



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

VIII. Capitel. Von der Ausziehung der Quadratwurzel aus Binomien.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-50547](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-50547)

bisher noch kein Schriftsteller die Auflösung dieser Aufgabe so gab, als ich sie hier mitgetheilt habe.

Um die Aufgabe allgemeiner zu machen, so setze man darin statt

$$100, a$$

$$\text{und statt } 10, n$$

so hat das letzte oder jedes Kind ay erhalten, und das ganze hinterlassene Vermögen wäre ay^2 . Den Bedingungen der Aufgabe

gemäß würde das erste Kind $a + \frac{(y^2 - 1)a}{n}$ erhalten. Demnach

muß $a + \frac{(y^2 - 1)a}{n} = ay$ seyn, $1 + \frac{y^2 - 1}{n} = y$, $n +$

$y^2 - 1 = ny$, daher $y^2 = ny - (n - 1)$, folglich $y =$

$$\frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4} - (n - 1)\right)} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2 - 4n + 4}{4}\right)} = \frac{n}{2}$$

$$\pm \frac{(n - 2)}{2} = \frac{n \pm (n - 2)}{2}, \text{ also } y \text{ entweder } = n - 1 \text{ oder } = 1.$$

VIII. Capitel.

Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus Binomien.

§. 107.

Ein Binomium nennt man in der Algebra eine aus zwey Theilen bestehende Zahl, wovon eine oder auch beyde das quadratische Wurzelzeichen enthalten.

Also ist $3 + \sqrt{5}$ ein Binomium, imgleichen $\sqrt{8} + \sqrt{3}$, und es ist gleich viel, ob diese beyden Theile mit dem Zeichen $+$ oder $-$ verbunden sind. Daher wird $3 - \sqrt{5}$ eben so wohl ein Binomium genannt, als $3 + \sqrt{5}$.

Anmerk. Binomium, (Binomialgröße, zweythellige Größe) wird überhaupt eine jede Größe genannt,

nannt, die aus zweyen durch $+$ oder $-$ verbundenen Theilen besteht, z. B. $a + b$, $n - m$, $1 + y^2$. Es läßt sich daher eine jede Zahl leicht auf mehrere Weise in eine Binomialzahl verwandeln, indem man sie in zwey andere zerfällt, die zusammengesetzt oder von einander abgezogen, diese Zahl ausmachen, z. B. $548 = 500 + 48 = 508 + 40 = 540 + 8 = 600 - 52$ u. s. f. Selbst kann dieses geschehen, wenn die Zahl nur mit einer Ziffer geschrieben wird, denn z. B. $7 = 6 + 1 = 4 + 3 = 8 - 1 = 12 - 5$ u. s. w.

Euler nimmt hier das Wort Binomium in einem engerm Verstande, indem er nur solche Ausdrücke darunter versteht, welche zum Theil rational, zum Theil irrational sind. Euklides in seinem zehnten Buche nimmt solches in einem noch engerm, denn, außer daß einer oder beyde Theile irrational seyn müssen, so dürfen solche auch nur durch das Zeichen $+$ mit einander verbunden seyn. Er macht davon sechs Gattungen. Deutsche Leser finden solche in Euklids Elementen funfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersezt von Johann Friedrich Lorenz. Halle, 1781. Seite 205.

§. 108.

Diese Binomien sind deswegen hauptsächlich merkwürdig, weil man bey Auflösung der quadratischen Gleichungen jedesmal auf solche Formeln kömmt, so oft die Auflösung nicht in rationalen Zahlen geschehen kann.

Also wenn z. B. diese Gleichung vorkömmt $x^2 = 6x - 4$, so wird $x = 3 + \sqrt{5}$. Aus dieser Ursache kommen nun solche Formeln in den algebraischen Rechnungen sehr häufig vor, und wir haben auch schon oben gezeigt, wie damit die gewöhnlichen Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division angestellt werden sollen. Jetzt aber sind wir erst im Stande zu zeigen, wie aus solchen Formeln auch die Quadratwurzeln ausgezogen werden können, wofern nemlich eine solche Ausziehung statt findet, indem im entgegengesetzten Fall nur

§ 4

noch

noch ein Wurzelzeichen vorgefetzt wird, nemlich von $3 + \sqrt{2}$ ist die Quadratwurzel $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$.

