Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

II. Capitel. Von den Gleichungen des ersten Grades und von ihrer Auflösung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50547

kommt; diese werden quadratische Gleichungen, oder Gleichungen vom zweyten Grade genannt. Darauf folgen die Gleichungen vom dritten Grade oder die cubischen, worin der Cubus der unbekannten Zahlen vorkommt u. s. f., von allen diesen soll in diesem Abschnitte gehandelt werden.

II. Capitel.

Von den Gleichungen des ersten Grades und von ihrer Auflösung.

§. 11.

Wenn die unbekannte oder gesuchte Zahl durch den Buchstaben x angedeutet wird, und die heraus gebrachte Gleichung schon so beschaffen ist, daß der eine Satz allein das x und der andere Satz eine bekannte Zahl enthält, als z. B. $x = 25$, so hat man schon wirklich den Werth von x, der verlangt wird, gefunden, und auf diese Form muß man immer zu kommen suchen, so verwirrt auch die erst gefundene Gleichung seyn mag, und hiezu sollen die Regeln im Folgenden gegeben werden.

§. 12.

Wir wollen bey den leichtesten Fällen anfangen und zuerst annehmen, man sey auf folgende Gleichung gekommen:

$x + 9 = 16$, so sieht man, wenn man auf beyden Seiten 9 subtrahirt, daß $x = 7$ ist.

Es sey auf eine allgemeine Art $x + a = b$, wo a und b bekannte Zahlen andeuten, sie mögen auch

heißen

heißen wie sie wollen. Hier muß man also auf beyden Seiten a subtrahiren, und so bekommt man diese Gleichung $x = b - a$, welche uns den Werth von x anzeigt.

§. 13.

Ist die gefundene Gleichung $x - a = b$, so addire man auf beyden Seiten a, so kommt $x = a + b$, welches der gesuchte Werth von x ist.

Eben so verfährt man, wenn die erste Gleichung also beschaffen ist $x - a = aa + 1$; denn da wird $x = aa + a + 1$.

Und aus dieser Gleichung $x - 8a = 20 - 6a$ bekommt man $x = 20 - 6a + 8a$ oder $x = 20 + 2a$.

Und aus dieser $x + 6a = 20 + 3a$ findet man $x = 20 + 3a - 6a$ oder $x = 20 - 3a$.

§. 14.

Hat man folgende Gleichung: $x - a + b = c$, so kann man beyderseits a addiren, wodurch man die neue Gleichung $x + b = c + a$ erhält. Subtrahirt man auf beyden Seiten b, so hat man $x = c + a - b$. Man kann aber zugleich auf beyden Seiten $+ a - b$ addiren, so bekommt man mit einemmal $x = c + a - b$.

Also in den folgenden Beyspielen:

wenn $x - 2a + 3b = 0$, so wird $x = 2a - 3b$,

wenn $x - 3a + 2b = 25 + a + 2b$, so wird $x = 25 + 4a$.

wenn $x - 9 + 6a = 25 + 2a$, so wird $x = 34 - 4a$.

§. 15.

Hat die gefundene Gleichung diese Gestalt: $ax = b$, so dividire man auf beyden Seiten durch a, welches folgende Gleichung giebt: $x = \frac{b}{a}$. Ist aber die Gleichung $ax + b - c = d$, so muß man erstlich dasjenige, was bey ax steht, wegbringen, welches hier dadurch geschehen kann, wenn man auf beyden Seiten $-b+c$ addirt. Denn auf diese Weise erhält man $ax = d - b + c$; folglich $x = \frac{d-b+c}{a}$.

Oder man subtrahire auf beyden Seiten $+b-c$, so bekömmt man $ax = d - b + c$, und $x = \frac{d-b+c}{a}$.

Es sey $2x + 5 = 17$, so ist $2x = 12$ und $x = 6$.

Es sey $3x - 8 = 7$, so ist $3x = 15$ und $x = 5$.

Es sey $4x - 5 - 3a = 15 + 9a$, so wird $4x = 20 + 12a$, folglich $x = 5 + 3a$.

§. 16.

Ist die Gleichung von dieser Art $\frac{x}{a} = b$, so multiplicire man auf beyden Seiten mit a, und man bekömmt $x = ab$.

Ist nun $\frac{x}{a} + b - c = d$, so wird erstlich $\frac{x}{a} = d - b + c$ und $x = (d - b + c)\,a = ad - ab + ac$.

Es sey $\frac{1}{2}x - 3 = 4$, so wird $\frac{1}{2}x = 7$ und $x = 14$.

