Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

VII. Capitel. Von der Ausziehung der Wurzeln aus den vieleckigen Zahlen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50547

$45 - 75$, mit $x + 3$ multiplicirt, wird $48x^2 = 45x^2 + 60x - 225$, subtrahirt $45x^2$, so hat man $3x^2 = 60x - 225$, oder $x^2 = 20x - 75$. Hieraus wird $x = 10 \pm \sqrt{(100 - 75)} = 10 \pm \sqrt{25}$, also $x = 10 \pm 5$ gefunden.

Antw. Es giebt bey diesem Falle zwey Auflösungen. Nach dem ersten hat der erste 15 Ellen, und der andere 18 Ellen. Weil nun der erste 18 Ellen für 24 Rthl. verkauft hat, so hat er aus seinen 15 Ellen 20 Rthl. gelöset, der andere aber hätte aus 15 Ellen $12\frac{1}{2}$ Rthl. gelöset, hat also aus seinen 18 Ellen 15 Rthl. gelöset, also beyde zusammen 35 Rthl.

Nach der andern Auflösung hat der erste 5 Ellen gehabt, folglich der andere 8 Ellen, also hätte der erste 8 Ellen für 24 Rthl. verkauft, und hat also aus seinen 5 Ellen 15 Rthl. gelöset. Der andere hätte 5 Ellen für $12\frac{1}{2}$ Rthl. verkauft, hat also aus seinen 8 Ellen 20 Rthl. gelöset, folglich beyde zusammen eben wieder 35 Rthl.

VII. Capitel.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus den vieleckigen Zahlen.

§. 94.

Wir haben oben (1 Th. §. 436) gezeigt, wie die vieleckigen Zahlen gefunden werden können; was wir aber daselbst eine Seite genannt haben, wird auch eine Wurzel genannt. Wenn nun die Wurzel durch x angedeutet wird, so werden daraus die vieleckigen Zahlen folgendergestalt gefunden:

Das

Das 3eck ist $\frac{x^2+x}{2}$
- 4eck - x^2
- 5eck - $\frac{3x^2-x}{2}$
- 6eck - $2x^2-x$
- 7eck - $\frac{5x^2-3x}{2}$
- 8eck - $3x^2-2x$
- 9eck - $\frac{7x^2-5x}{2}$
- 10eck - $4x^2-3x$
- neck - $\frac{(n-2)x^2-(n-4)x}{2}$

Durch Hülfe dieser Formeln ist es nun leicht, für eine jede gegebene Seite oder Wurzel eine verlangte vieleckige Zahl, so groß auch die Zahl der Ecken seyn mag, zu finden, wie schon oben hinlänglich gezeigt worden. Wenn aber umgekehrt eine vieleckige Zahl von einer gewissen Anzahl Seiten gegeben ist, so ist es weit schwerer, die Wurzel oder Seite davon zu finden, und wird dazu die Auflösung quadratischer Gleichungen erfordert, daher diese Sache hier besonders abgehandelt zu werden verdient. Wir wollen hierbey der Ordnung nach von den dreyeckigen Zahlen anfangen, und zu den mehreckigen fortschreiten.

§. 96.

Es sey daher 91 die gegebene dreyeckige Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man nun diese Wurzel = x, so muß $\frac{x^2+x}{2}$ der Zahl 91 gleich seyn. Man multiplicire mit 2, so hat man $x^2+x=182$, woraus $x^2=-x+182$ gefunden wird und also $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+182)}$ $=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{729}{4}}$, folglich $x=-\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=13$; daher ist die verlangte Dreyeckswurzel = 13, denn das Dreyeck von 13 ist 91.

§. 97.

§. 97.

Es sey nunmehr auf eine allgemeine Art a die gegebene dreyeckige Zahl, wovon die Wurzel gefunden werden soll.

Setzt man dieselbe = x, so wird $\frac{x^2+x}{2} = a$, oder $x^2 + x = 2a$, oder ferner $x^2 = -x + 2a$, woraus $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 2a)}$, oder $x = -\frac{1 + \sqrt{(8a+1)}}{2}$ gefunden wird.

Hieraus ergiebt sich diese Regel. Man multiplicire die gegebene dreyeckige Zahl mit 8, und zum Product addire 1; aus der Summe ziehe man die Quadratwurzel; von derselben subtrahire 1, den Rest dividire durch 2, so kömmt die gesuchte Dreyeckswurzel heraus.

§. 98.

Es haben also alle dreyeckige Zahlen diese Eigenschaft, daß, wenn man dieselben mit 8 multiplicirt, und 1 dazu addirt, immer eine Quadratzahl herauskommen müsse, wie man aus folgendem Täfelchen sehen kann:

III. Eck.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, u. s. f.

Achtfaches Dreyeck + 1

9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441, 529, u. s. f.

