Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

XI. Capitel. Von der Auflösung der vollständigen cubischen Gleichungen.

§. 156.

V. Aufg. Eine Bäuerin vertausche Käse gegen Hühner, und giebt 2 Käse für 3 Hühner; die Hühner legen Eyer, jede $\frac{1}{3}$ so viel als der Hühner sind. Mit denselben geht sie auf den Markt, giebt immer 9 Eyer für so viel Pfennige, als ein Huhn Eyer gelegt hat, und löset 72 Pfennige. Wie viel hat nun die Bäuerin Käse vertauscht?

Die Zahl der Käse sey x gewesen, so sind dieselben gegen $\frac{3}{2}x$ Hühner vertauscht worden. Da nun ein Huhn $\frac{1}{2}x$ Eyer legt, so ist die Zahl aller Eyer $\frac{3}{4}x^2$. Nun werden 9 Eyer für $\frac{1}{2}x$ Pf. verkauft und also wird in allem $\frac{1}{24}x^3$ gelöset. Vermöge der Aufgabe ist $\frac{1}{24}x^3 = 72$, folglich $x^3 = 24.72 = 8.3.8.9 = 8.7.3.9 = 8.8.27$, so findet man, wenn man die Cubicwurzel auszieht, daß $x = 12$, und daß also die Bäuerin 12 Käse gehabt hat, welche gegen 18 Hühner vertauscht worden sind.

XI. Capitel.

Von der Auflösung der vollständigen cubischen Gleichungen.

§. 157.

Eine vollständige cubische Gleichung ist eine solche Gleichung, in welcher außer dem Cubus der unbekannten Zahl, noch diese unbekannte Zahl selbst und ihr Quadrat vorkommen, daher die allgemeine Form solcher Gleichungen, wenn man nemlich alle Glieder auf eine Seite bringt, folgende ist:

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0.$$

Wie nun aus einer solchen Gleichung die Werthe von x, die man auch die **Wurzeln der Gleichung** nennt, zu finden sind, soll in diesem Capitel gezeigt werden. Denn man kann hier schon voraussetzen, daß eine solche Gleichung immer drey Wurzeln habe; weil dieses schon im vorigen Capitel von den reinen Gleichungen dieses Grades gezeigt ist.

§. 158.

Wir wollen zuerst folgende Gleichung betrachten: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, und da eine quadratische Gleichung als ein Product aus zweyen Factoren angesehen werden kann, so kann man diese cubische Gleichung als ein Product aus drey Factoren ansehen, welche in diesem Fall sind:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0,$$

als welche mit einander multiplicirt, die obige Gleichung hervorbringen. Denn $(x-1).(x-2)$ giebt $x^2 - 3x + 2$, und dieses noch mit $x-3$ multiplicirt, giebt $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, welches die obige Form ist, die $= 0$ seyn soll. Dieses geschieht daher, wenn dieses Product $(x-1)(x-2)(x-3)$ gleich Null wird, welches eintrift, wenn nur einer von den drey Factoren $= 0$ wird, und also in drey Fällen, erstlich wenn $x - 1 = 0$ oder $x = 1$, zweytens wenn $x - 2 = 0$ oder $x = 2$, und drittens wenn $x - 3 = 0$ oder $x = 3$.

Man sieht auch sogleich, daß, wenn für x eine jede beliebige andere Zahl gesetzt wird, keiner von diesen drey Factoren 0 werde, und also auch nicht das Product. Daher hat unsere Gleichung keine andern Wurzeln als diese drey.

§. 159.

Könnte man in einem jeden andern Falle die drey Factoren einer solchen Gleichung anzeigen, so hätte man sogleich die drey Wurzeln derselben. Wir wollen zu diesem Ende drey solche Factores auf eine allgemeine Art betrachten, welche $x - p$, $x - q$, $x - r$ seyn sollen. Man suche daher ihr Product, und da der erste mit dem zweyten multiplicirt, $x^2 - (p + q) x + pq$ giebt, so giebt dieses Product, noch mit $x - r$ multiplicirt, folgende Formel: $x^3 - (p + q + r) x^2 + (pq + pr + qr) x - pqr$. Soll nun diese Formel gleich 0 seyn, so geschieht dieses in drey Fällen: erstlich, wenn $x - p = 0$ oder $x = p$, zweytens, wenn $x - q = 0$ oder $x = q$, und drittens, wenn $x - r = 0$ oder $x = r$.

