Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

X. Capitel. Von der Auflösung der reinen cubischen Gleichungen.

X. Capitel.

Von der Auflösung der reinen cubischen Gleichungen.

§. 144.

Eine reine cubische Gleichung ist eine solche, in welcher der Cubus der unbekannten Zahl einer bekannten Zahl gleich gesetzt wird, so daß darin weder das Quadrat der unbekannten Zahl, noch die unbekannte Zahl selbst vorkömmt.

Eine solche Gleichung ist $x^3 = 125$, oder auf eine allgemeine Art $x^3 = a$, oder $x^3 = \frac{a}{b}$.

§. 145.

Wie man nun aus einer solchen Gleichung den Werth von x finden soll, ist für sich offenbar, indem man nur auf beyden Seiten die Cubicwurzeln ausziehen darf.

Also z. B. aus der Gleichung $x^3 = 125$ findet man $x = 5$, und aus der Gleichung $x^3 = a$ bekömmt man $x = \sqrt[3]{a}$; aus $x^3 = \frac{a}{b}$ aber hat man $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ oder $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. Wenn man daher nur die Cubicwurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen versteht, so kann man auch solche Gleichungen leicht auflösen.

§. 146.

Auf diese Art erhält man aber nur einen Werth für x. Da nun eine jede quadratische Gleichung zwey Werthe hat, so läßt sich vermuthen, daß eine

cubische

cubische Gleichung auch mehr als einen Werth haben müsse. Es wird daher der Mühe werth seyn, dies genauer zu untersuchen, und im Fall eine solche Gleichung mehr Werthe für x haben sollte, diese alle ausfindig zu machen.

§. 147.

Wir wollen z. B. folgende Gleichung betrachten $x^3 = 8$, woraus alle Zahlen gefunden werden sollen, deren Cubus gleich 8 ist. Da nun eine solche Zahl unstreitig $x = 2$ ist; so muß nach dem vorigen Capitel die Formel $x^3 - 8 = 0$ sich nothwendig durch $x - 2$ theilen lassen; wir wollen also diese Theilung folgender Gestalt verrichten:

$$
\begin{array}{l}
x - 2)\, x^3 - 8\, (x^2 + 2x + 4 \\
\quad\quad\;\; \underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad\quad\quad\;\; 2x^2 - 8 \\
\quad\quad\quad\;\; \underline{2x^2 - 4x} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\; 4x - 8 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\; \underline{4x - 8} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; 0
\end{array}
$$

Also läßt sich unsere Gleichung $x^3 - 8 = 0$ durch diese Factoren vorstellen $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$.

§. 148.

Da nun die Frage ist: was für eine Zahl für x angenommen werden müsse, daß $x^3 = 8$ werde, oder daß $x^3 - 8 = 0$ werde; so ist deutlich, daß dieses geschieht, wenn das gefundene Product gleich 0 werde. Dieses wird aber 0, nicht nur, wenn der erste Factor $x - 2 = 0$ ist, woraus $x = 2$ entsteht, sondern auch, wenn der andere Factor $x^2 + 2x + 4 = 0$ ist. Man setze also $x^2 + 2x + 4 = 0$, so hat man $x^2 = - 2x - 4$ und daher wird $x = - 1 \pm \sqrt{- 3}$.

§. 149.

Außer diesem Fall also $x = 2$, in welchem die Gleichung $x^3 = 8$ erfüllt wird, haben wir noch zwey andere Werthe für x, deren Cubi ebenfalls 8 sind, und welche folgende Beschaffenheit haben:

I.) $x = -1 + \sqrt{-3}$ und II.) $x = -1 - \sqrt{-3}$, welches außer Zweifel gesetzt wird, wenn man die Cubi davon nimmt, wie folgt:

$$\begin{array}{ll}
-1+\sqrt{-3} & \\
-1+\sqrt{-3} & \\
\hline
1-\sqrt{-3} & \\
\quad -\sqrt{-3}-3 & \\
\hline
-2-2\sqrt{-3} & \text{Quadr.} \\
-1+\sqrt{-3} & \\
\hline
2+2\sqrt{-3} & \\
\quad -2\sqrt{-3}+6 & \\
\hline
8 & \text{Cubus}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
-1-\sqrt{-3} \\
-1-\sqrt{-3} \\
\hline
1+\sqrt{-3} \\
\quad +\sqrt{-3}-3 \\
\hline
-2+2\sqrt{-3} \\
-1-\sqrt{-3} \\
\hline
2-2\sqrt{-3} \\
\quad +2\sqrt{-3}+6 \\
\hline
8
\end{array}$$

Diese beyden Werthe sind zwar imaginär oder unmöglich, verdienen aber dennoch bemerkt zu werden.

