sich gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwey Brüche gleiche Nenner, als $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zähler, nemlich wie $a : b$. Also ist $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$ und $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ oder $2 : 3$.

§. 500.

Bey dem freyen Fall der Körper bemerkt man, daß in einer Secunde ein Körper 15 par. Fuß tief herab falle, in zwey Secunden aber falle er durch eine Höhe von 60 Fuß, und in drey Secunden 135 Fuß, daraus hat man nun geschlossen, daß sich die Höhen verhalten, wie die Quadrate der Zeiten; und also auch rückwärts die Zeiten, wie die Quadratwurzeln aus den Höhen.

Fragt man nun, wie viel Zeit ein Stein brauche, um aus einer Höhe von 2160 Fuß herunter zu fallen, so ist $15 : 2160 = 1$: Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst $= \sqrt{144} = 12$ Secunden.

§. 501.

Man fragt ferner, wie tief ein Stein in einer Stunde herunter fallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Man sagt also: wie die Quadrate der Zeiten, das ist wie $1^2 : 3600^2$, also verhält sich die gegebene Höhe = 15 Fuß zu der gesuchten Höhe

$$1 : 12960000 = 15 \text{ zu } \ldots$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 64800000 \\ 1296 \\ \hline 194400000 \end{array}$$

Antwort: 194400000 Fuß.

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine deutsche Meile, so wird diese Höhe 8100 Meilen seyn, welche Höhe größer ist als viermal die ganze Dicke der Erde.

§. 502.

Eine gleiche Bewandniß hat es mit dem Preis der Edelsteine, welcher sich nicht nach ihrem Gewicht selbst, sondern nach einem größern Verhältniß richtet. Bey den Diamanten gilt diese Regel: der Preis verhält sich, wie das Quadrat des Gewichts, oder das Verhältniß der Preise ist dem doppelten Verhältnisse des Gewichts gleich. Sie werden nun nach einem Gewicht, welches ein Karath genannt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wenn nun ein Diamant von einem Karath zwey Thlr. gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so vielmal mehr gelten, als das Quadrat von 100 größer ist, wie das Quadrat von 1. Also muß die Regeldetri so gesetzt werden:

$$1^2 : 100^2 = 2 \text{ Thlr.} \ldots$$

oder $1 : 10000 = 2$ Thlr. zu ... Antwort 20000 Th.

In Portugal befindet sich ein Diamant von 1680 Karath, dessen Preiß daher also gefunden wird:

$$1^2 : 1680^2 = 2 \text{ Thlr.} : \text{— oder}$$

$1 : 2822400 = 2 : \ldots$ Antwort 5644800 Thlr.

§. 503.

§. 503.

Von zusammengesetzten Verhältnissen geben die Posten ein merkwürdiges Beispiel, weil das Postgeld nach einem zusammengesetzten Verhältnisse der Zahl der Pferde, und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wenn also für ein Pferd auf eine Meile 8 Gr. oder $\frac{1}{3}$ Thlr. bezahlt wird, und man wissen will, wie viel für 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden soll? so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist 1 : 28, darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen 2 : 9, und setzt die zwey Verhältnisse zusammen 2 : 252, oder kürzer 1 : 126 $= \frac{1}{3}$ zu . . . Antwort 42 Thlr.

Wenn man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie viel kosten 30 Pferde auf 4 Meilen? Hier kommt die Rechnung also zu stehen:

$$\begin{array}{ccl} \cancel{8}, \cancel{2} & : & \cancel{30}, \cancel{15}, 5 \\ \cancel{3} & : & \cancel{4} \\ \hline 1 & : & 5 = \text{Ducaten} : \ldots \end{array}$$

Daher ist die Bezahlung 5 Ducaten.

§. 504.

Auch bey Arbeitern kommt diese Zusammensetzung der Verhältnisse vor, da die Bezahlung nach dem zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter, und der Zahl der Tage geschehen muß.

Wenn also z. B. einem Maurer täglich 10 Gr. gegeben wird und man will wissen, wie viel an 24 Maurer, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden soll? so steht die Rechnung also:

1 : 24
1 : 50
―――――――
1 : 1200 = 10 Gr. : 500 Thlr.
        10
―――――――
  12000 Gr.
3)―――――――
    4000
8)―――――――
    500 Thlr.

Weil in dergleichen Beispielen fünf Sätze gegeben sind, so wird in den Rechenbüchern die Art, dieselben zu berechnen, die Regelquinque genannt.

XI. Capitel.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine geometrische Progression genannt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben geometrischen Verhältnisse steht, und die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende, heißt der Nenner oder der Exponent; wenn also das erste Glied 1 ist und der Nenner = 2, so ist die geometrische Progression folgende:

Glieder	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Prog.	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 u.s.f.

(Es sind hier die Anzeiger darüber gesetzt, um anzuzeigen, das wievielste Glied ein jedes sey.)

§. 506.