§. 160.

Es sey nun diese Gleichung folgender Gestalt ausgedrückt: $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, und wenn die Wurzeln derselben I.) $x = p$, II.) $x = q$, III.) $x = r$ sind, so muß erstlich $a = p + q + r$, und hernach zweytens $b = pq + pr + qr$, und drittens $c = pqr$ seyn; hieraus sehen wir, daß das zweyte Glied die Summe der drey Wurzeln, das dritte Glied die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln, und endlich das letzte Glied das Product aus allen drey Wurzeln enthält.

Diese letzte Eigenschaft hilft uns sogleich zu diesem wichtigen Vortheil, daß eine cubische Gleichung gewiß keine andere Rationalwurzeln haben kann, als solche, wodurch sich das letzte Glied theilen läßt. Denn da dasselbe das Product aller drey Wurzeln ist, so muß es sich auch durch eine jede derselben theilen lassen. Man weiß daher sogleich, wenn man eine Wurzel nur errathen will, mit was für Zahlen man die Probe machen muß *).

Dieses zu erläutern wollen wir folgende Gleichung betrachten: $x^3 = x + 6$ oder $x^3 - x - 6 = 0$. Da nun dieselbe keine andere Rationalwurzeln haben kann, als solche, durch welche sich das letzte Glied 6 theilen läßt, so hat man nur nöthig mit folgenden Zahlen 1, 2, 3, 6 die Probe anzustellen, welche man in der Gleichung für x setzt.

I.) Wenn $x=1$, so ist $x^3-x-6 = 1-1-6 = -6$.
II.) Wenn $x=2$, so ist $x^3-x-6 = 8-2-6 = 0$.
III.) Wenn $x=3$, so ist $x^3-x-6 = 27-3-6 = 18$.
IV.) Wenn $x=6$, so ist $x^3-x-6 = 216-6-6 = 204$.

Hieraus sehen wir, daß $x = 2$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung seyn muß, aus welcher es nun leicht ist, die beyden übrigen zu finden. Denn da $x = 2$ eine Wurzel ist, so ist $x - 2$ ein Factor der Gleichung; man darf also nur den andern suchen, welches durch folgende Division geschieht:

$$
\begin{array}{l}
x-2)\,x^3 - x - 6\,(x^2 + 2x + 3 \\
\quad\;\; \underline{x^3 - 2x^2} \\
\qquad\quad\; 2x^2 - x - 6 \\
\qquad\quad\; \underline{2x^2 - 4x} \\
\qquad\qquad\quad 3x - 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Weil sich nun unsere Formel durch dieses Product vorstellen läßt $(x-2)(x^2 + 2x + 3)$, so wird dieselbe 0, nicht nur, wenn $x - 2 = 0$, sondern auch,

*) Man wird in der Folge sehen, daß diese Eigenschaft allgemein für jede Gleichung von beliebigen Grade gilt. Da diese Versuche die Theiler des letzten Gliedes der Gleichung erfordern, so kann man Gebrauch von dem im ersten Theile §. 43 Anmerk. angeführten Tafeln machen.

auch, wenn $x^2 + 2x + 3 = 0$. Hieraus aber bekommen wir $x^2 = -2x - 3$, und daher $x = -1 \pm \sqrt{-2}$, welches die beyden andern Wurzeln unserer Gleichung seyn müssen, die, wie man sieht, unmöglich oder imaginär sind.

Anmerk. 1. Der erste Theil dieses §. enthält eine so wichtige analytische Wahrheit, daß es wohl der Mühe werth ist, sie hier bestimmter und strenger zu entwickeln.