§. 150.

Dieses findet auch gewöhnlich für eine jede solche cubische Gleichung $x^3 = a$ Statt, wo außer den Werth $x = \sqrt[3]{a}$ noch zwey andere ebenfalls vorhanden sind. Man setze um der Kürze willen $\sqrt[3]{a} = c$ also, daß $a = c^3$ und unsere Gleichung folgende Form bekomme $x^3 - c^3 = 0$, welche letztere sich durch $x - c$ theilen läßt, wie aus nachstehender Division zu sehen:

$$
\begin{array}{l}
x - c)\, x^3 - c^3\, (x^2 + cx + c^2 \\
\quad\quad\; \underline{x^3 - cx^2} \\
\quad\quad\quad\quad cx^2 - c^3 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{cx^2 - c^2x} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad c^2x - c^3 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{c^2x - c^3} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Daher wird unsere Gleichung durch folgendes Product vorgestellt: $(x - c)(x^2 + cx + c^2) = 0$, welches wirklich gleich 0 wird, nicht nur, wenn $x - c = 0$ oder $x = c$, sondern auch, wenn $x^2 + cx + c^2 = 0$, daraus aber wird $x^2 = - cx - c^2$, und daher $x = - \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - c^2\right)}$ oder $x = \frac{-c \pm \sqrt{-3c^2}}{2}$ das ist $x = \frac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot c$, und in dieser Formel sind noch zwey Werthe für x enthalten.

§. 151.

Da nun c statt $\sqrt[3]{a}$ geschrieben worden, so ziehen wir daher folgenden Schluß: daß von einer jeden cubischen Gleichung von dieser Form $x^3 = a$ dreyerley Werthe für x gefunden werden können, welche folgender Gestalt ausgedrückt werden:

I.) $x = \sqrt[3]{a}$, II.) $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}$, III.) $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}$

woraus erhellet, daß eine jede Cubicwurzel dreyerley Werthe habe, wovon zwar nur der erste möglich, die beyden andern aber unmöglich sind; dieses ist deswegen hier wohl zu bemerken, weil wir schon oben gesehen haben, daß eine jede quadratische Gleichung zweyerley Werthe hat, und unten noch gezeigt werden wird, daß eine jede Wurzel vom vierten Grade vier verschiedene Werthe, vom fünften Grade fünf dergleichen u. s. f. habe.

Bey gemeinen Rechnungen wird nur der erste von diesen 3 Werthen gebraucht, weil die beyden andern unmöglich sind, und hierüber wollen wir noch einige Beyspiele beyfügen.

§. 152.

I. Aufg. Suche eine Zahl, so daß das Quadrat derselben mit ihrem Viertel multiplicirt, 432 hervorbringe.

Diese Zahl sey x, so muß x^2 mit $\frac{1}{4}x$ multiplicirt, der Zahl 432 gleich werden; daher wird $\frac{1}{4}x^3 = 432$. Diese Gleichung mit 4 multiplicirt, giebt $x^3 = 1728$, hieraus wird nun die Cubicwurzel gezogen, so erhält man $x = 12$.

Antw. Die gesuchte Zahl ist 12, denn ihr Quadrat 144 mit ihrem Viertel multiplicirt (das ist 3) giebt 432.

§. 153.

II. Aufg. Suche eine Zahl, deren vierte Potenz durch ihre Hälfte dividirt und dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, 100 gebe.

Die Zahl sey x, so ist ihre vierte Potenz x^4, welche durch ihre Hälfte $\frac{1}{2}x$ dividirt, $2x^3$ giebt, dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, soll 100 machen; also hat man $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, wo $14\frac{1}{4}$ subtrahirt, $2x^3 = \frac{343}{4}$ giebt, durch 2 dividirt, wird $x^3 = \frac{343}{8}$, und die Cubicwurzel ausgezogen, erhält man $x = \frac{7}{2}$.

§. 154.

III. Aufg. Einige Hauptleute liegen zu Felde; jeder hat unter sich dreymal so viel Reuter und 20mal so viel Fußgänger, als der Hauptleute sind; und ein Reuter bekommt zum monathlichen Solde gerade so viel Gulden als der Hauptleute sind, ein Fußgänger aber nur halb so viel, und der ganze monathliche Sold beträgt in allem 13000 Gulden. Wie viel sind es Hauptleute gewesen?

Es seyen x Hauptleute gewesen, so hat einer unter sich $3x$ Reuter und $20x$ Fußgänger gehabt. Also die Zahl aller Reuter war $3x^2$ und der Fußgänger $20x^2$. Da nun ein Reuter x Fl. bekommt, ein Fußgänger aber $\frac{1}{2}x$ Fl., so ist der monathliche Sold der Reuter $3x^3$ Fl., der Fußgänger aber $10x^3$ Fl. Beyde zusammen also bekommen $13x^3$ Fl., welches der Zahl 13000 gleich seyn muß. Da nun $13x^3 = 13000$, so wird $x^3 = 1000$ und $x = 10$.

So viel sind also der Hauptleute gewesen.

§. 155.

IV. Aufg. Einige Kaufleute verbinden sich zu einer Gesellschaft, und es legt ein jeder 100mal so viel ein, als Theilnehmer sind. Mit diesem Capital schicken sie einen Factor nach Venedig, der gewinnt mit jeden 100 Fl. zweymal so viel Fl. als Kaufleute waren, kommt dann wieder und nach seiner Zurückkunft beträgt der Gewinnst 2662 Fl. Nun ist also die Frage, wie viel der Kaufleute gewesen sind?

Es seyen x Kaufleute gewesen, so hat jeder ein gelegt $100x$ Fl. und das ganze Capital war $100x^2$ Fl. Da nun mit 100 Fl. $2x$ Fl. gewonnen worden, so war der Gewinnst $2x^3$, welcher der Zahl 2662 gleich seyn soll. Folglich $2x^3 = 2662$, daher $x^3 = 1331$ und also die gesuchte Anzahl der Kaufleute $x = 11$.

§. 156.

V. Aufg. Eine Bäuerin vertauscht Käse gegen Hühner, und giebt 2 Käse für 3 Hühner; die Hühner legen Eyer, jede $\frac{1}{3}$ so viel als der Hühner sind. Mit denselben geht sie auf den Markt, giebt immer 9 Eyer für so viel Pfennige, als ein Huhn Eyer gelegt hat, und löset 72 Pfennige. Wie viel hat nun die Bäuerin Käse vertauscht?

Die Zahl der Käse sey x gewesen, so sind dieselben gegen $\frac{3}{2}x$ Hühner vertauscht worden. Da nun ein Huhn $\frac{1}{2}x$ Eyer legt, so ist die Zahl aller Eyer $\frac{3}{4}x^2$. Nun werden 9 Eyer für $\frac{1}{2}x$ Pf. verkauft und also wird in allem $\frac{1}{24}x^3$ gelöset. Vermöge der Aufgabe ist $\frac{1}{24}x^3 = 72$, folglich $x^3 = 24 . 72 = 8 . 3 . 8 . 9 = 8 . 7 . 3 . 9 = 8 . 8 . 27$, so findet man, wenn man die Cubicwurzel auszieht, daß $x = 12$, und daß also die Bäuerin 12 Käse gehabt hat, welche gegen 18 Hühner vertauscht worden sind.

XI. Capitel.

Von der Auflösung der vollständigen cubischen Gleichungen.

§. 157.

Eine vollständige cubische Gleichung ist eine solche Gleichung, in welcher außer dem Cubus der unbekannten Zahl, noch diese unbekannte Zahl selbst und ihr Quadrat vorkommen, daher die allge-