Ist nun die gegebene Zahl a nicht so beschaffen, so ist es ein Zeichen, daß dieselbe keine wirkliche oder vollkommene dreyeckige Zahl sey, oder die Wurzel davon nicht rational angegeben werden könne.

§. 99.

Man suche nach dieser Regel die Dreyeckswurzel aus der Zahl 210, so ist a = 210 und 8a + 1 = 1681, wovon die Quadratwurzel 41 ist; woraus man sieht, daß die Zahl 210 wirklich unter die dreyeckigen Zahlen gehört, wovon die Wurzel $= \frac{41-1}{2} = 20$.

Wäre aber die Zahl 4 als ein Dreyeck gegeben, wovon die Wurzel gesucht werden sollte, so wäre dieselbe $= \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ und also irrational. Es wird aber auch wirklich von dieser Wurzel, nemlich von $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, das Dreyeck folgendergestalt gefunden:

Da $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$, so ist $x^2 = \frac{17-\sqrt{33}}{2}$. Hierzu $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ addirt, wird $x^2 + x = \frac{17-\sqrt{33}}{2} + \frac{\sqrt{33}-1}{2} = \frac{16}{2} = 8$, und folglich die dreyeckige Zahl $\frac{x^2+x}{2} = 4$.

§. 100.

Da die viereckigen Zahlen mit den Quadraten einerley sind, so hat dies keine Schwierigkeit. Denn setzt man die gegebene viereckige Zahl $= a$ und ihre Viereckswurzel $= x$, so wird $x^2 = a$ und also $x = \sqrt{a}$. Die Quadrat- und Viereckswurzel sind also einerley.

§. 101.

Wir wollen daher sogleich zu den fünfeckigen Zahlen übergehen.

Es sey nun 22 eine fünfeckige Zahl und die Wurzel derselben $= x$, so muß (§. 94) $\frac{3x^2-x}{2} = 22$, oder $3x^2 - x = 44$, oder $x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$ seyn; woraus nach der bekannten Regel $x = \frac{1}{6} + \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{44}{3})}$, d. i. $x = \frac{1+\sqrt{(529)}}{6} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = 4$. Also ist 4 die gesuchte Fünfeckswurzel aus der Zahl 22.

§. 102.

Es sey nun diese Frage vorgelegt: wenn das gegebene Fünfeck $= a$ ist, wie soll davon die Wurzel gefunden werden?

Setzt man diese gesuchte Wurzel $= x$, so hat man diese Gleichung $\frac{3x^2 - x}{2} = a$, oder $3x^2 - x = 2a$, oder $x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3}$; woraus $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3}\right)}$, d. i. $x = \frac{1 + \sqrt{(24a+1)}}{6}$. Wenn daher a ein wirkliches Fünfeck ist, so muß $24a + 1$ immer eine Quadratzahl seyn.

Es sey z. B. 330 das gegebene Fünfeck, so wird die Wurzel davon $x = \frac{1 + \sqrt{7921}}{6} = \frac{1 + 89}{6} = 15$ seyn.

§. 103.

Es sey nun a eine gegebene sechseckige Zahl, wovon die Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel $= x$, so wird $2x^2 - x = a$, oder $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, woraus nun $x = \frac{1}{4} + \sqrt{(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}a)} = \frac{1 + \sqrt{(8a+1)}}{4}$ gefunden wird. Wenn also a ein wirkliches Sechseck ist, so muß $8a + 1$ ein Quadrat werden; woraus man sieht, daß alle sechseckige Zahlen unter den dreyeckigen mit begriffen sind; die Wurzeln aber sind anders beschaffen.

Es sey z. B. die sechseckige Zahl 1225, so wird die Wurzel davon $x = \frac{1 + \sqrt{9801}}{4} = \frac{1 + 99}{4} = 25$ seyn.

§. 104.

Es sey ferner a eine gegebene siebeneckige Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel = x, so hat man $\frac{5x^2-3x}{2}$ $= a$ (§. 94), oder $5x^2 - 3x = 2a$, also $x^2 = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}a$; woraus ferner $x = \frac{3}{10} + \sqrt{(\frac{9}{100} + \frac{2}{5}a)} = \frac{3+\sqrt{(40a+9)}}{10}$ gefunden wird. Alle siebeneckige Zahlen sind daher also beschaffen, daß, wenn man dieselben mit 40 multiplicirt und zum Product 9 addirt, die Summen immer Quadratzahlen werden.

Es sey z. B. das gegebene Siebeneck 2059, so findet man die Wurzel davon $x = \frac{3+\sqrt{(82369)}}{10} = \frac{3+287}{10} = 29$.

§. 105.

Es sey nun a eine gegebene achteckige Zahl, wovon die Wurzel x gefunden werden soll.