In jeder cubischen Gleichung von der Form
$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ ist

1) $A = -p - q - r = -(p + q + r)$
2) $B = (-p.-q) + (-p.-r) + (-q.-r) = pq + pr + qr$
3) $C = -p.-q.-r = -pqr$.

D. i., wenn man statt der 3 Wurzeln p, q, r die 3 ihnen entgegengesetzten Größen nimmt, so ist der Coefficient von x^2 die Summe, der Coefficient von x die Summe der drey Producte aus je zwey und zwey, und der Coefficient von x^0 das Product aus diesen drey Größen.

Denn $(x-p)(x-q)(x-r)$ ist $= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$.

Vergleicht man nun in dieser letzten Gleichung Glied für Glied mit $x^3 + Ax^2 + Bx + C$, so wird die Richtigkeit der obigen Behauptung in die Augen fallen.

Anmerk. 2. Fehlt in einer cubischen Gleichung das Glied Ax^2 gänzlich, so muß $Ax^2 = 0$, also $A = 0$ seyn; dieses wäre eine sichere Anzeige, daß das Gegentheil von einer der 3 Wurzeln gleich sey der Summe aus den beyden übrigen: denn nur in diesem Falle kann die Summe aus allen 3 Wurzeln = 0 werden.

§. 161.

Dieses findet aber nur dann Statt, wenn das erste Glied der Gleichung x^3 mit 1, die übrigen aber mit ganzen Zahlen multiplicirt sind. Kommen aber darin Brüche vor, so hat man ein Mittel, die Gleichung in eine andre zu verwandeln, die von Brüchen frey ist, da man dann die vorige Probe anstellen kann.

Denn es sey z. B. folgende Gleichung gegeben: $x^3 - 3x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$. Weil hier nun Viertel vorkommen, so setze man $x = \frac{y}{2}$; hierdurch bekömmt man $\frac{y^3}{8} - \frac{3y^2}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0$, diese mit 8 multiplicirt, giebt $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$, hiervon sind die Wurzeln, wie wir oben gesehen haben, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$. Daher ist für unsere Gleichung I.) $x = \frac{1}{2}$, II.) $x = 1$, III.) $x = \frac{3}{2}$.

§. 162.

Wenn nun das erste Glied mit einer Zahl multiplicirt, das letzte aber 1 ist, wie z. B. in folgender Gleichung: $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$, so dividire man alle Glieder mit dem Coefficienten des ersten Gliedes, also die gegenwärtige Gleichung mit 6, wodurch man folgende neue Gleichung erhält: $x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} = 0$, welche nach obiger Regel von den Brüchen befreyet werden kann, wenn man $x = \frac{y}{6}$ setzt; denn da erhält man $\frac{y^3}{216} - \frac{11y^2}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$, und diese Gleichung mit 216 multiplicirt, giebt $y^3 - 11y^2 + 36y - 36 = 0$. Hier würde es zu mühsam seyn, die Probe mit allen Theilern der Zahl 36 anzustellen. Weil aber in unserer ersten Gleichung das letzte Glied 1 ist, so setze man $x = \frac{1}{z}$, so wird $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$, welche mit z^3 multiplicirt, $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$ giebt, oder wenn alle Glieder auf die andere Seite gebracht werden, $0 = z^3 - 6z^2 + 11z - 6$, deren Wurzeln folgende sind: $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$; daher wir für unsere Gleichung erhalten: $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

Zusatz. Hier wird schon folgender Satz verständlich seyn. *Eine cubische Gleichung, welche gar keine Folge hat, kann keine negative, und welche keine Wechselung hat, keine positive Wurzel haben.*

Beweis. In einer Gleichung, wo gar keine Folge vorkommen soll, müssen die Zeichen in folgender Ordnung stehen.

1) $+ x^3 - Ax^2 + Bx - 6 = 0$

oder 2) $- x^3 + Ax^2 - Bx + 6 = 0$

In 1) kann x keinen negativen Werth haben, weil dabey auch das erste und dritte Glied negativ werden müßte, die Summe aus lauter negativen Gliedern, aber niemals = 0 werden kann. Daraus folgt schon, daß auch in der Gleichung 2) x keinen negativen Werth haben kann. Denn bey eben denselben Werthen von x, unter welchen die Gleichung bey 2) richtig ist, muß auch die bey 1) richtig bleiben, indem das Resultat beyder Gleichungen gleich nur entgegengesetzt ist.