§. 109.

Man hat daher zuerst zu merken, daß die Quadrate von solchen Binomien wieder dergleichen Binomien werden, in welchen so gar der eine Theil rational ist.

Denn sucht man das Quadrat von $a + \sqrt{b}$, so wird dasselbe $(a^2 + b) + 2a\sqrt{b}$. Wenn also von dieser Formel $(a^2 + b) + 2a\sqrt{b}$ wieder die Quadratwurzel verlangt würde, so wäre dieselbe $a + \sqrt{b}$, welche unstreitig deutlicher zu begreifen ist, als wenn man vor jene Formel noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte. Eben so, wenn man von dieser Formel $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ das Quadrat nimmt, so wird dasselbe $(a + b) + 2\sqrt{ab}$, daher auch umgekehrt von dieser Formel $(a + b) + 2\sqrt{ab}$ die Quadratwurzel $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ seyn wird; welcher Ausdruck wieder verständlicher ist, als wenn man vor jene Formel noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte.

§. 110.

Es kommt daher darauf an, wie ein Kennzeichen zu finden sey, woraus in jedem Fall beurtheilt werden kann, ob eine solche Quadratwurzel Statt finde oder nicht. Wir wollen zu diesem Ende mit einer leichten Formel den Anfang machen, und sehen, ob man aus diesem Binomio $5 + 2\sqrt{6}$ solchergestalt die Quadratwurzel finden könne.

Man setze also, diese Wurzel sey $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, wovon das Quadrat $(x + y) + 2\sqrt{xy}$ ist; also muß dieses Quadrat jener Formel $5 + 2\sqrt{6}$ gleich seyn. Folglich muß der rationale Theil $x + y$ gleich 5 seyn, und der irrationale $2\sqrt{xy}$ muß $2\sqrt{6}$ gleich

Von den Quadratwurzeln aus Binomien. 73

gleich seyn; daher bekommt man $\sqrt{xy} = \sqrt{6}$, und die Quadrate genommen, $xy = 6$. Da nun $x + y = 5$, so wird hieraus $y = 5 - x$, welcher Werth in der Gleichung $xy = 6$ gesetzt, $5x - x^2 = 6$ oder $x^2 = 5x - 6$ giebt; daher $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{25}{4} - \frac{24}{4})} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = 3$; also $x = 3$ und $y = 2$, folglich wird aus $5 + 2\sqrt{6}$ die Quadratwurzel $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ seyn.

§. 111.

Da wir jetzt diese beyde Gleichungen erhalten haben I.) $x + y = 5$ und II.) $xy = 6$, so wollen wir hier einen besondern Weg anzeigen, um daraus x und y zu finden.

Da $x + y = 5$, so nehme man die Quadrate $x^2 + 2xy + y^2 = 25$. Nun bemerke man, daß $x^2 - 2xy + y^2$ das Quadrat von $x - y$ ist. Man subtrahire daher von jener Gleichung, nemlich von $x^2 + 2xy + y^2 = 25$, diese $xy = 6$ viermal genommen, d. i. $4xy = 24$, so erhält man $x^2 - 2xy + y^2 = 1$, und wenn man hieraus die Quadratwurzel zieht, $x - y = 1$, so wird, weil $x + y = 5$ ist, $x = 3$ und $y = 2$ gefunden. Daher die gesuchte Quadratwurzel von $5 + 2\sqrt{6}$ seyn wird $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

§. 112.

Wir wollen nun dieses allgemeine Binomium $a + \sqrt{b}$ betrachten, und die Quadratwurzel davon $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ setzen, so erhalten wir diese Gleichung*) $(x + y) + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$, also $x + y = a$ und $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$, oder $4xy = b$. Von $x + y = a$ ist das Quadrat $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$, hiervon die Gleichung $4xy = b$ subtrahirt, giebt $x^2 - 2xy + y^2 =$

§ 5
 $a^2 - b$

*) Die Parenthesen sind hier nicht schlechterdings nothwendig; man bedient sich derselben nur, um den rationalen Theil der Formel von dem irrationalen zu unterscheiden.

