



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

V. Capitel. Von der Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-50547](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-50547)

Antwort. Die Compagnie der Schweizer bestand also aus 265 Mann, der Schwaben aus 583, und der Sachsen aus 689 Mann.

V. Capitel.

Von der Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen.

§. 61.

Eine Gleichung wird quadratisch genannt, wenn darin das Quadrat oder die zweyte Potenz der unbekannten Zahl vorkommt, wosern sich nur keine höhere Potenzen derselben darin befinden. Denn sollte darin auch die dritte Potenz vorkommen, so wird eine solche Gleichung schon zu den cubischen gerechnet, deren Auflösung besondere Regeln erfordert.

§. 62.

In einer quadratischen Gleichung kommen also nur dreyerley Glieder vor: erstens solche Glieder, worin die unbekannte Zahl gar nicht enthalten ist, oder welche blos aus bekannten Zahlen zusammen gesetzt sind; zweitens solche Glieder, in welchen nur die erste Potenz der unbekannten Zahl vorkommt; und drittens solche, in welchen das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten ist.

Also wenn x die unbekannte Zahl andeutet, die Buchstaben a , b , c , d u. s. w. aber bekannte Zahlen vorstellen, so haben die Glieder der ersten Art diese Form a , von der zweyten Art haben die Glieder die Form bx , und die Glieder der dritten Art haben die Form cx^2 .

§. 63.

§. 63.

Man hat schon oben gesehen, daß zwey oder mehr Glieder von einer Art in ein einziges zusammen gezogen, oder als ein einziges Glied betrachtet werden können.

Daher kann diese Form $ax^2 - bx^2 + cx^2$ als ein einziges Glied angesehen, und auf folgende Art vorgestellt werden: $(a - b + c)x^2$, weil $a - b + c$ wirklich eine bekannte Zahl ausdrückt, und auch durch einen einzelnen Buchstaben, z. B. durch n angezeigt werden könnte.

Wenn sich auch solche Glieder auf beyden Seiten des Zeichens (=) befinden sollten, so hat man schon gesehen, wie diese auf eine Seite gebracht, und in eins zusammen gezogen werden können, z. B. wenn diese Gleichung vorkömmt:

$$2x^2 - 3x + 4 = 5x^2 - 8x + 11;$$

so subtrahirt man erst $2x^2$, so kömmt

$$- 3x + 4 = 3x^2 - 8x + 11.$$

Hernach addire man $8x$, so hat man $5x + 4 = 3x^2 + 11$; und 11 subtrahirt, giebt $3x^2 = 5x - 7$.

§. 64.

Man kann auch alle Glieder auf eine Seite des Zeichens = bringen, so daß auf der andern Seite 0 zu stehen kömmt; woben zu bemerken ist, daß, wenn Glieder von der einen Seite auf die andere gebracht werden, ihre Zeichen verändert werden müssen.

Die obige Gleichung wird daher diese Form bekommen $3x^2 - 5x + 7 = 0$, und so wird auch überhaupt jede quadratische Gleichung durch folgende Form vorgestellt werden können:

$$ax^2 \pm bx \pm c = 0,$$

wo das Zeichen $\pm$ durch plus oder minus ausgesprochen

chen wird, um anzuzeigen, daß solche Glieder bald positiv, bald negativ seyn können.

§. 65.

Es mag eine quadratische Gleichung anfänglich aussehen wie sie will, so kann sie doch immer auf diese Form, welche nur aus drey Gliedern besteht, gebracht werden. Wenn man z. B. auf folgende Gleichung gekommen wäre:

$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$, so müßten zuerst die Brüche gehoben werden, welches auf folgende Art geschehen könnte. Man multiplicire mit $cx+d$, so bekommt man $ax+b = \frac{cex^2 + efx + edx + fd}{gx+h}$, und dieses mit $gx+h$ multiplicirt, giebt

$agx^2 + bgx + ahx + bh = cex^2 + cfx + edx + fd$, welches eine quadratische Gleichung ist; die auf drey Glieder gebracht werden kann, wenn alle auf eine Seite gesetzt werden, und gemeiniglich pflegt man sie auf folgende Art unter einander zu schreiben:

$$\begin{array}{r} 0 = agx^2 + bgx + bh \\ \quad - cex^2 + ahx - fd \\ \qquad \quad - cfx \\ \qquad \quad - edx \end{array}$$

oder, um sie noch deutlicher vorzustellen

$$0 = (ag - ce)x^2 + (bg + ah - cf - ed)x + bh - fd.$$

§. 66.