Kommen aber in einer cubischen Gleichung keine Wechselung vor, so muß die Ordnung der Zeichen seyn

entweder 1) $+ x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$

oder 2) $- x^3 - Ax^2 - Bx - C = 0$

Sollte nun x positiv seyn, so würden in 1) alle Glieder positiv, in 2) alle Glieder negativ bleiben, ihre Summe also nicht gleich 0 seyn können.

§. 163.

Aus dem obigen sieht man nun, daß, wenn alle Wurzeln positive Zahlen sind, in der Gleichung die Zeichen + und — mit einander abwechseln müssen, so daß die Gleichung folgende Gestalt bekömmt:

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0,$$

wo drey Abwechselungen vorkommen, nemlich eben so viel, als positive Wurzeln vorhanden sind. Wären aber alle drey Wurzeln negativ gewesen, und man hätte diese drey Factoren mit einander multiplicirt $x + p$, $x + q$, $x + r$, so würden alle Glieder das Zeichen +, und die Gleichung folgende Form bekommen haben: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, wo dreymal zwey gleiche Zeichen auf einander folgen, d. i. eben so viel als negative Wurzeln sind.

Hieraus hat man nun folgenden Schluß gezogen, daß, so oft die Zeichen abwechseln, die Gleichung auch so viel positive Wurzeln, so oft aber gleiche Zeichen auf einander folgen, dieselbe eben so viel negative Wurzeln habe; diese Anmerkung ist hier von großer Wichtigkeit, damit man wisse, ob man die Theiler des letzten Gliedes, mit welchem man die Probe anstellen will, negativ oder positiv nehmen soll.

§. 164.

Um dieses mit einem Beyspiele zu erläutern, so wollen wir folgende Gleichung betrachten:

$$x^3 + x^2 - 34x + 56 = 0,$$

in welcher zwey Abwechselungen der Zeichen, und nur eine Folge eben desselben Zeichens vorkömmt; daraus schließen wir, daß diese Gleichung zwey positive und eine negative Wurzel habe, welche Theiler des letzten Gliedes 56 seyn, und also unter diesen Zahlen $\pm$ 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56 sich befinden müssen.

Setzt man nun $x = 2$, so wird $8 + 4 - 68 + 56 = 0$; woraus wir sehen, daß $x = 2$ eine positive Wurzel, und also $x - 2$ ein Theiler unserer Gleichung sey, und hieraus können die beyden übrigen Wurzeln leicht gefunden werden, wenn man nur die Gleichung durch $x - 2$ dividirt, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{array}{l}
x - 2)\, x^3 + x^2 - 34x + 56\, (x^2 + 3x - 28 \\
\quad\;\; \underline{x^3 - 2x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 - 34x + 56 \\
\qquad\quad \underline{3x^2 - 6x} \\
\qquad\qquad\; -28x + 56 \\
\qquad\qquad\; \underline{-28x + 56} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Man

Man setze also diesen gefundenen Quotienten $x^2 + 3x - 28 = 0$, so wird man daraus die beyden übrigen Wurzeln finden, welche $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}$, d. i. $x = 4$ und $x = -7$ seyn werden.

Hieraus zeigt sich, daß wirklich zwey positive, nemlich 2 und 4, aber nur eine negative Wurzel, nemlich -7, hier Statt finden. Dieses wollen wir noch durch folgende Beyspiele erläutern.

§. 165.

I. Aufg. Man suche zwey Zahlen, welche diese Eigenschaft haben, daß, wenn man die kleinere von der größern abzieht, 12 übrig bleibt, wenn man aber ihr Product mit ihrer Summe multiplicirt, die Zahl 14560 herauskömmt.