$a^2 - b$, wovon die Quadratwurzel $x - y = \sqrt{a^2 - b}$ ist. Da nun $x + y = a$, so finden wir $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$ und $y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$, daher die verlangte Quadratwurzel aus dem Binomio $a + \sqrt{b}$ seyn wird:

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

§. 113.

Diese Formel ist allerdings verwickelter, als wenn man vor das gegebene Binomium $a + \sqrt{b}$ schlechtweg das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ gesetzt hätte, nemlich $\sqrt{a + \sqrt{b}}$. Allein jene Formel kann weit einfacher werden, wenn die Zahlen a und b so beschaffen sind, daß $a^2 - b$ ein Quadrat wird, weil alsdenn das $\sqrt{}$ hinter dem $\sqrt{}$ wegfällt. Hieraus erkennt man, daß man nur in solchen Fällen aus dem Binomio $a + \sqrt{b}$ die Quadratwurzel bequem ausziehen könne, wenn $a^2 - b = c^2$; weil alsdann die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ seyn wird. Wenn aber $a^2 - b$ keine Quadratzahl ist, so läßt sich die Quadratwurzel nicht süglicher anzeigen, als durch Vorsetzung des $\sqrt{}$ Zeichens.

§. 114.

Ist das Binomium nicht $a + \sqrt{b}$, sondern $a - \sqrt{b}$, so wird, bey der vorigen Voraussetzung, daß $a^2 - b = c^2$, die Quadratwurzel aus demselben nothwendig $\sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ seyn müssen.

Denn nimmt man von dieser Formel das Quadrat, so wird solches $a - 2\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{4}} = a - \sqrt{a^2 - c^2}$. Da nun $c^2 = a^2 - b$, so ist $a^2 - c^2 = b$; daher dieses Quadrat $= a - \sqrt{b}$.

§. 115.

§. 115.

Wenn also aus einem solchen Binomio $a \pm \sqrt{b}$ die Quadratwurzel gezogen werden soll, so subtrahirt man von dem Quadrat des rationalen Theils a^2 das Quadrat des irrationalen Theils b ; aus dem Reste ziehe man die Quadratwurzel, welche hier durch den Buchstaben c ausgedrückt wird, so ist die verlangte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

§. 116.

Man suche z. B. die Quadratwurzel aus $2 + \sqrt{3}$, so ist $a = 2$ und $b = 3$; daher $a^2 - b = c^2 = 1$ und also $c = 1$; folglich die verlangte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Es sey ferner dieses Binomium $11 + 6\sqrt{2}$ gegeben, woraus die Quadratwurzel gefunden werden soll. Hier ist nun $a = 11$ und $\sqrt{b} = 6\sqrt{2}$; daher $b = 36 \cdot 2 = 72$ und $a^2 - b = 49$; folglich $c = 7$. Daher die Quadratwurzel aus $11 + 6\sqrt{2}$ seyn wird $\sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$.

Man suche die Quadratwurzel aus $11 - 2\sqrt{30}$, so ist hier $a = 11$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{30}$, daher $b = 4 \cdot 30 = 120$ und $a^2 - b = 1$ und $c = 1$. Folglich die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

§. 117.

Diese Regel findet auch Statt, wenn sogar imaginäre oder unmögliche Zahlen vorkommen.

Es sey z. B. folgendes Binomium $1 + 4\sqrt{-3}$ gegeben, so ist $a = 1$ und $\sqrt{b} = 4\sqrt{-3}$; daher $b = -48$ und $a^2 - b = 49$. Daher $c = 7$. Folglich die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{4} + \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{-3}$.

Es

Es sey ferner gegeben $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Hier ist $a = -\frac{1}{2}$, $\sqrt{b} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $b = \frac{1}{4} \cdot -3 = -\frac{3}{4}$. Daher $a^2 - b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ und $c = 1$; folglich die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Noch ist folgendes Beyspiel merkwürdig, wo aus $2\sqrt{-1}$ die Quadratwurzel gesucht werden soll.

Weil hier kein rationaler Theil ist, so ist $a = 0$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{-1}$; daher $b = -4$ und $a^2 - b = 4$, also $c = 2$, woraus die gesuchte Quadratwurzel ist: $\sqrt{1 + \sqrt{-1}} = 1 + \sqrt{-1}$, wovon das Quadrat ist: $1 + 2\sqrt{-1} - 1 = 2\sqrt{-1}$.

§. 118.

Sollte nun auch die Auflösung einer solchen Gleichung vorkommen, wie $x^2 = a \pm \sqrt{b}$ und es wäre $a^2 - b = c^2$, so würde man daraus diesen Werth für x erhalten $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, und dies kann in vielen Fällen großen Nutzen haben.

Es sey z. B. $x^2 = 17 + 12\sqrt{2}$, so wird $x = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$.

§. 119.

Dieses findet vorzüglich bey Auflösung einiger Gleichungen vom vierten Grade statt, als $x^4 = 2ax^2 + d$. Denn setzt man hier $x^2 = y$, so wird $x^4 = y^2$, daher unsere Gleichung $y^2 = 2ay + d$. Hieraus findet man $y = a \pm \sqrt{a^2 + d}$, daher für die angenommene Gleichung $x^2 = a \pm \sqrt{a^2 + d}$ seyn wird, woraus folglich noch die Quadratwurzel gezogen werden muß. Da nun hier $\sqrt{b} = \sqrt{a^2 + d}$ also $b = a^2 + d$, so wird $a^2 - b = -d$. Wäre nun $-d$ ein Quadrat, nemlich c^2 oder $d = -c^2$, so kann

Von den Quadratwurzeln aus Binomien. 77

kann die Wurzel angezeigt werden. Es sey daher $d = -c^2$, oder es sey diese Gleichung vom vierten Grade gegeben $x^4 = 2ax^2 - c^2$, so wird daraus der Werth von x also ausgedrückt: $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

§. 120.

Wir wollen dieses durch einige Beispiele erläutern.

I. Man suche zwey Zahlen, deren Product 105 sey, und wenn man ihre Quadrate zusammen addirt, so sey die Summe = 274.

Man setze diese Zahlen seyen x und y , so hat man sogleich diese zwey Gleichungen: I.) $xy = 105$ und II.) $x^2 + y^2 = 274$. Aus der ersten findet man $y = \frac{105}{x}$, welcher Werth in der andern für y gesetzt, $x^2 + \frac{105^2}{x^2} = 274$ giebt. Mit x^2 multiplicirt, wird $x^4 + 105^2 = 274x^2$, oder $x^4 = 274x^2 - 105^2$.

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der obigen, so wird $2a = 274$ und $-c^2 = -105^2$; daher $c = 105$ und $a = 137$. Also finden wir:

$$x = \sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4,$$

folglich entweder $x = 15$, oder $x = 7$. Im erstern Falle wird $y = 7$, im letztern aber $y = 15$. Daher die beyden gesuchten Zahlen 15 und 7 sind.

§. 121.

Es ist aber gut hier noch zu bemerken, daß die Rechnung weit leichter gemacht werden kann. Denn da $x^2 + 2xy + y^2$, und auch $x^2 - 2xy + y^2$ ein Quadrat ist, wir aber wissen, was sowohl $x^2 + y^2$ als xy ist, so dürfen wir nur das letztere doppelt genommen, sowohl zu dem ersten addiren, als auch davon

davon subtrahiren, wie sich aus dem folgenden sehen läßt: $x^2 + y^2 = 274$. Erstlich $2xy = 210$ addirt, giebt $x^2 + 2xy + y^2 = 484$ und $x + y = 22$. Hernach $2xy$ subtrahirt, giebt $x^2 - 2xy + y^2 = 64$ und $x - y = 8$. Also $2x = 30$ und $2y = 14$, woraus sich zeigt, daß $x = 15$ und $y = 7$. Auf diese Art kann auch folgende allgemeine Aufgabe aufgelöst werden.

II. Man suche zwei Zahlen, davon das Product = m , und die Summe ihrer Quadrate = n ?

Die gesuchten Zahlen seyen x und y , so hat man die beiden folgenden Gleichungen: I.) $xy = m$, II.) $x^2 + y^2 = n$. Nun aber ist $2xy = 2m$, woraus erstlich, wenn man $2xy$ addirt, $x^2 + 2xy + y^2 = n + 2m$ und $x + y = \sqrt{n + 2m}$ wird. Hier auf $2xy$ subtrahirt, giebt $x^2 - 2xy + y^2 = n - 2m$ und $x - y = \sqrt{n - 2m}$, also $x = \frac{1}{2} \sqrt{n + 2m} + \frac{1}{2} \sqrt{n - 2m}$ und $y = \frac{1}{2} \sqrt{n + 2m} - \frac{1}{2} \sqrt{n - 2m}$.

§. 122.

III. Es sey ferner diese Aufgabe gegeben: man suche zwei Zahlen, deren Product = 35 und die Differenz ihrer Quadrate = 24 ist.

Es sey x die größere und y die kleinere, so hat man diese beiden Gleichungen $xy = 35$ und $x^2 - y^2 = 24$. Da nun hier die vorigen Vortheile nicht Statt finden, so verfähre man nach der gewöhnlichen Art, und da giebt die erste $y = \frac{35}{x}$, welcher Werth in der andern für y gesetzt, $x^2 - \frac{1225}{x^2} = 24$ giebt. Wenn man nun mit x^2 multiplicirt, so hat man $x^4 - 1225 = 24x^2$ und $x^4 = 24x^2 + 1225$. Da

Da hier das letzte Glied das Zeichen $+$ hat, so kann die obige Gleichung nicht angewandt werden, weil nemlich $c^2 = -1225$, und also c imaginär würde.

Man setze daher $x^2 = z$, so hat man $z^2 = 24z + 1225$, hieraus findet man $z = 12 \pm \sqrt{144 + 1225}$ oder $z = 12 \pm 37$, daher $x^2 = 12 \pm 37$, d. i. entweder $x^2 = 49$ oder $x^2 = -25$.

Nach dem ersten Werth wird $x = 7$ und $y = 5$. Nach dem andern aber wird $x = \sqrt{-25}$ und $y = \frac{35}{\sqrt{-25}}$, oder $y = \sqrt{\frac{1225}{-25}}$, oder $y = \sqrt{-49}$.

§. 123.

Zum Beschluß dieses Capitels wollen wir noch folgende Aufgabe beifügen:

IV. Man suche zwei Zahlen, deren Summe, Product und die Differenz ihrer Quadrate einander gleich seyen.

Die größere Zahl sey x , die kleinere y , so müssen diese drei Formeln einander gleich seyn: I.) Summe $x + y$, II.) Product xy , III.) Differenz der Quadrate $x^2 - y^2$. Vergleicht man die erste mit der zweyten, so hat man $x + y = xy$ und daraus suche man x . Man wird also $y = xy - x$ oder $y = x(y - 1)$ haben, und daraus wird $x = \frac{y}{y-1}$; daher wird, wenn man beyderseits y addirt, $x + y = \frac{y^2}{y-1}$ und $xy = \frac{y^2}{y-1}$, und also ist die Summe dem Product schon gleich. Diesem muß aber noch die Differenz der Quadrate gleich seyn. Es wird aber $x^2 - y^2 = \frac{y^2}{y^2-2y+1} - y^2 = \frac{-y^4+2y^3}{y^2-2y+1}$, welches dem obigen Werthe $\frac{y^2}{y-1}$ gleich seyn muß; daher

bestimmt man $\frac{y^2}{y-1} = \frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^2}$; dieses durch y^4 dividirt, wird $\frac{1}{y-1} = \frac{-y^2+2y}{(y-1)^2}$; ferner mit $y-1$ multiplicirt, wird $1 = \frac{-y^2+2y}{y-1}$, und nochmals mit $y-1$ multiplicirt, giebt $y-1 = -y^2+2y$; folglich $y_2 = y+1$. Hieraus findet man $y = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}+1\right)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ oder $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; und daher erhalten wir $x = \frac{1+\sqrt{5}}{(\sqrt{5})-1}$. Um hier die Irrationalität aus dem Nenner wegzubringen, so multiplicirt man oben und unten mit $\sqrt{5}+1$, so bestimmt man $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Antw. Also die größere der gesuchten Zahlen $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, und die kleinere $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ihre Summe ist also $x+y = 2+\sqrt{5}$, ferner das Product $xy = 2+\sqrt{5}$, und da $x_2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ und $y^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, so wird die Differenz der Quadrate $x^2 - y^2 = 2+\sqrt{5}$.

§. 124.

Diese Auflösung ist aber etwas mühsam. Auf folgende Art kann man leichter zum Zweck gelangen. Man setze erstlich die Summe $x+y$, der Differenz der Quadrate $x^2 - y^2$ gleich, so hat man $x+y = x^2 - y^2$. Hier kann man durch $x+y$ dividiren, weil $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, und da erhält man $1 = x-y$, folglich $x = y+1$; daher $x+y = 2y+1$ und $x^2 - y^2 = 2y+1$, welchem noch das Product $xy = y^2 + y$ gleich seyn muß. Man hat

Von den Quadratwurzeln aus Binomien. 81

hat also $y^2 + y = 2y + 1$, oder $y^2 = y + 1$, woraus, wie oben, $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gefunden wird.

§. 125.

V. Dieses leitet uns noch auf folgende Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe, Product, und die Summe ihrer Quadrate einander gleich sind.

Die gesuchten Zahlen seyen x und y , so müssen diese drei Formeln einander gleich seyn I.) $x + y$, II.) xy , und III.) $x^2 + y^2$.

Setzt man die erste der zweyten gleich $x + y = xy$, so findet man daraus $x = \frac{y}{y-1}$ und $x + y = \frac{y^2}{y-1}$, welchem auch xy gleich ist. Hieraus aber wird

$x^2 + y^2 = \frac{y^2}{y^2 - 2y + 1} + y^2$, welches $\frac{y^2}{y-1}$ gleich zu setzen ist. Man multiplicire mit $y^2 - 2y + 1$, so bekommt man $y^4 - 2y^3 + 2y^2 = y^3 - y^2$ oder $y^4 = 3y^3 - 3y^2$, und durch y^2 dividirt, $y^2 = 3y - 3$; daher $y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} - 3)}$, also $y = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$;

daher $y - 1 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, folglich $x = \frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$.

Man multiplicire oben und unten mit $1 - \sqrt{-3}$, so wird $x = \frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$ oder $x = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$.

Antw. Also sind die beyden gesuchten Zahlen $x = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ und $y = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, ihre Summe ist $x + y = 3$, das Product $xy = 3$, und da endlich $x^2 = \frac{3-3\sqrt{-3}}{2}$ und $y^2 = \frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, so wird $x^2 + y^2 = 3$.

§. 126.

Auch diese Rechnung kann durch einen besondern Vortheil nicht wenig erleichtert werden, welcher
II. Theil. auch

auch in andern Fällen Statt findet. Dieses besteht darin, daß man die gesuchten Zahlen nicht durch einzelne Buchstaben, sondern durch die Summe und Differenz zweyer andern ausdrückt..

Also bey der vorigen Aufgabe setze man die eine der gesuchten Zahlen gleich $p + q$ und die andere $p - q$, so wird die Summe derselben $2p$ seyn, ihr Product $p^2 - q^2$, und die Summe ihrer Quadrate $2p^2 + 2q^2$, welche drey Stücke einander gleich seyn müssen. Man setze das erste dem zweyten gleich, so wird $2p = p^2 - q^2$ und daraus $q^2 = p^2 - 2p$. Diesen Werth setze man im dritten für q^2 , so wird dasselbe $4p^2 - 4p$. Dieses dem ersten gleich gesetzt, giebt $2p = 4p^2 - 4p$. Man addire $4p$, so wird $6p = 4p^2$, durch p dividirt, giebt $6 = 4p$ und also $p = \frac{3}{2}$.

Hieraus findet man $q^2 = -\frac{3}{2}$ und $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$. Folglich sind unsere gesuchten Zahlen $p + q = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$, und die andere $p - q = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$, dieselben, welche wir auch vorher schon gefunden haben.

IX. Capitel.

Von der Natur der quadratischen Gleichungen.

§. 127.

Aus dem vorhergehenden hat man deutlich ersehen, daß die quadratischen Gleichungen auf eine doppelte Art aufgelöst werden können; und diese Eigenschaft verdienet allerdings in Erwägung gezogen zu werden, weil dadurch die Natur der höhern Gleichungen nicht wenig erläutert wird. Wir wollen daher genauer unter-