Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XII. Capitel. Von den unendlichen Decimalbrüchen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

Zusatz. Von §. 517 an sind hier Reihen summirt worden, die eine unendliche Anzahl von Glieder haben, deren jedes ein ächter Bruch ist. Ich werde am letzten Beyspiele zeigen, wie man das hier gelehrte eigentlich verstehen soll. Wenn ich das erste Glied 9 der Reihe weglasse, so muß $S = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} --- = 0,999 --- = 1$ seyn. Summiren wir von dieser Reihe nur n Glieder, so fehlt an der Summe 1 auch noch $\frac{1}{10^n}$; denn S ist $= \frac{9}{10} \cdot \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - 10^n}{10^n(1-10)} \cdot 10 = \frac{10^n - 1}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n}$, je größer also n ist, je weniger fehlt an Eins. Wenn man daher die Reihe so weit, als man will, fortsetzen darf, so läßt sich keine Größe angeben, um welche ihre Summe kleiner bliebe als 1 ist; denn 10^n kann größer als jede Zahl und daher $\frac{1}{10^n}$ kleiner als jede gegebene Zahl werden.

Der Ausdruck: die Reihe lasse sich ins Unendliche fortsetzen, ist so zu verstehen: jedes folgende Glied der Reihe ist der zehnte Theil seines nächstvorhergehenden Gliedes, jenes hat eine Größe, wenn dieses eine hatte. Man kömmt also nie auf ein Glied, wo die Reihe aufhörte, und dieses ist die Bedeutung jenes Ausdrucks.

Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen heißt daher eine Größe, der diese Reihe, ins Unendliche fortgesetzt, so nahe kommen kann, als man will, dergestalt, daß sich kein Unterschied zwischen dieser Größe und der Summe der Reihe angeben läßt.

XII. Capitel.

Von den unendlichen Decimalbrüchen.

§. 525.

Wir haben oben gesehen, daß man sich bey den logarithmischen Rechnungen statt der gemeinen Brüche der Decimalbrüche bedient, welches auch bey andern Rechnungen mit großem Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an zu zeigen, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werde, und wie man den Werth eines Decimalbruchs umgekehrt durch einen zemeinen Bruch ausdrücken soll.

§. 526.

Es sey auf eine allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einen Decimalbruch verwandelt soll. Da nun dieser Bruch den Quotienten ausdrückt, welcher entsteht, wenn man den Zähler a durch den Nenner b dividirt, so schreibe man statt a diese Form a, 0000000, welche offenbar nichts anders anzeigt als die Zahl a, weil keine 10tel, keine 100tel u. s. f. vorhanden sind. Diese Form theile man nun durch die Zahl b nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobey man nur in Acht zu nehmen hat, daß das Comma, welches die Decimalbrüche von den ganzen Zahlen absondert, an seinen gehörigen Ort gesetzt werde. Dieses wollen wir nun durch folgende Beispiele erläutern.

Es sey erstlich der gegebene Bruch $\frac{1}{2}$, so kommt die Decimaldivision wie folget zu stehen:

$$\frac{2)\ 1,\ 0000000}{0,\ 5000000} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus sehen wir, daß $\frac{1}{2}$ so viel sey als 0, 5000000, oder als 0, 5, welches auch offenbar ist, indem dieser Decimalbruch $\frac{5}{10}$ anzeigt, welches eben so viel ist als $\frac{1}{2}$.

§. 527.

Es sey ferner der gegebene Bruch $\frac{1}{3}$, so hat man diesen Decimalbruch:

$$\frac{3)\ 1,\ 0000000}{0,\ 3333333}\ \text{u. s. f.} = \frac{1}{3}.$$

Hieraus sieht man, daß dieser Decimalbruch, dessen Werth $= \frac{1}{3}$ ist, nirgend abgebrochen werden kann,

kann, sondern ins Unendliche durch lauter 3 fortläuft. Also machen alle diese Brüche $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ u. s. f. ohne Ende zusammen genommen gerade so viel als $\frac{1}{3}$, wie wir schon oben gezeigt haben.

Für $\frac{2}{3}$ findet man folgenden Decimalbruch, der auch ins Unendliche fortläuft:

$$\frac{3)\ 2,\ 0000000}{0,\ 6666666} \text{ u. s. f.} = \frac{2}{3},$$

welches auch aus dem vorigen erwiesen ist, weil dieser Bruch zweymal so groß ist, als der vorige.

§. 528.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{1}{4}$, so hat man diese Decimaldivision:

$$\frac{4)\ 1,\ 0000000}{0,\ 2500000} = \frac{1}{4},$$

also ist $\frac{1}{4}$ so viel als 0, 2500000, oder als 0, 25, welches beweiset, daß $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ist.

Eben so bekommt man für $\frac{3}{4}$ diesen Decimalbruch:

$$\frac{4)\ 3,\ 0000000}{0,\ 7500000} = \frac{3}{4},$$

also ist $\frac{3}{4} = 0,\ 75$, das ist $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$, welcher Bruch, durch 25 abgekürzt, $\frac{3}{4}$ giebt.

Wollte man $\frac{5}{4}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so hätte man

$$\frac{4)\ 5,\ 0000000}{1,\ 2500000} = \frac{5}{4},$$

dieses ist aber $1 + \frac{25}{100}$, das ist $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

§. 529.

Auf solche Art wird $\frac{1}{5} = 0,\ 2$: und $\frac{2}{5} = 0,\ 4$; ferner $\frac{3}{5} = 0,\ 6$; $\frac{4}{5} = 0,\ 8$ und $\frac{5}{5} = 1$; weiter $\frac{6}{5} = 1,\ 2$ u. s. f.

Wenn der Nenner 6 ist, so finden wir $\frac{1}{6} = 0,\ 1666666$ u. s. f., welches so viel ist als 0, 666666 — 0, 5. Nun aber ist 0, 666666 = $\frac{2}{3}$ und 0, 5 = $\frac{1}{2}$, folglich ist 0, 1666666 = $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ferner findet man $\frac{2}{6} = 0,3333333$ u. s. f. $= \frac{1}{3}$; hingegen $\frac{3}{6}$ wird $0,5000000 = \frac{1}{2}$. Weiter wird $\frac{5}{6} = 0,833333 = 0,3333333 + 0,5$, das ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

§. 530.

Wenn der Nenner 7 ist, so werden die Decimalbrüche mehr verwirrt; also für $\frac{1}{7}$ findet man $0,142857$ u. s. f., wobey zu merken, daß immer diese sechs Zahlen 142857 wieder kommen. Um nun zu zeigen, daß dieser Decimalbruch gerade $\frac{1}{7}$ ausmache, so verwandle man denselben in eine geometrische Progression, wovon das erste Glied $= \frac{142857}{1000000}$, der Nenner aber $= \frac{1}{1000000}$, also wird die Summe $= \dfrac{\frac{142857}{1000000}}{1 - \frac{1}{1000000}}$. Man multiplicire oben und unten mit 1000000, so wird diese Summe $= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

§. 531.

Daß der gefundene Decimalbruch gerade $\frac{1}{7}$ betrage, kann noch leichter folgendergestalt gezeigt werden. Man setze für den Werth desselben den Buchstaben S, also daß

$$
\begin{array}{rrl}
 & S = & 0,142857142857142857 \text{ u. s. f.} \\
\text{so wird} & 10\,S = & 1,42857142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & 100\,S = & 14,2857142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & 1000\,S = & 142,857142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & 10000\,S = & 1428,57142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & 100000\,S = & 14285,7142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & 1000000\,S = & 142857,142857142857 \text{ u. s. f.} \\
 & \text{Subtrahire } S = & 0,142857142857 \text{ u. s. f.} \\
\hline
 & 999999\,S = & 142857,
\end{array}
$$

Nun theile man durch 999999, so bekommt man $S = \frac{142857}{999999}$ und dieses ist der Werth des obigen Decimalbruchs $\frac{1}{7}$.

§. 532.

§. 532.

Eben so verwandelt man $\frac{2}{7}$ in einen Decimalbruch 0,2857142 8 u. s. f. Dieses leitet uns darauf, wie man den Werth des vorigen Decimalbruchs, den wir S gesetzt haben, leichter finden kann, weil dieser Bruch gerade zweymal so groß ist als der vorige und also = 2 S. Da wir nun gehabt haben

$$100S = 14{,}28571428571 \text{ u. s. f.}$$

hiervon 2 S weggenommen $2S = 0{,}28571428571$ u. s. f.

$$\text{bleiben } 98\,S = 14,$$

$$\text{daher wird } S = \tfrac{14}{98} = \tfrac{1}{7}.$$

Ferner wird $\frac{3}{7} = 0,\ 42857142857$ u. s. f.; dieses ist also nach dem obigen Satz = 3 S. Wir haben aber gefunden

$$10\,S = 1,\ 42857142857 \text{ u. s. f.}$$

Subtrahire $3\,S = 0,\ 42857142857$ u. s. f.

so wird $7\,S = 1$, folglich $S = \frac{1}{7}$.