Die kleinere sey x, so ist die größere $x + 12$, und das Product der einen in die andere $x^2 + 12x$. Dieses mit ihrer Summe $2x + 12$ multiplicirt, giebt $2x^3 + 36x^2 + 144x + 14560$, und wenn man durch 2 dividirt, erhält man $x^3 + 18x^2 + 72x = 7280$.

Weil nun das letzte Glied 7280 zu groß ist, als daß die Probe mit allen seinen Theilern angestellt werden könnte, dasselbe aber durch 8 theilbar ist, so setze man $x = 2y$, und verwandle die vorige Gleichung in eine andere, wo kein x, sondern lauter y vorkömmt. Von $2y$ ist das Quadrat $4y^2$ und die Cubiczahl $8y^3$. Setzt man also anstatt x das, was ihm gleich ist, $2y$, und anstatt x^2 das Quadrat $4y^2$, und anstatt x^3 die $y - 7$ Cubiczahl $8y^3$, so erhält man folgende Gleichung: $8y^3 + 72y^2 + 144y = 7280$, welche durch 8 dividirt, folgende giebt: $y^3 + 9y^2 + 18y = 910$, und nun darf man nur

mit

mit den Theilern der Zahl 910, d. i. mit 1, 2, 5, 7, 10, 13 nach und nach die Probe machen. Die ersten 1, 2, 5 sind offenbar zu klein; nimmt man aber $y = 7$, so bekömmt man $343 + 441 + 126$ gerade $= 910$, also ist eine Wurzel $y = 7$, folglich $x = 14$; will man noch die beyden übrigen Wurzeln von y wissen, so dividire man $y^3 + 9y^2 + 18y - 910$ durch $y - 7$ folgender Gestalt:

$$
\begin{array}{l}
y-7)\; y^3 + 9y^2 + 18y - 910\; (y^2 + 16y + 130 \\
\quad\underline{y^3 - 7y^2} \\
\qquad 16y^2 + 18y - 910 \\
\qquad \underline{16y^2 - 112y} \\
\qquad\qquad 130y - 910 \\
\qquad\qquad \underline{130y - 910} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Setzt man nun diesen Quotienten $y^2 + 16y + 130 = 0$, so bekömmt man $y^2 = -16y - 130$, und daher $y = -8 \pm \sqrt{-66}$; also sind die beyden andern Wurzeln unmöglich.

Antw. Die beyden gesuchten Zahlen sind also 14 und 26, deren Product 364 mit ihrer Summe 40 multiplicirt, die Zahl 14560 giebt.

§. 166.

II. Aufg. **Suche zwey Zahlen, die um 18 von einander unterschieden sind, und noch diese Eigenschaft haben, daß, wenn man die Differenz ihrer Cubiczahlen mit der Summe der Zahlen multiplicirt, 275184 herauskomme.**

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere $x + 18$, der Cubus der kleinern aber x^3, und der Cubus der größern $= x^3 + 54x^2 + 972x + 5832$, also die Diffe-

Differenz derselben $54x^2 + 972x + 5832 = 54(x^2 + 18x + 108)$ welche mit der Summe der Zahlen $2x + 18 = 2(x + 9)$ multiplicirt werden soll. Das Product ist aber $108(x^3 + 27x^2 + 270x + 972) = 275184$. Man addire durch 108, so kömmt $x^3 + 27x^2 + 270x + 972 = 2548$ oder $x^3 + 27x^2 + 270x = 1576$ heraus. Die Theiler der Zahl 1576 sind 1, 2, 4, 8 u. s. w., wo 1 und 2 zu klein, 4 aber für x gesetzt dieser Gleichung ein Genüge leistet. Wollte man die beyden übrigen Wurzeln finden, so müßte man die Gleichung durch $x - 4$ theilen, welches auf folgende Art geschieht:

$$
\begin{array}{l}
x-4)\,x^3+27x^2+270x-1576\,(x^2+31x+394 \\
\quad\; \underline{x^3-4x^2} \\
\qquad\quad 31x^2+270x \\
\qquad\quad \underline{31x^2-124x} \\
\qquad\qquad\quad 394x-1576 \\
\qquad\qquad\quad \underline{394x-1576} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Aus dem Quotienten erhält man daher $x^2 = -31x - 394$, und daraus wird $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4})}$, welche beyde Wurzeln imaginär oder unmöglich sind.

