Universitätsbibliothek Paderborn

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XI. Capitel. Von den geometrischen Progressionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

Visual Library

1 : 24
1 : 50
1 : 1200 = 10 Gr. : 500 Thlr.
10
12000 Gr.
3) 4000
8) 500 Thlr.

Weil in dergleichen Beispielen fünf Sätze gegeben sind, so wird in den Rechenbüchern die Art, dieselben zu berechnen, die Regelquinque genannt.

XI. Capitel.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine geometrische Progression genannt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben geometrischen Verhältnisse steht, und die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende, heißt der Nenner oder der Exponent; wenn also das erste Glied 1 ist und der Nenner = 2, so ist die geometrische Progression folgende:

Glieder 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Prog. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 u. s. f.

(Es sind hier die Anzeiger darüber gesetzt, um anzuzeigen, das wievielste Glied ein jedes sey.)

§. 506.

Wenn man überhaupt das erste Glied = a und den Nenner = b setzt, so kommt die geometrische Progression also zu stehen:

$$\begin{array}{lcccccccccc} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8. & \ldots & n \\ \text{Prog.} & a, & ab, & ab^2, & ab^3, & ab^4, & ab^5, & ab^6, & ab^7, & \ldots & ab^{n-1} \end{array}$$

Wenn also diese Progression aus n Gliedern besteht, so ist das letzte = ab^{n-1}. Hier ist zu merken, wenn der Nenner b größer ist als 1, daß die Glieder immer größer werden, ist aber der Nenner b = 1, so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner b kleiner als 1, oder ein Bruch, so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wenn a = 1 und b = $\frac{1}{2}$, so bekommt man diese geometrische Progression:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{32}, \tfrac{1}{64}, \tfrac{1}{128} \text{ u. s. f.}$$

§. 507.

Hierbey ist noch folgendes zu betrachten:

I.) das erste Glied, welches hier a genannt wird,
II.) der Nenner, welcher hier b genannt wird,
III.) die Anzahl der Glieder, welche = n gesetzt worden,
IV.) das letzte Glied, welches gefunden worden = ab^{n-1}.

Daher wenn die drey ersten Stücke gegeben sind, so wird das letzte Glied leicht nach folgender Regel außer der Reihe gefunden: man erhebt den Nenner zu einer Dignität, deren Exponent 1 weniger beträgt, als die Zahl der Glieder, und multiplicirt hernach diese Dignität in das erste Glied.

Wollte man nun von dieser geometrischen Progression: 1, 2, 4, 8 u. s. f. das 50ste Glied wissen, so ist hier a = 1, b = 2 und n = 50; daher das 50ste Glied = 2^{49} seyn wird. Da nun $2^9 = 512$, so ist $2^{10} = 1024$. Hiervon das Quadrat genommen,

giebt

giebt $2^{20} = 1048576$. Hiervon wieder das Quadrat genommen, giebt $2^{40} = 1099511627776$. Wenn man nun 2^{40} mit $2^9 = 512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49} = 512 . 1099511627776 = 562949953421312$.

§. 508.

Hierbey pflegt nun besonders gefragt zu werden, wie man die Summe aller Glieder einer solchen Progression finden soll; dieses wollen wir hier folgendergestalt zeigen.

Es sey erstlich diese Progression von zehn Gliedern gegeben: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, wovon wir die Summe durch den Buchstaben S andeuten wollen, also daß

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$.

Hiervon nehme man nun die obige Progression weg, so bleibt übrig:

$S = 1024 - 1 = 1023$; also ist die gesuchte Summe $= 1023$.

§. 509.

Wenn wir nun bey eben dieser Progression die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen und $= n$ setzen, so wird die Summe $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots\ldots 2^{n-1}$ seyn. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots\ldots 2^n$, von diesen subtrahirt man jenes, so bekommt man $S = 2^n - 1$. Daher wird die gesuchte Summe gefunden, wenn man das letzte Glied 2^{n-1} mit dem Nenner 2 multiplicirt, um 2^n zu bekommen, und von diesem Product 1 subtrahirt.

§. 510.

Dieses wollen wir durch folgende Beispiele erläutern, indem wir für n nach und nach 1, 2, 3, 4

schrei-

schreiben werden, als: $1=1$, $1+2=3$, $1+2+4=7$, $1+2+4+8=15$, $1+2+4+8+16=31$, $1+2+4+8+16+32=63$ u. s. f.