Vergleichen quadratische Gleichungen, worin von allen dreyen Arten Glieder enthalten sind, werden vollständige genannt, und ihre Auflösung ist auch weit schwieriger; daher wir zuerst solche Gleichungen betrachten wollen, in welchen eins von diesen drey Gliedern fehlt. Ist nun das Glied x^2 gar

gar nicht vorhanden, so ist die Gleichung nicht einmal quadratisch, sondern gehört zu der vorigen Art. Sollte aber das Glied, welches blos bekannte Zahlen enthält, fehlen, so würde die Gleichung folgende seyn: $ax^2 \pm bx = 0$, welche man durch x theilen kann, wodurch man zu dieser Gleichung gelangt: $ax \pm b = 0$; diese ist aber wieder eine einfache Gleichung und gehört daher nicht hieher.

§. 67.

Wenn aber das mittlere Glied, welches nur die erste Potenz von x enthält, fehlt, so bekommt die Gleichung diese Form: $ax^2 \pm c = 0$, oder $ax^2 = \mp c$, es mag nun c das Zeichen $+$ oder $-$ haben.

Eine solche Gleichung wird eine reine quadratische genannt, weil ihre Auflösung leichter bewerkstelligt werden kann. Denn man darf nur durch a theilen, so bekommt man $x^2 = \frac{c}{a}$; und wenn man auf beyden Seiten die Quadratwurzel auszieht, so erhält man $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$, wodurch die Gleichung aufgelöst ist.

§. 68.

Hier sind nun drey Fälle zu bemerken. Der erste wenn $\frac{c}{a}$ eine Quadratzahl ist, wovon sich die Wurzel wirklich angeben läßt; dann erhält man den Werth von x durch eine Rationalzahl ausgedrückt, sie mag nun eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn.

Also aus dieser Gleichung $x^2 = 144$ bekommt man $x = 12$, und aus dieser $x^2 = \frac{9}{16}$ erhält man $x = \frac{3}{4}$.

Der zweyte Fall ist, wenn $\frac{c}{a}$ keine Quadratzahl ist, da man sich dann mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{\quad}$ begnügen muß.

Also

Also wenn $x^2 = 12$, so wird $x = \sqrt{12}$, wovon der Werth durch Näherung bestimmt werden kann, wie schon oben gezeigt ist.

Ist aber drittens $\frac{c}{a}$ gar eine negative Zahl, so wird der Werth von x ganz und gar unmöglich oder imaginär, und zeigt an, daß die Auflösung der Aufgabe, welche auf eine solche Gleichung geführt hat, an sich unmöglich sey.

§. 69.

Ehe wir weiter gehn, ist noch zu bemerken, daß, so oft aus einer Zahl die Quadratwurzel gezogen werden muß, dieselbe allezeit einen doppelten Werth erhalte, und sowohl positiv als negativ genommen werden könne, wie schon oben gezeigt worden.

Also wenn man z. B. auf folgende Gleichung kömmt $x^2 = 49$, so ist der Werth von x nicht nur $+7$, sondern auch -7 , und pflegt daher auf folgende Art angedeutet zu werden: $x = \pm \sqrt{49} = \pm 7$, woraus erhellet, daß alle diese Fragen eine doppelte Auflösung zulassen, in vielen Fällen aber, wo z. B. von irgend einer Anzahl Menschen die Frage ist, fällt der negative Werth von selbst weg.

§. 70.

Auch bey dem vorhergehenden Fall, wo die bloße Zahl fehlt, lassen die Gleichungen $ax^2 = bx$ immer zweyerley Werthe für x zu, obgleich nur einer gefunden wird, wenn man durch x dividirt. Denn wenn z. B. diese Gleichung $x^2 = 3x$ vorkommt, wo ein solcher Werth für x gegeben werden soll, daß x^2 dem $3x$ gleich werde, so geschieht dieses, wenn man $x = 3$ setzt, welcher Werth heraus kömmt, wenn man durch x dividirt. Allein außerdem läßt sich auch

Von den reinen quadratischen Gleichungen. 47

auch die Gleichung auflösen, wenn man $x = 0$ setzt; denn da wird $x^2 = 0$ und $3x = 0$. Es ist daher bei allen quadratischen Gleichungen zu merken, daß immer zwei Auflösungen statt finden können, dagegen bei einfachen Gleichungen nie mehr als eine möglich ist.

Wir wollen nun diese reinen quadratischen Gleichungen durch einige Beispiele erläutern.

§. 71.

I. Aufg. Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihren $\frac{1}{3}$ multiplicirt, 24 giebt.

Es sey diese Zahl $= x$, so muß $\frac{1}{2}x$ mit $\frac{1}{3}x$ multiplicirt, 24 werden, woraus diese Gleichung entspringt: $\frac{1}{6}x^2 = 24$. Mit 6 multiplicirt, wird $x^2 = 144$, und wenn man hieraus die Quadratwurzel zieht, so erhält man $x = \pm 12$. Denn wenn $x = +12$, so ist $\frac{1}{2}x = 6$ und $\frac{1}{3}x = 4$, wovon das Product 24 ist. Eben so wenn $x = -12$, so ist $\frac{1}{2}x = -6$ und $\frac{1}{3}x = -4$, und das Product davon ist auch 24.

§. 72.

II. Aufg. Es wird eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn zu derselben erst 5 addirt, und hernach auch 5 subtrahirt, und der Rest mit der ersten Summe multiplicirt wird, 96 herauskomme.

Es sey diese Zahl x , so muß $x + 5$ mit $x - 5$ multiplicirt, 96 geben; woraus diese Gleichung entsteht: $x^2 - 25 = 96$. Man addire 25, so wird $x^2 = 121$, und die Quadratwurzel ausgezogen, giebt $x = 11$. Denn hier wird $x + 5 = 16$, und $x - 5 = 6$. Nun aber ist $6 \cdot 16 = 96$.

Alge

Allgemein könnte man diese Aufgabe folgendergestalt ausdrücken:

Es wird eine Zahl a gegeben, vermittlest welcher eine andere Zahl gesucht werden soll, von der Beschaffenheit, daß die Summe, aus der gegebenen und gesuchten Zahl, multiplicirt in den Unterschied dieser beyden Zahlen ein Product liefere, welches einer zweyten gegebenen Zahl b gleich ist.

Es sey wiederum die unbekannte Zahl x , so muß $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2 = b$ seyn; und hieraus findet sich $x = \sqrt{a^2 + b}$.

§. 73.

III. Aufg. Es wird eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man dieselbe erstlich zu 10 addirt, hernach auch von 10 subtrahirt, jene Summe mit diesem Rest multiplicirt, 51 gebe.

Es sey die Zahl x , so muß $10 + x$ mit $10 - x$ multiplicirt, 51 geben, woraus diese Gleichung entsteht: $100 - x^2 = 51$. Man addire x^2 und subtrahire 51, so kömmt $x^2 = 49$, wovon die Quadratwurzel die gesuchte Zahl $x = 7$ anzeigt.

Setzt man hier wiederum, um die Aufgabe allgemein zu machen, anstatt der Zahl 10, einen Buchstaben, z. B. a , und anstatt 51, den Buchstaben b , so hat man die Gleichung $(a+x)(a-x) = b$, d. i. $a^2 - x^2 = b$ und daher $a^2 = b + x^2$, folglich $x^2 = a^2 - b$ und $x = \sqrt{a^2 - b}$.

§. 74.

IV. Aufg. Drey Personen haben Geld, so oft der erste 7 Rthl. hat, hat der andere 3 Rthl. und so oft der andere 17 Rthl. hat, hat der dritte 5 Rthl. Wenn man aber das Geld des ersten mit dem Gelde des zweyten, und das Geld des zweyten mit dem Gelde des dritten, und auch endlich das Geld des dritten mit dem Gelde des ersten multiplicirt, und her-

Von den reinen quadratischen Gleichungen. 49

hernach diese drey Producte zusammen addirt, so ist die Summe $3830\frac{2}{3}$. Wie viel Geld hat ein jeder gehabt?

Man nehme an, der erste habe x Rthl. gehabt, und da gesagt wird, daß, so oft der erste 7 Rthl. habe, habe der andere 3 Rthl., so heißt dies nichts anders, als daß das Geld des ersten sich zum Gelde des zweyten verhalte wie 7 zu 3. Man setze also, wie $7:3 = x$ zum Gelde des zweyten, welches $= \frac{3}{7}x$ ist. Da ferner das Geld des zweyten zum Gelde des dritten sich verhält, wie 17 zu 5, so setze man, wie $17:5 = \frac{3}{7}x$ zum Gelde des dritten; dieses ist also $\frac{1}{119}x$. Nun multiplicire man das Geld des ersten x mit dem Gelde des zweyten $\frac{3}{7}x$, so wird das Product $= \frac{3}{7}x^2$. Ferner das Geld des andern $\frac{3}{7}x$ mit dem Gelde des dritten $\frac{1}{119}x$ multiplicirt, giebt $\frac{1}{833}x^2$. Und endlich das Geld des dritten $\frac{1}{119}x$ mit dem Gelde des ersten x multiplicirt, giebt $\frac{1}{119}x^2$. Diese drey Producte zusammen machen $\frac{3}{7}x^2 + \frac{1}{833}x^2 + \frac{1}{119}x^2$; welche unter einen Nenner gebracht, $\frac{507}{833}x^2$ geben, welches der Zahl $3830\frac{2}{3}$ gleich gesetzt werden muß.

Also hat man $\frac{507}{833}x^2 = 3830\frac{2}{3}$. Mit 3 multiplicirt, giebt $\frac{1521}{833}x^2 = 11492$, und wenn man mit 833 multiplicirt, erhält man $1521x^2 = 9572836$. Dieses durch 1521 dividirt, wird $x^2 = \frac{9572836}{1521}$, und hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt $x = \frac{3094}{39}$, welcher Bruch sich durch 13 verkleinern läßt, und da kommt $x = \frac{238}{3}$, oder $x = 79\frac{1}{3}$. Daher erhält man ferner $\frac{3}{7}x = 34$ und $\frac{1}{119}x = 10$.

Antw. Der erste hat $79\frac{1}{3}$ Rthl., der zweyte 34 Rthl. und der dritte 10 Rthl. gehabt.

Anmerk. Diese Rechnung läßt sich noch leichter anstellen, wenn man die darin vorkommenden

D

Zahlen

Zahlen in ihre Factoren auflöset, und dabey vorzüglich ihre Quadrate bemerkt. Also ist $507 = 3 \cdot 169$, wo 169 das Quadrat von 13 ist; hernach ist $833 = 7 \cdot 119$ und $119 = 7 \cdot 17$. Da man nun $\frac{3 \cdot 169}{17 \cdot 49}$ $x^2 = 3830\frac{2}{3}$ hat, so multiplicire man mit 3, so kömmt $\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49} x^2 = 11492$ heraus. Diese Zahl löse man auch in ihre Factoren auf, wovon der erste 4 gleich in die Augen fällt, also ist $11492 = 4 \cdot 2873$. Ferner läßt sich 2873 durch 17 theilen und wird $2873 = 17 \cdot 169$; daher unsere Gleichung also aussieht: $\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49} x^2 = 4 \cdot 17 \cdot 169$, welche durch 169 dividirt, $\frac{9}{17 \cdot 49} x^2 = 4 \cdot 17$ wird. Ferner mit $17 \cdot 49$ multiplicirt, und durch 9 dividirt, giebt $x^2 = \frac{4 \cdot 289 \cdot 49}{9}$, wo alle Factoren Quadrate sind, und also die Wurzel $x = \frac{2 \cdot 17 \cdot 7}{3} = 2\frac{2}{3}^8$ wie oben seyn wird.

§. 75.

V. Aufg. Einige Kaufleute schicken zu Errichtung einer Handlung einen Factor nach Archangel. Jeder von diesen Kaufleuten giebt hiezu zehnmal so viel Rthl. als der Personen sind. Der Factor gewinnt mit jedem 100 Rthl. zweymal so viel, als Personen sind. Wenn man dann $\frac{1}{100}$ des ganzen Gewinnstes mit $2\frac{2}{9}$ multiplicirt, so kömmt die Zahl der Kaufleute heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

Die Anzahl derselben sey $= x$, und da ein jeder $10x$ Rthl. eingelegt hat, so war das ganze Capital $= 10x^2$ Rthl. Nun gewinnt der Factor mit 100 Rthl. $2x$ Rthl., folglich gewinnt er $\frac{1}{5}x^3$ mit dem ganzen Capital $10x^2$. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieses Gewinn-

6tes Cap. Von den vermisch. quadr. Gleich. 51

minnstes ist daher $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, d. i. mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, $\frac{20}{4500}x^3$ oder $\frac{1}{225}x^3$ giebt, welches der Zahl der x gleich seyn muß. Daher hat man diese Gleichung $\frac{1}{225}x^3 = x$, oder $x^3 = 225x$, welche cubisch zu seyn scheint. Weil man aber durch x dividiren kann, so kömmt diese quadratische Gleichung heraus: $x^2 = 225$, mithin $x = 15$.

Antw. Es sind daher in allem 15 Kaufleute gewesen, und ein jeder hat 150 Rthl. eingelegt.

VI. Capitel.

Von der Auflösung der vermischten quadratischen Gleichungen.

§. 76.

Eine vermischte quadratische Gleichung ist eine solche, in welcher dreyerley Glieder vorkommen, nemlich einige, welche das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten, wie ax^2 ; zweytens auch solche, worin die unbekannte Zahl selbst vorkömmt, als bx , und endlich solche Glieder, welche blos aus bekannten Zahlen zusammengesetzt sind. Da nun zwey oder mehrere Glieder von einer Art in eins zusammen gezogen, und alle auf eine Seite des Zeichens $=$ gebracht werden können, so wird die Form dieser Gleichung folgendergestalt beschaffen seyn:

$$ax^2 \pm bx \pm c = 0.$$

Wie nun aus solchen Gleichungen der Werth von x gefunden werden kann, soll in diesem Capitel gezeigt werden. Es kann dies aber auf zweyerley Art geschehen.

D 2

§. 77.