Antw. Die gesuchten Zahlen sind also 4 und 22.

§. 167.

III. Aufg. Suche zwey Zahlen, die zur Differenz 720 und übrigens noch diese Eigenschaft haben, daß, wenn man die Quadratwurzel der größern Zahl mit der kleinern Zahl multiplicirt, 20736 herauskomme.

Es

Es sey die kleinere $= x$, so ist die größere $x + 720$, und soll seyn $x\sqrt{(x + 720)} = 20736 = 8 . 8 . 4 . 81$. Nun nehme man auf beyden Seiten die Quadrate, so wird $x^2(x + 720) = x^3 + 720x^2 = 8^2 . 8^2 . 4^2 . 81^2$.

Man setze ferner $x = 8y$, so wird $8^3y^3 + 720 . 8^2y^2 = 8^2 . 8^2 . 4^2 . 81^2$. Durch 8^3 dividirt, wird $y^3 + 90y^2 = 8 . 4^2 . 81^2$.

Es sey nun $y = 2z$, so wird $8z^3 + 4 . 90z^2 = 8 . 4 . 81^2$. Durch 8 dividirt, wird $z^3 + 45z^2 = 4^2 . 81^2$.

Man setze ferner $z = 9u$, so wird $9^3u^3 + 45 . 9^2u^2 = 4^2 . 9^4$. Durch 9^3 dividirt, wird $u^3 + 5u^2 = 4^2 . 9$ oder $u^2(u + 5) = 16 . 9 = 144$. Hier sieht man offenbar, daß $u = 4$; denn da wird $u^2 = 16$ und $u + 5 = 9$. Weil nun $u = 4$, so ist $z = 36$, $y = 72$ und $z = 576$, welches die kleinere Zahl war; die größere aber ist 1296, wovon die Quadratwurzel 36 ist, und diese mit der kleinern Zahl 576 multiplicirt, giebt 20736.

§. 168.

Anmerk. Diese Aufgabe kann auf folgende Art bequemer aufgelöset werden. Weil die größere Zahl ein Quadrat seyn muß, indem sonst ihre Wurzel mit der kleinern Zahl multiplicirt, nicht die vorgegebene Zahl hervorbringen könnte, so sey die größere Zahl x^2, die kleinere also $x^2 - 720$, welche mit der Quadratwurzel jener, das ist mit x multiplicirt, $x^3 - 720x = 20736 = 64 . 27 . 12$ giebt. Man setze $x = 4y$, so ist $64y^3 - 720 . 4y = 64 . 27 . 12$. Durch 64 dividirt, wird $y^3 - 45y = 27 . 12$.

Man setze ferner $y = 3z$, so ist $27z^3 - 135z = 27 . 12$. Durch 27 dividirt, wird $z^3 - 5z = 12$ oder $z^3 - 5z - 12 = 0$. Die Theiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12. Von diesen sind 1 und 2 zu klein, setzt man aber $z = 3$, so kömmt $27 - 15 - 12 = 0$;

$12 = 0$; daher ist $z = 3$, $y = 9$ und $x = 36$. Die größere Zahl ist also, wie oben, $x^2 = 1296$, und die kleinere $x^2 - 720 = 576$.

§. 169.

IV. Aufg. Es sind 2 Zahlen, deren Differenz 12 ist. Wenn man nun diese Differenz mit der Summe ihrer Cubi multiplicirt, so kömmt 102144 heraus. Welche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere x, so ist die größere $x + 12$, der Cubus der erstern ist x^3, der andern aber $x^3 + 36x^2 + 432x + 1728$, die Summe derselben mit 12 multiplicirt, giebt $12(2x^3 + 36x^2 + 432x + 1728) = 102144$; durch 12 dividirt, wird $2x^3 + 36x^2 + 432x + 1728 = 8512$, noch durch 2 dividirt, giebt $x^3 + 18x^2 + 216x + 864 = 4256$ oder $x^3 + 18x^2 + 216x = 3392 = 8 . 8 . 53$. Man setze $x = 2y$ und dividire sogleich durch 8, so wird $y^3 + 9y^2 + 54y = 8 . 53 = 424$.