§. 511.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen: Es verkauft jemand sein Pferd nach den Hufnägeln, deren 32 sind; für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pfennige, für den dritten 4 Pfennige, für den vierten 8 Pfennige und immer für den folgenden zweymal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also folgende geometrische Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, u. s. f. bis auf das 32ste Glied fortgesetzt und die Summe von allen gesucht werden. Da nun das letzte Gled $= 2^{31}$, so ist oben schon $2^{20} = 1048576$ gefunden worden, dieses multiplicirt man mit $2^{10} = 1024$, um $2^{30} = 1073741824$ zu haben. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt das letzte Glied $2^{31} = 2147483648$; folglich wird die Summe dieser Zahl doppelt genommen weniger 1, das ist 4294967295 Pfennige, gleich seyn.

2) 4294967295 Pf.

6) 2147483647 (1.

oder 357913941 Gr. 3 Pf.

3) 357913941

8) 119304647

oder 14913080 Thlr. 21 Gr. 3 Pf.

Also wird der Preis des Pferdes 14913080 Thlr. 21 Gr. 3 Pf. seyn.

§. 512.

§. 512.

Es sey nun der Nenner = 3 und die geometrische Progression sey 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe so lange = S, also daß:

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729.$$

Man multiplicire mit 3, um zu haben:

$$3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

Hiervon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2S = 2187 - 1 = 2186$. Daher ist die doppelte Summe = 2186 und folglich die Summe 1093.

§. 513.

In eben dieser Progression sey die Anzahl der Glieder = n und die Summe = S, also daß $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^{n-1}$, dieses mit 3 multiplicirt, giebt $3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^n$. Hiervon subtrahire man das obige, und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer dem letzten, gegen alle Glieder der obern, außer dem ersten, aufheben, so bekommt man $2S = 3^n - 1$ und also $S = \frac{3^n - 1}{2}$.

Also wird die Summe gefunden, wenn man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt und den Rest durch 2 theilt, wie aus folgenden Beispielen zu ersehen: $1 = 1$, $1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4$, $1 + 3 + 9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13$, $1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3 \cdot 27 - 1}{2} = 40$, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2} = 121$.

§. 514.

Nun sey auf eine allgemeine Art das erste Glied = a, der Nenner = b, die Anzahl der Glieder = n und die Summe derselben = S, also daß

$$S = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^{n-1}.$$

Dieses

Dieses mit b multiplicirt, so bekommt man $bS = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^n$. Hiervon subtrahire man das obige, so erhält man $(b - 1).$ $S = ab^n - a$, folglich bekommt man die gesuchte Summe $S = \frac{ab^n - a}{b - 1}$. **Daher wird die Summe einer jeden geometrischen Progression gefunden, wenn man das letzte Glied mit dem Nenner der Progression multiplicirt, von dem Product das erste Glied subtrahirt und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.**

§. 515.

Man habe eine geometrische Progression von 7 Gliedern; das erste = 3 und der Nenner = 2, so ist $a = 3$, $b = 2$ und $n = 7$, folglich das letzte Glied $3 \cdot 2^6$, das ist $3 \cdot 64 = 192$, und die Progression selbst

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.$$

also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt, giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt, bleibt 381, dieser Rest durch $b - 1$, das ist, durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summe der Progression ist.

§. 516.

Es sey ferner eine geometrische Progression von sechs Gliedern gegeben, davon das erste 4 und der Nenner $\frac{3}{2}$, so daß die Progression ist:

$$4, 6, 9, \tfrac{27}{2}, \tfrac{81}{4}, \tfrac{243}{8}.$$

Dieses letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multiplicirt, giebt $\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt, giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b - 1 = \frac{1}{2}$, giebt $\frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$.

§. 517.

Wenn der Nenner kleiner ist als 1 und also die Glieder der Progression immer abnehmen, so kann die Summe einer solchen Progression, die ohne Ende fortgeht, angegeben werden.

Es sey z. B. das erste Glied = 1, der Nenner = $\frac{1}{2}$, und die Summe = S, also daß

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ u. s. f. ohne Ende.

Man multiplicire mit 2, so bekommt man:

$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. s. f. ohne Ende, hiervon ziehe man das obige ab, so bleibt S = 2, welches die Summe der unendlichen Progression ist.

§. 518.

Es sey ferner das erste Glied = 1, der Nenner = $\frac{1}{3}$, und die Summe = S, also daß

$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ u. s. f. ohne Ende.

Man multiplicire alles mit 3, so hat man

$3S = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ u. s. f. ohne Ende.

Hiervon nehme man die obige Reihe weg, so bleibt 2S = 3, folglich ist die Summe = $1\frac{1}{2}$.

§. 519.

Es sey ferner das erste Glied = 2, der Nenner = $\frac{3}{4}$, die Summe = S, also daß $S = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ u. s. f. ohne Ende. Dieses multiplicire man mit $\frac{4}{3}$, so hat man $\frac{4}{3}S = \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ u. s. f. ohne Ende. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt $\frac{1}{3}S = \frac{8}{3}$, also wird die Summe selbst gerade 8 seyn.

§. 520.

Wenn überhaupt das erste Glied = a und der Nenner der Progression = $\frac{b}{c}$, so daß dieser Bruch kleiner ist als 1 und folglich b kleiner ist als c, so kann die Summe dieser unendlichen Progression folgendergestalt gefunden werden. Man setzt

$S = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}$ u. s. f. ohne Ende.

Hier

Hier multiplicirt man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man

$$\frac{b}{c}S = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ u. s. f. ohne Ende.}$$

Dieses subtrahirt man von dem obigen, so bleibt $\left(1 - \frac{b}{c}\right) S = a$, folglich ist $S = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$.

Multiplicirt man nun oben und unten mit c, so bekommt man $S = \frac{ac}{c - b}$, daher ist die Summe dieser unendlichen geometrischen Progression $= \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$ oder $\frac{ac}{c - b}$.

Diese Summe wird folglich gefunden, wenn man das erste Glied a dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder wenn man den Nenner von 1 subtrahirt, und durch den Rest das erste Glied dividirt.

§. 521.

Wenn in solchen Progressionen die Zeichen + und — mit einander abwechseln, so kann die Summe auf eben dieselbe Art gefunden werden. Denn es sey

$$S = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ u. s. f.}$$

Dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man:

$$\frac{b}{c}S = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ u. s. f.}$$

Dieses addire man zu dem obigen, so erhält man $\left(1 + \frac{b}{c}\right) S = a$. Hieraus findet man die gesuchte Summe $S = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}}$ oder $S = \frac{ac}{c + b}$.

§. 522.

Es sey z. B. das erste Glied $a = \frac{3}{5}$ und der Nenner der Progression $= \frac{2}{5}$, das ist $b = 2$ und $c = 5$, so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ u. s. f. die Summe also gefunden: der Nenner von 1 subtrahirt, bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividiren, so bekommt man die Summe = 1.

Wenn aber die Zeichen + und — abwechseln und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ u. s. f.}$$

so wird die Summe seyn:

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}$$

§. 523.

Zur Uebung soll diese unendliche Progression vorgelegt seyn:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ u. s. f.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$ und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt, bleibt $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied dividirt, giebt die Summe $= \frac{1}{3}$.

Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{10}$.

Nimmt man zwey Glieder $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$, so fehlt noch $\frac{1}{100}$ zu $\frac{1}{3}$ u. s. f.

§. 524.

Wenn diese unendliche Reihe gegeben ist:

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \text{ u. s. f.}$$

so ist das erste Glied 9, der Nenner $\frac{1}{10}$, also 1 weniger dem Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied 9 dividirt, so wird die Summe = 10. Hier ist zu merken, daß diese Reihe durch einen Decimalbruch also vorgestellt wird 9, 9999999 u. s. f.

Zusatz.

Zusatz. Von §. 517 an sind hier Reihen summirt worden, die eine unendliche Anzahl von Glieder haben, deren jedes ein ächter Bruch ist. Ich werde am letzten Beyspiele zeigen, wie man das hier gelehrte eigentlich verstehen soll. Wenn ich das erste Glied 9 der Reihe weglasse, so muß $S = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} - - - = 0,999 - - - = 1$ seyn. Summiren wir von dieser Reihe nur n Glieder, so fehlt an der Summe 1 auch noch $\frac{1}{10^n}$; denn S ist $= \frac{9}{10} \cdot \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - 10^n}{10^n(1-10)} \cdot 10 = \frac{10^n - 1}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n}$, je größer also n ist, je weniger fehlt an Eins. Wenn man daher die Reihe so weit, als man will, fortsetzen darf, so läßt sich keine Größe angeben, um welche ihre Summe kleiner bliebe als 1 ist; denn 10^n kann größer als jede Zahl und daher $\frac{1}{10^n}$ kleiner als jede gegebene Zahl werden.

Der Ausdruck: die Reihe lasse sich ins Unendliche fortsetzen, ist so zu verstehen: jedes folgende Glied der Reihe ist der zehnte Theil seines nächstvorhergehenden Gliedes, jenes hat eine Größe, wenn dieses eine hatte. Man kömmt also nie auf ein Glied, wo die Reihe aufhörte, und dieses ist die Bedeutung jenes Ausdrucks.

Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen heißt daher eine Größe, der diese Reihe, ins Unendliche fortgesetzt, so nahe kommen kann, als man will, dergestalt, daß sich kein Unterschied zwischen dieser Größe und der Summe der Reihe angeben läßt.

XII. Capitel.

Von den unendlichen Decimalbrüchen.

§. 525.

Wir haben oben gesehen, daß man sich bey den logarithmischen Rechnungen statt der gemeinen Brüche der Decimalbrüche bedient, welches auch bey an-