Man hat daher $3x^2 - 2x = a$ (§. 94), oder $x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a$, woraus $x = \frac{1}{3} + \sqrt{(\frac{1}{9} + \frac{a}{3})} = \frac{1+\sqrt{(3a+1)}}{3}$ gefunden wird. Alle achteckige Zahlen haben daher die Beschaffenheit, daß, wenn man mit 3 multiplicirt und dazu 1 addirt, die Summe immer eine Quadratzahl werde.

Es sey z. B. 3816 eine achteckige Zahl, so wird die Wurzel davon $x = \frac{1+\sqrt{11449}}{3} = \frac{1+107}{3} = 36$ seyn.

§. 106.

Es sey endlich a eine gegebene n eckige Zahl, wovon die Wurzel x gesucht werden soll, so hat man (§. 94) diese Gleichung.

$\frac{(n-2)x^2-(n-4)x}{2} = a$, oder $(n-2)x^2 - (n-4)x = 2a$, also $x^2 = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$, woraus x =

$\frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}\right)}$, oder $x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}\right)}$ gefunden wird, und folglich $x = \frac{n-4+\sqrt{(8(n-2)a+(n-4)^2)}}{2(n-2)}$.

Diese Formel enthält eine allgemeine Regel, um aus gegebenen Zahlen alle mögliche vieleckige Wurzeln zu finden.

Um dieses mit einem Beyspiel zu erläutern, so sey diese 24eckige Zahl 3009 gegeben. Weil nun hier $a = 3009$ und $n = 24$, folglich $n-2 = 22$ und $n-4 = 20$, so bekommen wir die Wurzel durch folgende Gleichung: $x = \frac{20+\sqrt{(529584+400)}}{44} = \frac{20+728}{44} = 17$.

Zusatz. Hier will ich nun das Versprechen erfüllen, welches ich im zweyten Theile dieser Algebra zu Ende des 42 §. gemacht habe.

Um von der dortigen Aufgabe eine allgemeinere Auflösung zu geben, so wollen wir die Anzahl der Kinder $= y$ setzen, so muß das letzte, oder welches einerley ist, das yte Kind $y . 100$ Rthl. bekommen haben, weil der 10te Theil des übrigen $= 0$ gewesen seyn muß. Da nun ein jedes gleich viel bekommen haben soll, so muß das ganze Vermögen $y^2 . 100$ Rthl. betragen. Laut den Bedingungen der Aufgabe ist der Theil des ersten Kindes $= 100 + \frac{(y^2-1)\,100}{2}$. Wir haben demnach folgende Gleichung.

$$100 + \frac{(y^2-1)\,100}{10} = y . 100$$

$$100 + (y^2-1)\,10 = y . 100$$

$$10 + y^2 - 1 = y . 10$$

$$\text{daher } y^2 = 10 . y - 9$$

$$\text{folglich } y = 5 \pm \sqrt{16} = 5 \pm 4.$$

Die Anzahl der Kinder ist also entweder $5 + 4 = 9$, oder $5 - 4 = 1$ gewesen; im ersten Fall ist das Vermögen 8100 Rthl., im andern Fall aber 100 Rthl.

Eulers Auflösung giebt nur einen Werth, nemlich 9 Kinder und 8100 Rthl hinterlassenes Vermögen. Sonderbar! daß bisher noch kein Schriftsteller die Auflösung dieser Aufgabe so gab, als ich sie hier mitgetheilt habe.

Um die Aufgabe allgemeiner zu machen, so setze man darin statt

$$100, \ a$$
und statt $10, \ n$

so hat das letzte oder jedes Kind ay erhalten, und das ganze hinterlassene Vermögen wäre ay^2. Den Bedingungen der Aufgabe gemäß würde das erste Kind $a + \frac{(y^2-1)a}{n}$ erhalten. Demnach muß $a + \frac{(y^2-1)a}{n} = ay$ seyn, $1 + \frac{y^2-1}{n} = y$, $n + y^2 - 1 = ny$, daher $y^2 = ny - (n-1)$, folglich $y = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4} - (n-1)\right)} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2 - 4n + 4}{4}\right)} = \frac{n}{2} \pm \frac{(n-2)}{2} = \frac{n \pm (n-2)}{2}$, also y entweder $= n - 1$ oder $= 1$.

VIII. Capitel.

Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus Binomien.

§. 107.

Ein Binomium nennt man in der Algebra eine aus zwey Theilen bestehende Zahl, wovon eine oder auch beyde das quadratische Wurzelzeichen enthalten.

Also ist $3 + \sqrt{5}$ ein Binomium, imgleichen $\sqrt{8} + \sqrt{3}$, und es ist gleich viel, ob diese beyden Theile mit dem Zeichen $+$ oder $-$ verbunden sind. Daher wird $3 - \sqrt{5}$ eben so wohl ein Binomium genannt, als $3 + \sqrt{5}$.

Anmerk. Binomium, (Binomialgröße, zweytheilige Größe) wird überhaupt eine jede Größe genannt,