Die Theiler des letzten Gliedes sind 1, 2, 4, 8, 53, u. s. f. Von diesen sind 1 und 2 zu klein. Setzt man aber $y = 4$, so kömmt $64 + 144 + 216 = 424$. Also ist $y = 4$ und $x = 8$; daher sind die beyden Zahlen 8 und 20.

§. 170.

V. Aufg. Es verbinden sich einige Personen zu einer Gesellschaft, und jeder legt zehnmal so viel Fl. ein, als der Personen sind, und mit dieser Summe gewinnen sie 6 Procent mehr, als ihrer sind. Nun findet sichs, daß der Gewinnst zusammen 392 Fl. betrage. Wie viel sind der Kaufleute gewesen?

Man

Man setze, es seyen x Personen gewesen, so legt einer $10x$ Fl., alle aber legen $10x^2$ Fl. ein, und gewinnen mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind; also mit 100 Fl. gewinnen sie $x + 6$ Fl. und mit dem ganzen Capital gewinnen sie zusammen $\frac{x^3 + 6x^2}{10} = 392$.

Multiplicirt man mit 10, so erhält man $x^3 + 6x^2 = 3920$. Setzt man nun $x = 2y$ und also $x^2 = 8y^2$ und $x^3 = 8y^3$, so wird $8y^3 + 24y^2 = 3920$. Diese Gleichung durch 8 dividirt, giebt $y^3 + 3y^2 = 490$.

Die Theiler des letzten Gliedes sind 1, 2, 5, 7, 10 u. s. f., von welchen 1, 2 und 5 zu klein sind.

Setzt man aber $y = 7$, so wird $343 + 147 = 490$, also ist $y = 7$ und $x = 14$.

Antw. Es sind 14 Personen gewesen, und es hat ein jeder 140 Fl. eingelegt.

§. 171.

VI. Aufg. Einige Kaufleute haben zusammen ein Capital von 8240 Rthl. Hierzu legt ein jeder noch 40mal so viel Rthl. als der Kaufleute sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viel Procente, als der Personen sind. Hierauf theilen sie den Gewinnst, und ein jeder nimmt zehnmal so viel Rthl. als der Personen sind; es bleiben aber dennoch 224 Rthl. übrig. Wie viel sind es Kaufleute gewesen?

Die Zahl der Kaufleute sey $= x$, so legt ein jeder noch $40x$ Rthl. zu dem Capital von 8240 Rthl. Alle zusammen legen also dazu noch $40x^2$ Rthl. und folglich war die ganze Summe $40x^2 + 8240$ Rthl.

Mit

Mit dieser gewinnen sie x Procent; daher wird der ganze Gewinnst seyn:

$$\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4}{10}x^3 + \frac{824x}{10} = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412x}{5}.$$

Hiervon nimmt nun ein jeder $10x$ Rthl. und also alle zusammen $10x^2$ Rthl. und da bleiben noch 224 Rthl. übrig; hieraus zeigt sich, daß der Gewinnst $10x^2 + 224$ gewesen seyn müsse, woraus folgende Gleichung entsteht: $\frac{2}{5}x^3 + \frac{412x}{5} = 10x^2 + 224$, diese mit 5 multiplicirt und durch 2 dividirt, wird $x^3 + 206x = 25x^2 + 560$ oder $x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$. Aber um zu probiren, wird die erste Form bequemer seyn. Da nun die Theiler des letzten Gliedes sind: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, u. s. f., welche positiv genommen werden müssen, weil in der letztern Gleichung drey Abwechselungen von Zeichen vorkommen, woraus man sicher schließen kann, daß alle drey Wurzeln positiv sind (§. 163). Probirt man nun mit $x = 1$ oder $x = 2$, so ist offenbar, daß der erste Theil viel kleiner werde, als der zweyte. Wir wollen also mit den folgenden probiren:

Wenn $x = 4$, so wird $64 + 824 = 400 + 560$. Trifft also nicht zu.