§. 533.

Wenn also der Nenner des gegebenen Bruchs 7 ist, so läuft der Decimalbruch ins Unendliche, und werden darin 6 Zahlen immer wiederholt, wovon der Grund leicht einzusehen ist, weil bey fortgesetzter Division endlich einmal so viel übrig bleiben muß, als man anfänglich gehabt. Es können aber nicht mehr verschiedene Zahlen übrig bleiben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, also müssen von der sechsten Division an wieder eben die Zahlen herauskommen als vom Anfang. Wenn aber der Nenner so beschaffen ist, daß die Division am Ende aufgeht, so fällt dieses weg.

§. 534.

Es sey der Nenner des Bruchs 8, so werden folgende Decimalbrüche gefunden:

$\frac{1}{8} = 0,125 : \frac{2}{8} = 0,250 : \frac{3}{8} = 0,375 : \frac{4}{8} = 0,500 : \frac{5}{8} = 0,625 : \frac{6}{8} = 0,750 : \frac{7}{8} = 0,875$ u. s. f.

§. 535.

Ist der Nenner 9, so findet man folgende Decimalbrüche: $\frac{1}{9} = 0,111$ u. s. f. $\frac{2}{9} = 0,222$ u. s. f. $\frac{3}{9} = 0,333$ u. s. f. Ist aber der Nenner 10, so bekommt man folgende Brüche: $\frac{1}{10} = 0,100$; $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{3}{10} = 0,3$, wie aus der Natur der Sache erhellet. Eben so wird $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{37}{100} = 0,37$; ferner $\frac{256}{1000} = 0,256$; weiter $\frac{24}{10000} = 0,0024$, welches für sich klar ist.

§. 536.

Es sey der Nenner des Bruchs 11, so findet man diesen Decimalbruch $\frac{1}{11} = 0,0909090$ u. s. f. Wäre nun dieser Bruch gegeben und man wollte seinen Werth finden, so setze man denselben = S. Es wird also $S = 0,0909090$; und $10 S = 0,909090$; weiter $100 S = 9,09090$. Hiervon S subtrahirt, so wird $99 S = 9$ und daher $S = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. Ferner wird $\frac{2}{11} = 0,181818$; $\frac{3}{11} = 0,272727$; $\frac{6}{11} = 0,545454$.

§. 537.

Hier sind nun diejenigen Decimalbrüche sehr merkwürdig, wo einige Zahlen immer wiederholt werden und die solchergestalt ins Unendliche fortgehen. Wie man von solchen Brüchen den Werth leicht finden könne, soll sogleich gezeigt werden.

Es werde erstlich nur eine Zahl wiederholt, welche = a sey, so haben wir $S = 0,aaaaaaa$. Daher wird

$$10 S = a,aaaaaaa.$$

Subtrahire $S = 0,aaaaaaa$

so wird $9 S = a$, folglich $S = \frac{a}{9}$.

Werden

Werden immer zwey Zahlen wiederholt, als ab, so hat man S = 0, ab ab ab a. Daher wird 100 S = ab, ab ab ab, hievon S subtrahirt, bleibt 99 S = ab; also $S = \frac{ab}{99}$.

Werden drey Zahlen, als abc, immer wiederholt, so hat man S = 0, abc abc abc; folglich 1000 S = abc, abc abc. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt 999 S = abc; also $S = \frac{abc}{999}$ u. s. f.

Anmerk. Diese Eigenschaft gewisser Decimalbrüche, nach welcher die Decimalzahlen wiederkehren, bieten Materie zu sehr vielen interessanten Untersuchungen dar. Man findet einen sehr lesenswerthen Aufsatz darüber von Hrn. Prof. Joh. Bernoulli in den Mémoires der Akademie zu Berlin vom Jahr 1771. Hier erlaubt der Platz nur folgendes beyzubringen.

Es sey $\frac{N}{D}$ irgend ein ächter Bruch, welcher nicht in kleinern Zahlen ausgedrückt werden kann; man fragt, bis zu wie viel Ziffern man ihn in Decimalen ausdrücken muß, ehe dieselben Ziffern wiederkommen? Ich nehme an, daß 10 N größer als D ist, wäre dieses nicht, aber daß 100 N oder 1000 N wohl größer wären als D, so muß man zuerst sehen, ob $\frac{10N}{D}$ oder $\frac{100N}{D}$ u. s. f. sich auf kleinere Zahlen reduciren läßt, oder in einem Bruche $\frac{N1}{D1}$.

Dieses vorausgesetzt, so behaupte ich, daß dieselbe Periode nur alsdann erst wiederkommt, wenn in der fortgesetzten Division, die man macht, dasselbe Resultat N wieder erscheint. Wir wollen annehmen, daß wir bis dahin s Nullen angehängt haben, und daß Q den Quotienten in ganzen Zahlen bedeutet, indem wir von dem Comma abstrahiren, so haben wir $\frac{N.10^s}{D} = Q + \frac{N}{D}$; also $Q = \frac{N}{D}.(10^s - 1)$. Da aber Q eine ganze Zahl seyn muß, so wird erfordert für s die kleinste ganze Zahl zu bestimmen, so daß $\frac{N}{D}.(10^s - 1)$, oder nur $\frac{10^s - 1}{D}$ eine ganze Zahl sey.

Man muß hierbey verschiedene Fälle unterscheiden: der erste ist dieser, wo D ein Maaß von 10, oder von 100, oder

oder von 1000 u. s. f. ist; und es ist klar, daß in diesem Fall keine periodischen Decimalbrüche statt finden können. Wir nehmen für den zweyten Fall den, wo D eine ungerade Zahl ist, und welche kein Factor einer Potenz von 10 ist; in diesem Fall kann der Werth von s bis D — 1 seyn, aber öfters ist er weniger. Ein dritter Fall ist endlich der, wo D gerade ist, und wo also, ohne ein Factor von einer Potenz von 10 zu seyn, doch ein gemeinschaftlicher Divisor mit einer dieser Potenzen da ist. Dieser gemeinschaftliche Divisor kann nur eine Zahl von folgender Form 2^c seyn. Wenn also $\frac{D}{2^c} = d$, so behaupte ich, daß die Perioden dieselben als für den Bruch $\frac{N}{d}$ seyn werden, aber daß sie nicht eher als bey der durch c bezeichneten Ziffer anfangen. Also ist dieser Fall mit dem zweyten einerley, und es ist übrigens sichtbar, daß gerade dieses hier das Wesentliche dieser Theorie ausmacht.

§. 538.

So oft also ein solcher Decimalbruch vorkommt, so ist es leicht seinen Werth anzuzeigen. Also wenn dieser gegeben wäre 0,296296, so wird sein Werth $= \frac{296}{999}$ seyn. Dieser Bruch durch 37 abgekürzt, wird $= \frac{8}{27}$.

Hieraus muß nun wieder der obige Decimalbruch entstehen; um dieses leichter zu zeigen, weil $27 = 3 \cdot 9$, so theile man 8 erstlich durch 9, und den Quotienten ferner durch 3, wie folget:

$$\begin{array}{l} 9)\ 8,\ 0000000 \\ \hline 3)\ 0,\ 8888888 \\ \hline \quad 0,\ 2962962 \text{ u. s. f.} \end{array}$$

Welches der gegebene Decimalbruch ist.

§. 539.

Um noch ein Beispiel zu geben, so verwandle man diesen Bruch $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.}$ in einem Decimalbruch auf folgende Art:

2) 1,

2) 1, 00000000000000
3) 0, 50000000000000
4) 0, 16666666666666
5) 0, 04166666666666
6) 0, 00833333333333
7) 0, 00138888888888
8) 0, 00019841269841
9) 0, 00002480158730
10) 0, 00000275573192
0, 00000027557319

XIII. Capitel.

Von der Inttressenrechnung *).

§. 540.

Die Intressen oder Zinsen von einem Capital pflegen durch Procente ausgedrückt zu werden, indem man sagt, wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gewöhnlich wird das Geld zu 5 p. C. ausgelegt, also daß

*) Die Theorie der Intressenrechnung dankt ihre ersten Fortschritte dem großen Leibnitz, welcher die Hauptelemente in den actis Eruditorum, Leipzig 1683, gab. Sie hat nachher Stoff zu verschiedenen einzelnen sehr interessanten Dissertationen gegeben. Diejenigen Mathematiker, welche über politische Arithmetik gearbeitet, haben solche am meisten erweitert. Wir nennen unter Deutschen mit Recht hier vorzüglich Florencourt, Michelsen und Tetens die hierüber vortreffliche jede in besonderer Rücksicht schätzbare Werke geliefert haben, und dürfen sie kühn den Ausländern entgegen stellen, die vorher, besonders die Engländer, uns beyweitem hierin übertrafen.