Es sey $\frac{1}{3}x - 1 + 2a = 3 + a$, so wird $\frac{1}{3}x = 4 - a$ und $x = 12 - 3a$.

Es sey $\frac{x}{a-1} - 1 = a$, so wird $\frac{x}{a-1} = a + 1$ und $x = aa - 1$.

§. 17.

Ist aber die Gleichung $\frac{ax}{b} = c$, so multiplicire man auf beyden Seiten mit b, so wird $ax = bc$, und ferner $x = \frac{bc}{a}$.

Ist aber $\frac{ax}{b} - c = d$, so wird $\frac{ax}{b} = d + c$ und $ax = bd + bc$ und folglich $x = \frac{bd+bc}{a}$.

Es sey $\frac{2}{3}x - 4 = 1$, so wird $\frac{2}{3}x = 5$ und $2x = 15$, folglich $x = \frac{15}{2}$, das ist $7\frac{1}{2}$.

Es sey $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$, also $\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{2}$, welches $= \frac{9}{2}$ und $3x = 18$ und $x = 6$.

Anmerk. Bey einer Gleichung wie $\frac{a}{b}x = c$, kann man auch mit $\frac{a}{b}$ auf beyden Seiten dividiren, so erhält man auf einmal $x = \frac{bc}{a}$.

§. 18.

Es kann auch der Fall seyn, daß zwey oder mehr Glieder den Buchstaben x enthalten, und entweder in einem Satze oder in beyden vorkommen. Sind sie auf einer Seite, als $x + \frac{1}{2}x + 5 = 11$, so wird $x + \frac{1}{2}x = 6$, und $3x = 12$, und $x = 4$.

Es sey $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$, was ist x? man multiplicire mit 3, so wird $4x + \frac{3}{2}x = 132$, ferner mit 2 multiplicirt, giebt $11x = 264$, und endlich $x = 24$; diese drey Glieder können aber sogleich in eins gezogen werden, als $\frac{11}{6}x = 44$, man theile auf beyden Seiten durch 11, so hat man $\frac{1}{6}x = 4$, und endlich $x = 24$.

Es sey $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 1$, welches zusammen gezogen $\frac{5}{12}x = 1$ und $x = 2\frac{2}{5}$ giebt.

Es sey $ax - bx + cx = d$, so ist dieses eben so viel als $(a - b + c)x = d$; hieraus kömmt $x = \frac{d}{a - b + c}$.

§. 19.

Steht aber x in beyden Sätzen, als z. B. $3x + 2 = x + 10$, so müssen die x von der Seite, wo man am wenigsten hat, weggebracht werden. Man subtrahire also hier auf beyden Seiten x, so kömmt $2x + 2 = 10$ und $2x = 8$ und $x = 4$.

Es

Es sey ferner $x + 4 = 20 - x$, also $2x + 4 = 20$ und $2x = 16$, folgt $x = 8$.

Es sey $x + 8 = 32 - 3x$, also $4x + 8 = 32$, und $4x = 24$, mithin $x = 6$.

Es sey ferner $15 - x = 20 - 2x$, also $15 + x = 20$, und $x = 5$.

Es sey $1 + x = 5 - \frac{1}{2}x$, also $1 + \frac{3}{2}x = 5$, daher $\frac{3}{2}x = 4$, ferner $3x = 8$, folglich $x = \frac{2}{3}$

Es sey $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x$, man addire $\frac{1}{3}x$, so kömmt $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}x$, subtrahire $\frac{1}{3}$, so hat man $\frac{1}{12}x = \frac{1}{6}$, multiplicire mit 12, so kömmt $x = 2$.

Es sey $1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$, addire $\frac{2}{3}x$, so kömmt $1\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{7}{6}x$, subtrahire $\frac{1}{4}$, so hat man $\frac{7}{6}x = 1\frac{1}{4}$, multiplicire mit 6, so bekömmt man $7x = 7\frac{1}{2}$, durch 7 dividirt, giebt $x = 1\frac{1}{14}$ oder $x = \frac{15}{14}$.

§. 20.

Kömmt man auf eine solche Gleichung, wo die unbekannte Zahl x sich im Nenner befindet, so muß der Bruch gehoben und die ganze Gleichung mit demselben Nenner multiplicirt werden.

Es sey z. B. $\frac{100}{x} - 8 = 12$, so erhält man erstlich, wenn man auf beyden Seiten 8 addirt, $\frac{100}{x} = 20$. Nun multiplicire man beyderseits mit x, so hat man $100 = 20x$, und wenn man endlich beyde Sätze mit 20 dividirt, so erhält man die gesuchte Zahl $x = 5$.

Es sey ferner $\frac{5x + 3}{x - 1} = 7$, multiplicire mit $x - 1$, so hat man $5x + 3 = 7x - 7$, subtrahire $5x$, so kömmt $3 = 2x - 7$, addire 7, so bekömmt man $2x = 10$, folglich $x = 5$.

§. 21.

Bisweilen kommen auch Wurzelzeichen vor, und die Gleichung gehört doch zu dem ersten Grade, z. B.

wenn

wenn eine solche Zahl x unter 100 gesucht wird, so daß die Quadratwurzel aus $100 - x$ der Zahl 8 gliche, oder daß $\sqrt{(100 - x)} = 8$. In diesem Falle nehme man auf beyden Seiten die Quadrate $100 - x = 64$, so hat man, wenn x addirt wird, $100 = 64 + x$. Subtrahirt man nun auf beyden Seiten 64, so erhält man $x = 36$. Man könnte aber auch x auf folgende Art finden. Da $100 - x = 64$, so subtrahire man 100, und man bekömmt $- x = - 36$; mit $- 1$ multiplicirt, giebt $x = 36$.

§. 22.

Es giebt auch Fälle, wo die unbekannte Zahl x als der Exponent einer Dignität erscheint, dergleichen Beyspiele schon oben im ersten Theile vorgekommen sind, und da muß man seine Zuflucht zu den Logarithmen nehmen, z. B. wenn man zu wissen verlangt, zu welcher Potenz die Zahl 2 erhoben werden müsse, um die Zahl 512 zu erhalten, so bekömmt man die Gleichung $2^x = 512$.

Nimmt man nun auf beyden Seiten ihre Logarithmen, so hat man $x \log. 2 = \log. 512$, und dividirt man durch log. 2, so wird $x = \frac{\log. 512}{\log. 2}$. Nun ist nach den Tafeln:

$$x = \frac{2,7092700}{0,3010300} = \frac{27092700}{3010300}; \text{ folglich } x = 9.$$

Es sey $5 . 3^{2x} - 100 = 305$, man addire auf beyden Seiten 100, so kömmt $5 . 3^{2x} = 405$; ferner dividire durch 5, so wird $3^{2x} = 81$. Nun nehme man die Logarithmen, so giebt dies $2x \log. 3 = \log. 81$ und endlich dividire durch $2 \log. 3$, so wird $x = \frac{\log 81}{2 \log 3}$ oder $x = \frac{\log 81}{\log 9}$, folglich $x = \frac{1,9084850}{0,9542425} = \frac{19084850}{9542425}$, oder $x = 2$.

Zusatz.

Zusatz. Eben so aus der Gleichung $a^x b^{cx} = q^{rx-p}$, folgt $\log. a^x b^{cx} = \log. q^{rx-p}$, oder $x \log. a + cx \log. b = rx \log. q - p \log. q$ Wenn wir auf beyden Seiten mit -1 multipliciren, so verändern sich blos die Zeichen der Glieder, und die Gleichung stehet so:

$$-x \log. a - cx \log. b. = - rx \log. q + p \log. q$$

$+ rx \log. q$ auf beyden Seiten addirt, giebt

$$rx \log. q - x \log. a - cx \log. b = p. \log. q,$$

oder $x(r \log q - \log. a - c \log. b) = p. \log. q$

folglich $x = \dfrac{p. \log. q.}{r \log. q - \log. a - c \log. b}$.

III. Capitel.

Von der Auflösung einiger hieher gehörigen Aufgaben.

§. 23.

I. Aufgabe.

Man theile 7 in zwey Theile, so daß der größere um 3 größer sey, als der kleinere Theil?

Es sey der größere Theil $= x$, so wird der kleinere $7 - x$ seyn; daher muß $x = 7 - x + 3$, oder $x = 10 - x$ seyn. Man addire x, so erhält man $2x = 10$, und dividire endlich durch 2, so wird $x = 5$.

Antwort. Der größere Theil ist 5, und der kleinere 2.

Anmerk. Diese und ähnliche Aufgaben könnte man folgendergestalt ganz allgemein ausdrücken.

II. Aufgabe. Man theile a in zwey Theile, so daß der größere um b größer sey als der kleinere?

Es sey der größere Theil x, so ist der kleinere $a - x$; daher wird $x = a - x + b$. Man addire x,

so