Wenn $x = 5$, so wird $125 + 1030 = 625 + 560$. Trifft ebenfalls nicht zu.

Wenn $x = 7$, so wird $343 + 1442 = 1225 + 560$. Trifft genau zu.

Daher ist $x = 7$ eine Wurzel unsrer Gleichung. Um die beyden andern zu finden, so theile man die letzte Form durch $x - 7$ wie folgt:

$$
\begin{array}{l}
x-7)\,x^3-25x^2+206x-560\,(x^2-18x+80 \\
\quad\;\; \underline{x^3-\;\;7x^2} \\
\qquad\quad -18x^2+206x \\
\qquad\quad \underline{-18x^2+126x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 80x-560 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{80x-560} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Man setze also den Quotienten gleich o, so hat man $x^2 - 18x + 80 = 0$ oder $x^2 = 18x - 80$; daher $x = 9 \pm 1$. Folglich sind die beyden andern Wurzeln $x = 8$ und $x = 10$.

Antw. Es finden also auf diese Frage dreyerley Antworten Statt. Nach der ersten war die Zahl der Kaufleute 7, nach der zweyten war sie 8, und nach der dritten 10, wie dies die von allen hier beygefügte Probe zeigt.

	I.	II.	III.
Die Zahl der Kaufleute	7	8	10
Ein jeder legt ein $40x$ = =	280	320	400
Alle zusammen legen also ein $40x^2$	1960	2560	4000
Das alte Capital war = =	8240	8240	8240
Das ganze Capital ist $40x^2 + 8240$	10200	10800	12240
Mit demselben wird gewonnen so viel Procent als Kaufleute sind	714	864	1224
Hiervon nimmt ein jeder weg $10x$	70	80	100
Folglich alle zusammen $10x^2$ =	490	640	1200
Bleibt also noch übrig = =	224	224	224

Zusatz. Wenn eine Wurzel p einer vollständigen cubischen Gleichung bekannt ist, so läßt sich allemal die quadratische Gleichung finden, welche die beyden Wurzeln q und r giebt, indem man die cubische Gleichung durch $x - p$ dividirt, wie die bisherigen Beyspiele zeigen. Man kann aber diese quadratische Gleichung ohne solche mühsame Division auf folgende Weise erhalten.

Aus

Aus dem Vorhergehenden ist bekannt, daß
$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ einerley ist
mit $x^3 + (-p-q-r)x^2 + Bx - pqr = 0$
Eine quadratische Gleichung, welche die Wurzeln q und r enthalten soll, ist keine andere als folgende:

$$x^2 + (-q-r)x + qr = 0.$$

Nun aber ist $A = -p-q-r$, also $A + p = -q-r$ und $\frac{C}{-p} = +qr$, daher ist jene quadratische Gleichung einerley mit folgender:

$$\text{A)}\ x^2 + (A+p)x + \frac{C}{p} = 0,$$

d. h. eine Gleichung $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, deren Wurzeln p, q und r sind, giebt mit $x - p$ dividirt, eine quadratische Gleichung von der Form (A), z. B. in der Gleichung

$$x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$$

ist eine Wurzel werth $x = 7 = p$, also muß nach der Gleichung

$$\text{(A)}\qquad x^2 + (-25+7)x + \frac{-560}{-7} = 0$$

oder $x^2 - 18x + 80 = 0$ die beyden übrigen Wurzeln enthalten. Eben diese Gleichung haben wir (§. 171) mit mehrerer Mühe durch die Division gefunden.

XII. Capitel.

Von der Regel des Cardani oder des Scipionis Ferrei.

§. 172.

Wenn eine cubische Gleichung auf ganze Zahlen gebracht wird, wie schon oben gezeigt worden, und kein Theiler des letzten Gliedes eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel in ganzen Zahlen habe, daß aber auch in Brüchen keine Statt finde. Dies läßt sich auf folgende Art zeigen: