Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1796

VD18 90239563

XIII. Capitel. Von der Jntressenrechnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50527

2) 1, 00000000000000
3) 0, 50000000000000
4) 0, 16666666666666
5) 0, 04166666666666
6) 0, 00833333333333
7) 0, 00138888888888
8) 0, 00019841269841
9) 0, 00002480158730
10) 0, 00000275573192
0, 00000027557319

XIII. Capitel.

Von der Intressenrechnung *).

§. 540.

Die Intressen oder Zinsen von einem Capital pflegen durch Procente ausgedrückt zu werden, indem man sagt, wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gewöhnlich wird das Geld zu 5 p. C. ausgelegt, also daß

*) Die Theorie der Intressenrechnung dankt ihre ersten Fortschritte dem großen Leibnitz, welcher die Hauptelemente in den actis Eruditorum, Leipzig 1683, gab. Sie hat nachher Stoff zu verschiedenen einzelnen sehr interessanten Dissertationen gegeben. Diejenigen Mathematiker, welche über politische Arithmetik gearbeitet, haben solche am meisten erweitert. Wir nennen unter Deutschen mit Recht hier vorzüglich Florencourt, Michelsen und Tetens die hierüber vortreffliche jede in besonderer Rücksicht schätzbare Werke geliefert haben, und dürfen sie kühn den Ausländern entgegen stellen, die vorher, besonders die Engländer, uns beyweitem hierin übertrafen.

daß von 100 Rthlr. jährlich 5 Rthlr. Intèressen gezahlt werden. Hieraus ist es nun leicht, den Zins von einem jeden Capital zu berechnen, indem man nach der Regeldetri sagt:

100 geben 5, was giebt das gegebene Capital? Es sey z. B. das Capital 860 Rthlr., so findet man den jährlichen Zins

100 : 5 = 860 zu . . . Antwort 43 Rthlr.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100)\,4300 \\ \hline 43 \end{array}$$

§. 541.

Bey Berechnung dieses einfachen Intèresse wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Intressen auf Intressen betrachten, da jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen und dadurch das Capital vermehret wird, wobey dann gefragt wird: wie hoch ein gegebenes Capital nach Verfließung einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich größer wird, indem zu 5 Proc. 100 Rthlr. nach einem Jahr zu 105 anwachsen, so kann man daraus finden, wie groß ein jedes Capital nach Verfließung eines Jahres werden müsse?

Es sey das Capital = a, so wird solches nach einem Jahre gefunden, wenn man sagt: 100 geben 105, was giebt a? Antwort $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, welches man auch also schreiben kann $\frac{21}{20} \cdot a$ oder $a + \frac{1}{20} \cdot a$.

§. 542.

Wenn also zu dem gegenwärtigen Capital sein 20ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wenn man nun zu diesem wieder seinen 20sten Theil addirt, so findet man

man das Capital für das zweyte Jahr; und zu diesem wieder sein 20ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr u. s. f. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

§. 543.

Es sey das Capital jetzt 1000 Rthlr., welches zu 5 pro Cent angelegt ist und die Zinsen davon jährlich wieder zum Capital geschlagen werden. Weil nun die besagte Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimalbrüchen ausdrücken, nicht weiter aber als bis auf 1000ste Theile eines Rthlr. gehen, weil kleinere Theilchen hier in keine Betrachtung kommen.

Gegenwärtiges Capital 1000 Rthlr. wird

nach 1 Jahr	. .	1050 Rthlr.
		52, 5
nach 2 Jahren	. .	1102, 5
		55, 125
nach 3 Jahren	. .	1157, 625
		57, 881
nach 4 Jahren	. .	1215, 506
		60, 775
nach 5 Jahren	. .	1276, 281 u. s. f.

§. 544.

Solchergestalt kann man auf so viele Jahre fortgehen als man will; wenn aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so wird diese Rechnung sehr weitläuftig und mühsam. Es läßt sich diese aber folgendergestalt abkürzen:

Es sey das gegenwärtige Capital $= a$, und da ein Capital von 20 Rthlr. nach einem Jahre 21 Rthlr. beträgt, so wird das Capital a nach einem Jahre auf $\frac{21}{20} \cdot a$ anwachsen. Ferner im folgenden Jahre auf $\frac{21^2}{20^2} \cdot a = (\frac{21}{20})^2 \cdot a$. Dieses ist nun das Capital nach zweyen Jahren, welches in einem Jahre wieder auf $(\frac{21}{20})^3 \cdot a$ anwächst, welches das Capital nach drey Jahren seyn wird; nach vier Jahren wird nun dasselbe $(\frac{21}{20})^4 \cdot a$; nach fünf Jahren $(\frac{21}{20})^5 \cdot a$; 100 Jahren $(\frac{21}{20})^{100} \cdot a$, und allgemein nach n Jahren wird dasselbe $(\frac{21}{20})^n \cdot a$ seyn; woraus man nach einer jeden beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

§. 545.

Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß das Intresse zu 5 pro Cent gerechnet wird, und $\frac{21}{20}$ so viel ist als $\frac{105}{100}$. Sollte nun das Intresse zu 6 pro Cent gerechnet werden, so würde das Capital a nach einem Jahre auf $\frac{106}{100} \cdot a$ anwachsen; nach zwey Jahren auf $(\frac{106}{100})^2 \cdot a$; und nach n Jahren auf $(\frac{106}{100})^n \cdot a$.

Sollte aber das Intresse nur 4 pro Cent betragen, so würde das Capital a nach n Jahren auf $(\frac{104}{100})^n \cdot a$ anwachsen.

§. 546.

Wenn nun sowohl das Capital a, als die Anzahl der Jahre gegeben ist, so kann man diese Formen leicht durch die Logarithmen auflösen, denn man darf nur den Logarithmus von dieser Formel suchen, welche zu 5 pro Cent $(\frac{21}{20})^n \cdot a$ ist. Da nun dieselbe ein Product von $(\frac{21}{20})^n$ und a ist, so ist ihr Logarithmus $= \log.(\frac{21}{20})^n + \log. a$. Da weiter $(\frac{21}{20})^n$ eine Potenz ist, so ist $\log.(\frac{21}{20})^n = n \log. \frac{21}{20}$. Daher ist der Logarithmus von dem gesuchten Capital $= n.$

log. $\frac{21}{20}$

log. $\frac{21}{20}$ + log. a. Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20}$ = log. 21 — log. 20.

§. 547.

Es sey nun das Capital = 1000 Rthlr., und man fragt, wie groß dasselbe nach 100 Jahren zu 5 pro Cent seyn werde?

Hier ist also n = 100. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capital wird nun = 100 log. $\frac{21}{20}$ + log. 1000 seyn, welches folgendergestalt berechnet wird:

	log. 21 = 1, 3222193
subtr.	log. 20 = 1, 3010300
	log. $\frac{21}{20}$ = 0, 0211893
multipl. mit 100	
	100 log. $\frac{21}{20}$ = 2, 1189300
addirt	log. 1000 = 3, 0000000
	5, 1189300

Dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals und die Zahl desselben wird daher aus 6 Figuren bestehen und also 131501 Rthlr. seyn.

§. 548.

Ein Capital von 3452 Rthlr. zu 6 pro Cent, wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren?

Hier ist also a = 3452 und n = 64. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals = 64 log. $\frac{53}{50}$ + log. 3452, welches also berechnet wird:

	log. 53 = 1, 7242759
subt.	log. 50 = 1, 6989700
	log. $\frac{53}{50}$ = 0, 0253059
mult. mit 64;	64 log. $\frac{53}{50}$ = 1, 6195776
	log. 3452 = 3, 5380708
	5, 1576484

Also das gesuchte Capital = 143763 Rthlr.

§. 549.

Wenn die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so könnte, weil damit der Logarithmus eines Bruchs multiplicirt werden muß, die Logarithmen in den gewöhnlichen Tabellen aber nur auf 7 Figuren berechnet worden, ein merklicher Fehler entstehen. Daher muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Figuren genommen werden, wie aus folgendem Beispiele zu ersehen: ein Capital von einem Rthlr. zu 5 p. C. bleibt 500 Jahr lang stehen, da inzwischen die jährlichen Zinsen immer dazu geschlagen worden. Nun fragt sich, wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde?

Hier ist also $a = 1$ und $n = 500$, also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 500 \log.\frac{21}{20} + \log. 1$, woraus diese Rechnung entstehet:

$$\log. 21 = 1,\ 322219294733919$$

subtrahirt $\log. 20 = 1,\ 301029995663981$

$$\log. \tfrac{21}{20} = 0,\ 021189299069938$$

mult. mit 500, giebt $10,\ 594649534969000$

Dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals, welches daher selbst = 39323200000 Rthlr. seyn wird.

§. 550.

Wenn man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Intressen schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summe $= b$ dazu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr anwachsen, wie folget.

Gegenwärtig hat man a;

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a + b$

nach 2 Jahr $(\frac{21}{20})^2 a + \frac{21}{20}b + b$

nach 3 Jahr $(\frac{21}{20})^3 a + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach 4 Jahr $(\frac{21}{20})^4 a + (\frac{21}{20})^3 b + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach n Jahr $(\frac{21}{20})^n a + (\frac{21}{20})^{n-1} b + (\frac{21}{20})^{n-2} b + \ldots$

$$\ldots + \tfrac{21}{20}b + b$$

Dieses

Dieses Capital besteht aus zwey Theilen, davon der erste = $(\frac{21}{20})^n a$, der andere aber aus dieser Reihe rückwärts geschrieben $b + (\frac{21}{20}) b + (\frac{21}{20})^2 b + (\frac{21}{20})^3 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1} b$ besteht, welches eine geometrische Progression ist, deren Nenner = $\frac{21}{20}$; die Summe wird nun also gefunden:

Man multiplicirt das letzte Glied $(\frac{21}{20})^{n-1} b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$, so bekommt man $(\frac{21}{20})^n b$, davon subtrahirt man das erste Glied b, so bleibt $(\frac{21}{20})^n b - b$. Dieses muß durch 1 weniger als der Nenner ist, dividirt werden, das ist durch $\frac{1}{20}$; daher wird die Summe der obigen Progression = $20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b$; folglich wird das gesuchte Capital seyn:

$$(\tfrac{21}{20})^n a + 20 . (\tfrac{21}{20})^n b - 20 b = (\tfrac{21}{20})^n . (a + 20 b) - 20 b.$$

§. 551.

Um nun dieses auszurechnen, so muß man das erste Glied $(\frac{21}{20})^n (a + 20 b)$ besonders betrachten und berechnen, welches geschieht, wenn man den Logarithmus desselben sucht, welcher $n \log. \frac{21}{20} + \log. (a + 20 b)$ ist. Zu diesem sucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, so hat man das erste Glied, davon subtrahirt man 20b, so bekommt man das gesuchte Capital.

§. 552.

Frage. Einer hat ein Capital von 1000 Rthlr. zu 5 pr. C. ausstehen, wozu er jährlich außer den Zinsen noch 100 Rthlr. hinzulegt, wie groß wird dieses Capital nach 25 Jahren seyn?

Hier ist also $a = 1000$, $b = 100$, $n = 25$; daher wird die Rechnung stehen, wie folget:

$$\log. \tfrac{21}{20} = 0,\ 021189299$$

multiplic. mit 25, giebt

$$25 \log. \tfrac{21}{20} = 0,\ 5297324750$$

$$\begin{array}{r} 0,\ 5297324750 \\ \log.(a+20b) = 3,\ 4771213135 \\ \hline 4,\ 0068537885 \end{array}$$

Also ist der erste Theil 10159, 1 Rthlr, davon $20b = 2000$ subtrahirt, so ist das Capital nach 25 Jahren werth 8159, 1 Rthlr.

§. 553.

Da nun das Capital immer größer wird und nach 25 Jahren auf $8159\frac{1}{10}$ Rthlr. angewachsen, so kann man weiter fragen, nach wie viel Jahren dasselbe bis auf 1000000 Rthlr. anwachsen werde?

Es sey n diese Anzahl von Jahren, und weil $a = 1000$, $b = 100$, so wird nach n Jahren das Capital seyn: $(\frac{21}{20})^n(3000) - 2000$, dieses muß nun 1000000 Rthlr. seyn, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n - 2000 = 1000000.$$

Man addire beyderseits 2000, so bekommt man

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n = 1002000.$$

Man dividire beyderseits durch 3000, so hat man $(\frac{21}{20})^n = 334$. Hiervon nehme man die Logarithmen, so hat man $n.\log.\frac{21}{20} = \log.334$. Hier dividirt man durch $\log.\frac{21}{20}$, so kommt $n = \frac{\log.334}{\log.\frac{21}{20}}$. Nun aber ist $\log.334 = 2,5237465$, $\log.\frac{21}{20} = 0,0211893$; daher wird $n = \frac{2,5237465}{0,0211893}$. Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist 119 Jahr 1 Monath 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital auf 1000000 Rthlr. anwachsen.

§. 554.

Wenn aber, statt daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt wird, etwas davon weggenommen wird, so welches man auf seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe = b gesetzt wird, so wird das zu 5 p. C. angelegte Capital a folgendergestalt fortgehen:

Gegenwärtig ist es a:

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a - b$

nach 2 Jahren $(\frac{21}{20})^2 a - \frac{21}{20}b - b$

nach 3 Jahren $(\frac{21}{20})^3 a - (\frac{21}{20})^2 b - \frac{21}{20}b - b$

nach n Jahren $(\frac{21}{20})^n a - (\frac{21}{20})^{n-1} b - (\frac{21}{20})^{n-2} b \ldots$

$\ldots - (\frac{21}{20}) b - b.$

§. 555.

Es wird also dasselbe in zwey Stücken vorgelegt, das erste ist $(\frac{21}{20})^n a$; davon wird subtrahirt diese geometrische Progression rückwärts geschrieben $b + \frac{21}{20} b + (\frac{21}{20})^2 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1}$. Hiervon ist oben die Summe gefunden worden $= 20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b$, welche von dem ersten $(\frac{21}{20})^n a$ subtrahirt, das nach n Jahren gesuchte Capital giebt $(\frac{21}{20})^n (a - 20b) + 20b$.

§. 556.

Diese Formel hätte sogleich aus der vorigen geschlossen werden können. Denn da vorher jährlich b addirt wurde, so wird nun jährlich b subtrahirt. Also darf man in der vorhergehenden Formel anstatt $+ b$ nur $- b$ schreiben. Hier ist nun besonders zu merken, daß wenn 20b größer ist als a, so wird das erste Glied negativ und also das Capital immer kleiner; welches für sich offenbar ist, denn wenn vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahre kleiner werden und endlich gar verschwinden, welches wir mit einem Beispiele erläutern wollen.

§. 557.

Einer hat ein Capital von 100000 Rthlr. zu 5 pr. C. ausstehen, braucht alle Jahre zu seinem Unterhalt

terhalt 6000 Rthlr., welches mehr ist als die Intressen von 100000 Rthlr., welche nur 5000 Rthlr. betragen, daher das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage, nach wie viel Jahren dasselbe gänzlich verschwinden werde?

Für diese Anzahl Jahre setze man n, und da $a = 100000$ Rthlr. und $b = 6000$, so wird nach n Jahren das Capital seyn $= -20000\,(\frac{21}{20})^n + 120000$ oder $120000 - 20000\,(\frac{21}{20})^n$. Also verschwindet das Capital, wenn $20000\,(\frac{21}{20})^n$ auf 120000 anwächst, oder wenn $20000\,(\frac{21}{20})^n = 120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $(\frac{21}{20})^n = 6$. Man nehme die Logarithmen, so kommt $n \log.\frac{21}{20} = \log.6$. Man dividire durch $\log.\frac{21}{20}$, so findet man $n = \frac{\log.\ 6}{\log.\frac{21}{20}}$ $= \frac{0,7781513}{0,0211893}$, oder $n = \frac{7781513}{211893}$, folglich wird $n = 36$ Jahr 8 Monath 22 Tage; und nach so vieler Zeit wird das Capital verschwinden.

§. 558.

Hier ist noch nöthig zu zeigen, wie nach diesem Grunde die Intressen auch für eine kleinere Zeit als ganze Jahre berechnet werden können. Hierzu dient nun die oben gefundene Formel, daß ein Capital zu 5 pr. C. nach n Jahren auf $(\frac{21}{20})^n a$ anwächst; ist nun die Zeit kleiner als ein Jahr, so wird der Exponent n ein Bruch und die Rechnung kann wie vorher durch Logarithmen gemacht werden. Sollte das Capital nach einem Tage gesucht werden, so muß man $n = \frac{1}{365}$ setzen; will man es nach zwey Tagen wissen, so wird $n = \frac{2}{365}$ u. s. f.

§. 559.

Es sey das Capital $a = 100000$ Rthlr. zu 5 p. C. wie groß wird solches nach 8 Tagen seyn?

Hier

Hier ist $a = 100000$ und $n = \frac{8}{365}$; folglich wird das Capital seyn $(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}}\ 100000$. Hiervon ist der Logarithmus $= \log. (\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}} + \log. 100000 = \frac{8}{365} \log. \frac{21}{20} + \log. 100000$. Nun aber ist $\log. \frac{21}{20} = 0,0211892$.

dieser mit $\frac{8}{365}$ multiplicirt, giebt 0, 0004644,
hierzu ad. log. 100000, welcher ist 5, 0000000

$$\underline{\hphantom{5,0004644}}$$
5, 0004644

so erhält man den Logarithmus von dem Capital = 5, 0004644. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthlr., so daß in den ersten 8 Tagen das Intresse schon 107 Rthlr. beträgt.

§. 560.

Hierher gehören noch andere Fragen, welche darauf gehen, wenn eine Summe Geldes erst nach einigen Jahren verfällt, wie viel dieselbe jetzt werth sey. Hier ist zu betrachten, daß, da 20 Rthlr. über ein Jahr 21 Rthlr. austragen, wieder 21 Rthlr., die nach einem Jahr zahlbar sind, jetzt nur 20 Rthlr. werth sind. Wenn also das nach einem Jahr verfallene Capital a gesetzt wird, so ist dessen Werth $\frac{20}{21} a$. Um also zu finden, wie viel das Capital a, das zu einer gewissen Zeit verfällt, ein Jahr früher werth ist, so muß man dasselbe multipliciren mit $\frac{20}{21}$; zwey Jahr früher wird desselben Werth seyn $(\frac{20}{21})^2 a$; drey Jahr früher ist dasselbe $(\frac{20}{21})^3 a$ und überhaupt n Jahre früher ist der Werth desselben $(\frac{20}{21})^n a$.

§. 561.

Einer genießt auf 5 Jahre lang eine jährliche Rente von 100 Rthlr., dieselbe wollte er nun jetzt für baares Geld zu 5 pr. C. verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?

für

für die 100 Rthlr., welche verfallen,

nach 1 Jahr bekommt er		95, 239
nach 2 Jahren	. .	90, 704
nach 3 Jahren	. .	86, 385
nach 4 Jahren	. .	82, 272
nach 5 Jahren	. .	78, 355
Summe aller 5 Jahre	. .	432, 955

Also kann er für diese Rente nicht mehr fordern, als 432, 955 Rthlr. oder 432 Rthlr. 22 Gr. 11 Pf.

§. 562.

Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre lang dauern, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam, sie kann aber folgendergestält sehr erleichtert werden:

Es sey die jährliche Rente $= a$, welche jetzt schon anfängt und n Jahre lang dauert, so wird dieselbe jetzt werth seyn:

$$a + \tfrac{20}{21}a + (\tfrac{20}{21})^2 a + (\tfrac{20}{21})^3 a + (\tfrac{20}{21})^4 a + \ldots (\tfrac{20}{21})^n a.$$

Dieses ist nun eine geometrische Progression, deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $(\tfrac{20}{21})^{n+1}a$; davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $(\tfrac{20}{21})^{n+1}a - a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist mit $-\tfrac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleichviel, mit -21 multiplicirt werden; daher wird die gesuchte Summe seyn $= -21\,(\tfrac{20}{21})^{n+1}a + 21a$, das ist $21a - 21\,(\tfrac{20}{21})^{n+1}a$, wovon das letzte Glied, welches subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmen berechnet werden kann.

Ende des ersten Theils

und des dritten Abschnits von den Verhältnissen und Proportionen.